Laboratoire Analyse,
Géométrie et Applications
URA CNRS 742

Université Paris-Nord
Institut Galilée

Algèbre Homologique Quasi-Abélienne

Juin 1995

Mémoire présenté par
Fabienne Prosmans
pour l'obtention du Diplôme
d'Etudes Approfondies de
mathématiques

Introduction

*Depuis de nombreuses années, les méthodes de l'algèbre homologique se sont avérées efficaces pour traiter de nombreux problèmes mathématiques dans des domaines aussi variés que la topologie algébrique, la géométrie algébrique ou plus récemment la théorie des équations aux dérivées partielles. Malgré diverses tentatives intéressantes (cf. [**7**]), l'application de ces techniques à l'analyse fonctionnelle n'a pas encore abouti à une théorie entièrement satisfaisante.*

*L'algèbre homologique traditionnelle telle qu'elle est exposée dans [**3**] est en effet construite pour des catégories abéliennes et ne s'applique donc pas à des catégories telles que celle des espaces localement convexes.*

*L'algèbre homologique moderne basée sur la notion de catégorie dérivée peut s'adapter plus facilement au but recherché. Des catégories telles que celle des espaces de Banach ou des espaces de Fréchet sont en effet des catégories exactes au sens de Quillen [**9**] et une définition de leur catégorie dérivée a été suggérée par Deligne (cf. [**1**]). Laumon a exposé cette idée un peu plus en détails dans [**5**] pour l'appliquer à l'étude des $\mathcal{D}$-modules filtrés.*

En pratique, la notion de catégorie exacte est trop générale et on peut obtenir des résultats plus intéressants si on se limite à la notion de catégorie quasi-abélienne comme nous l'a conseillé Jean-Pierre Schneiders.

*Le but de ce mémoire est d'exposer de manière aussi autonome que possible la construction de la catégorie dérivée d'une catégorie quasi-abélienne et de ses t-structures canoniques. La démarche suivie consiste à construire tout d'abord la catégorie $K(\mathcal{A})$ des complexes modulo homotopie associée à une catégorie additive $\mathcal{A}$ et à la munir de deux t-structures canoniques. Ensuite, lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ est quasi-abélienne, nous introduisons un système nul canonique $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ de $K(\mathcal{A})$ et construisons la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ et ses t-structures par localisation. Nous considérons également le problème de la dérivation des foncteurs dans ce contexte. Enfin, à titre d'exemple nous appliquons la théorie générale au cas de la catégorie des espaces de Banach et nous montrons comment dériver les foncteurs naturellement associés à cette catégorie. Cela établit un lien avec notre mémoire [**8**].*

Nous nous sommes largement inspirés de la théorie des catégories dérivées telle qu'elle est exposée dans [**4**] *et* [**11**], *et d'un article en préparation de Jean-Pierre Schneiders* [**10**].

Nous supposerons que le lecteur a une bonne connaissance de la théorie des catégories telle qu'elle est exposée par exemple dans [**6**]. *En ce qui concerne les résultats d'analyse fonctionnelle, notre référence standard sera* [**2**].

Je tiens à remercier vivement Jean-Pierre Schneiders pour son aide précieuse, sa grande disponibilité et ses encouragements pendant la préparation et la rédaction de ce travail.

Enfin, je ne voudrais pas terminer cette introduction sans remercier très sincèrement mes parents qui m'ont permis d'entreprendre cette année d'études à Paris.

CHAPITRE 0

Rappels de théorie des catégories

0.1. Catégories additives

Définition 0.1.1. Une *catégorie* $\mathcal{A}$ est *additive* si elle vérifie les conditions suivantes :

i) pour tout A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ a une structure de groupe abélien,

ii) il existe un objet nul i.e. un objet 0 tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0, 0) = 0$,

iii) pour tout A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

est bi-additive,

iv) le produit et le coproduit d'un nombre fini d'objets de $\mathcal{A}$ existent.

Définition 0.1.2. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories additives. Un *foncteur* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *additif* si pour tout A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, il induit un homomorphisme de groupes abéliens de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$.

Remarque 0.1.3. Soient A et B deux objets d'une catégorie additive $\mathcal{A}$. Si $A \times B$ est le produit de A et B, il existe un morphisme unique $i_A : A \longrightarrow A \times B$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A \arrow[ur, "\mathrm{id}_A"] \arrow[rr, dashed, "i_A"] \arrow[dr, "0"'] & & A \times B \arrow[ul, "p_A"'] \arrow[dl, "p_B"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

(Les morphismes p_A et p_B sont les projections sur A et B respectivement.)

De même, il existe un morphisme unique $i_B : B \longrightarrow A \times B$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
B \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, dashed, "i_B"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & & A \times B \arrow[ul, "p_A"'] \arrow[dl, "p_B"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Proposition 0.1.4. *Soient A et B deux objets d'une catégorie additive $\mathcal{A}$. En reprenant les notations de la remarque précédente, on a les relations suivantes :*

i) $p_A \circ i_A = \mathrm{id}_A$, $p_B \circ i_B = \mathrm{id}_B$,

ii) $p_B \circ i_A = 0$, $p_A \circ i_B = 0$,

iii) $i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = \mathrm{id}_{A\times B}$.

Preuve. i) et ii) sont évidents.

iii) Comme le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A\times B \arrow[ur, "p_A"] \arrow[rr, "i_A \circ p_A + i_B \circ p_B"] \arrow[dr, "p_B"'] & & A\times B \arrow[ul, "p_A"'] \arrow[dl, "p_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

est commutatif, la conclusion s'ensuit aussitôt. □

Proposition 0.1.5. *Dans une catégorie additive $\mathcal{A}$, le produit d'un nombre fini d'objets de $\mathcal{A}$ est un coproduit de ces objets.*

Preuve. Soient A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C)$ et $b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$. On vérifie directement que le morphisme $c : A \times B \longrightarrow C$, $c = a \circ p_A + b \circ p_B$ rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i_A"'] \arrow[dr, "a"] & \\ A\times B \arrow[rr, "c"] & & C \\ & B \arrow[ul, "i_B"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, c est unique. En effet, supposons qu'il existe $c' : A \times B \longrightarrow C$ tel que $c' \circ i_A = c \circ i_A = a$ et $c' \circ i_B = c \circ i_B = b$. On en déduit que

$$c' \circ i_A \circ p_A + c' \circ i_B \circ p_B = c \circ i_A \circ p_A + c \circ i_B \circ p_B$$

et donc, $c = c'$. Par conséquent, $A \times B$ est un coproduit de A et B. □

Définition 0.1.6. La *somme directe* de deux objets A et B d'une catégorie additive, notée $A \oplus B$ est le produit et donc le coproduit de ces deux objets.

Proposition 0.1.7. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Si les morphismes*

$$j_A : A \longrightarrow C \qquad j_B : B \longrightarrow C$$

$$q_A : C \longrightarrow A \qquad q_B : C \longrightarrow B$$

vérifient les relations de la proposition 0.1.4, alors $C \simeq A \oplus B$.

Preuve. Les morphismes

$$\alpha : C \longrightarrow A \oplus B \qquad \alpha = i_A \circ q_A + i_B \circ q_B$$

et

$$\beta : A \oplus B \longrightarrow C \qquad \beta = j_A \circ p_A + j_B \circ p_B$$

vérifient $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_C$ et $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{A \oplus B}$. □

Corollaire 0.1.8. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux catégories additives et* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un foncteur additif. Pour tout* A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $F(A \oplus B) \simeq F(A) \oplus F(B)$.

Preuve. Puisque F est un foncteur additif, les morphismes

$$F(i_A) : F(A) \longrightarrow F(A \oplus B) \qquad F(i_B) : F(B) \longrightarrow F(A \oplus B)$$

$$F(p_A) : F(A \oplus B) \longrightarrow F(A) \qquad F(p_B) : F(A \oplus B) \longrightarrow F(B)$$

vérifient les relations de la proposition 0.1.4. On en déduit que $F(A \oplus B) \simeq F(A) \oplus F(B)$. □

Remarque 0.1.9. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et A_i, $B_i \in Ob(\mathcal{A})$ $(i = 1, 2)$. Donner un morphisme $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1 \oplus A_2, B_1 \oplus B_2)$ revient à donner la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_j, B_i)$ est défini par

$$a_{ij} := p_{B_i} \circ a \circ i_{A_j}.$$

Le morphisme a peut en effet s'exprimer par la formule

$$a = \sum_{i,j=1}^{2} i_{B_j} \circ a_{ji} \circ p_{A_i}.$$

Proposition 0.1.10. *Soient* $\mathcal{A}$ *une catégorie additive et*

$$\varphi_1 : A_1 \longrightarrow B_1, \qquad \varphi_2 : A_2 \longrightarrow B_2$$

deux morphismes de $\mathcal{A}$*. Le morphisme*

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$$

est un isomorphisme si et seulement s'il en est ainsi de φ_1 *et* φ_2*. En particulier,* $A \oplus B = 0$ *si et seulement si* $A \simeq 0$ *et* $B \simeq 0$.

Preuve. Si $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ est un isomorphisme, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' & \alpha \\ \beta & \varphi_2' \end{pmatrix}$$

avec $\varphi_i' : B_i \longrightarrow A_i$, $\alpha : B_2 \longrightarrow A_1$ et $\beta : B_1 \longrightarrow A_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' & \alpha \\ \beta & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{A_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{A_2} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' & \alpha \\ \beta & \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{B_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{B_2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement que φ_1 et φ_2 sont des isomorphismes puis que $\alpha = \beta = 0$. La réciproque est immédiate. □

Définition 0.1.11. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{A}$.

i) Un *noyau de* f est la donnée d'un couple (K, i) avec $K \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, A)$, tel que $f \circ i = 0$ et pour tout $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ vérifiant $f \circ e = 0$, il existe un unique $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, K)$ tel que $i \circ c = e$. Schématiquement, on a

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & C \arrow[ul, "c"] \arrow[u, "e"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

ii) Un *conoyau de* f est la donnée d'un couple (L, q) avec $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, L)$, tel que $q \circ f = 0$ et pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ vérifiant $g \circ f = 0$, il existe un unique $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, C)$ tel que $c \circ q = g$. Schématiquement, on a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & L \arrow[dl, "c"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Proposition 0.1.12. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{A}$.*

i) *Si (K, i) est un noyau de f alors i est un monomorphisme. Si (K', i') est un autre noyau de f, il existe un unique isomorphisme $k : K \longrightarrow K'$ tel que $i' \circ k = i$.*

ii) *Si (L, q) est un conoyau de f, alors q est un épimorphisme. Si (L', q') est un autre conoyau de f, il existe un unique isomorphisme $l : L \longrightarrow L'$ tel que $l \circ q = q'$.*

Preuve. Etablissons i), ii) en découlera par dualité.

Soient $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, K)$ tels que $i \circ h = 0$. Comme $f \circ i \circ h = 0$, il existe un unique $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, K)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & C \arrow[ul, "c"] \arrow[u, "i \circ h"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Donc, $i \circ c = i \circ h = 0$. Comme c est unique, $h = c = 0$. Si (K', i') est un autre noyau de f, il existe par définition un seul morphisme k rendant commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "i'"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & K \arrow[ul, "k"] \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

De même, il existe un seul morphisme k' rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & K' \arrow[ul, "k'"] \arrow[u, "i'"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

commutatif.

On en déduit que $i' \circ k \circ k' = i \circ k' = i'$ et $i \circ k' \circ k = i' \circ k = i$ et comme i et i' sont des monomorphismes, k et k' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. $\square$

Remarque 0.1.13. Dans la suite, si le morphisme f possède un noyau (resp. conoyau), on notera $\ker f$ (resp. $\mathrm{coker}\, f$) un choix canonique de son noyau (resp. conoyau).

Remarque 0.1.14. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $i : K \longrightarrow X$ des morphismes de $\mathcal{A}$. Si la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(W, K) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,i)} \mathrm{Hom}\,(W, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,f)} \mathrm{Hom}\,(W, Y)$$

est exacte pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, alors (K, i) est un noyau de f.

On a une caractérisation duale pour le conoyau.

Définition 0.1.15. Si le morphisme $i : \ker f \longrightarrow A$ a un conoyau, il est appelé la *coimage de* f et noté $\mathrm{coim}\, f$.

Si le morphisme $q : B \longrightarrow \mathrm{coker}\, f$ a un noyau, il est appelé l'*image de* f et noté $\mathrm{im}\, f$.

Proposition 0.1.16. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive, et*

$$f : A \longrightarrow B, \qquad g : B \longrightarrow C$$

deux morphismes de $\mathcal{A}$.

i) *f est un monomorphisme si et seulement si* $\ker f \simeq 0$.

ii) *f est un épimorphisme si et seulement si* $\operatorname{coker} f \simeq 0$.

iii) *Si g est un monomorphisme alors* $\ker(g \circ f) \simeq \ker f$.

iv) *Si f est un épimorphisme alors* $\operatorname{coker}(g \circ f) \simeq \operatorname{coker} g$.

Preuve. i) Supposons d'une part que $\ker f = 0$ et donc $i = 0$. Soit $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ tel que $f \circ e = 0$. Il existe donc un seul $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, \ker f)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & C \arrow[ul, "c"] \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Par conséquent, $e = 0$.

D'autre part, démontrons que si f est un monomorphisme alors le couple $(0, 0)$ est un noyau de f. Soient $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ tels que $f \circ e = 0$. Comme f est un monomorphisme, $e = 0$ et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & C \arrow[ul, "0"] \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

iii) Il suffit de démontrer que $\ker f$ est un noyau de $g \circ f$. Soit $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, A)$ tel que $g \circ f \circ e = 0$. Comme g est un monomorphisme, $f \circ e = 0$ et par définition du noyau de f, il existe un seul $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, \ker f)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & W \arrow[ul, "w"] \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, ce qui suffit.

Les assertions ii) et iv) s'établissent par dualité. $\square$

Proposition 0.1.17. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive dont les morphismes possèdent des noyaux et conoyaux. Soient $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_i, B_i)$, $(i = 1, 2)$. Si*

$$f_1 \oplus f_2 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$$

alors

i) $\ker(f_1 \oplus f_2) \simeq \ker f_1 \oplus \ker f_2$,

ii) $\operatorname{coker}(f_1 \oplus f_2) \simeq \operatorname{coker} f_1 \oplus \operatorname{coker} f_2$,

iii) $\operatorname{im}(f_1 \oplus f_2) \simeq \operatorname{im} f_1 \oplus \operatorname{im} f_2$,

iv) $\operatorname{coim}(f_1 \oplus f_2) \simeq \operatorname{coim} f_1 \oplus \operatorname{coim} f_2$.

Preuve. Démontrons que si $(\ker f_1, i_1)$ et $(\ker f_2, i_2)$ sont des noyaux de f_1 et f_2 respectivement, alors $(\ker f_1 \oplus \ker f_2, i_1 \oplus i_2)$ est un noyau de $f_1 \oplus f_2$.

Bien sûr,

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Soit

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} : C \longrightarrow A_1 \oplus A_2$$

tel que

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \circ e_1 \\ f_2 \circ e_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Par définition de $\ker f_i$, il existe $c_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(C, \ker f_i)$ tel que $i_i \circ c_i = e_i$, $(i = 1, 2)$. Par conséquent, le morphisme

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : C \longrightarrow \ker f_1 \oplus \ker f_2$$

rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\ker f_1 \oplus \ker f_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix}"] & A_1 \oplus A_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}"] & B_1 \oplus B_2 \\
& C \arrow[ul, "\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\ker(f_1 \oplus f_2) \simeq \ker f_1 \oplus \ker f_2$. Le point ii) s'obtient par dualité. Les points iii) et iv) se déduisent de i) et ii) vu les définitions de im et coim. $\square$

Rappelons que dans une catégorie $\mathcal{C}$, un *carré cartésien* est un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "f"] & C_2 \\
C'_1 \arrow[u, "c_1"] \arrow[r, "f'"] & C'_2 \arrow[u, "c_2"]
\end{tikzcd}$$

tel que pour tout $C \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ et tout couple $(\gamma_1, \gamma'_2) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C_1) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'_2)$ vérifiant $f \circ \gamma_1 = c_2 \circ \gamma'_2$, il existe un unique morphisme $\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'_1)$ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "f"] & C_2 \\
 & C_1' \arrow[u, "c_1"] \arrow[r, "f'"] & C_2' \arrow[u, "c_2"] \\
C \arrow[uur, "\gamma_1"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[urr, "\gamma_2'"] & &
\end{tikzcd}$$

Par dualité, un *carré co-cartésien* est un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
C_1' \arrow[r, "f'"] & C_2' \\
C_1 \arrow[u, "c_1'"] \arrow[r, "f"] & C_2 \arrow[u, "c_2'"]
\end{tikzcd}$$

tel que pour tout $C' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout couple $(\gamma_1', \gamma_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1', C') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C')$ vérifiant $\gamma_2 \circ f = \gamma_1' \circ c_1'$, il existe un unique morphisme $\gamma' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2', C')$ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & & C' \\
C_1' \arrow[r, "f'"] \arrow[urr, "\gamma_1'"] & C_2' \arrow[ur, "\gamma'"] & \\
C_1 \arrow[u, "c_1'"] \arrow[r, "f"] & C_2 \arrow[u, "c_2'"] \arrow[uur, "\gamma_2"] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 0.1.18. *i) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive telle que tout morphisme possède un noyau et un conoyau. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ et $b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B', B)$, alors il existe $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', A)$ et $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', B')$ tels que*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
A' \arrow[u, "a"] \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[u, "b"]
\end{tikzcd}$$

soit un carré cartésien.

ii) Par dualité, on a le résultat analogue pour les carrés co-cartésiens.

Preuve. i) Considérons le morphisme

$$v = \begin{pmatrix} f & -b \end{pmatrix} : A \oplus B' \longrightarrow B$$

et établissons que $A' = \ker v$, $a = p_A \circ i_v$, $f' = p'_B \circ i_v$ (où $i_v : \ker v \longrightarrow A \oplus B'$) répondent à la question.

Soit $(\alpha, \beta') \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B')$ tel que $f \circ \alpha = b \circ \beta'$. Le morphisme

$$v' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta' \end{pmatrix} : X \longrightarrow A \oplus B'$$

vérifie

$$v \circ v' = \begin{pmatrix} f & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta' \end{pmatrix} = f \circ \alpha - b \circ \beta' = 0.$$

Donc, par définition de $\ker v$, il existe un unique morphisme $v'' : X \longrightarrow \ker v$ tel que $i_v \circ v'' = v'$. Il s'ensuit que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] & B \\
 & \ker v \arrow[u, "p_A \circ i_v"] \arrow[r, "p_{B'} \circ i_v"] & B' \arrow[u, "b"'] \\
X \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "v''"] \arrow[urr, "\beta'"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

Remarque 0.1.19. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive telle que tout morphisme possède un noyau et un conoyau, soient A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

i) Il existe un morphisme canonique $\varphi : \mathrm{coim}\, f \longrightarrow \mathrm{im}\, f$. En effet, comme $\mathrm{coim}\, f$ est le conoyau de $i : \ker f \longrightarrow A$ et que $f \circ i = 0$, il existe $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{coim}\, f, B)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{coim}\, f \arrow[dl, "f'"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Si $q : B \longrightarrow \mathrm{coker}\, f$, on a $q \circ f' \circ q' = q \circ f = 0$ et $q \circ f' = 0$ car q' est un épimorphisme. Comme $\mathrm{im}\, f$ est le noyau de q, il existe un unique morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{coim}\, f, \mathrm{im}\, f)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{im}\, f \arrow[r, "i'"] & B \arrow[r, "q"] & \mathrm{coker}\, f \\
 & \mathrm{coim}\, f \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

ii)Soient $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ tels que $g \circ f = 0$. Il existe un morphisme canonique $\psi : \mathrm{im}\, f \longrightarrow \ker g$. En effet, comme $g \circ f = 0$, il existe un unique morphisme $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{coker}\, f, C)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{coker}\, f \arrow[dl, "c"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que $g \circ i' = c \circ q \circ i' = 0$ (où $i' : \mathrm{im}\, f \longrightarrow B$) et par définition de $\ker g$, il existe un unique morphisme $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{im}\, f, \ker g)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\ker g \arrow[r, "i_g"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
& \mathrm{im}\, f \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, "i'"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

0.2. Catégories abéliennes

Définition 0.2.1. Une *catégorie* additive $\mathcal{A}$ est *abélienne* si elle vérifie les conditions suivantes :

i) tout morphisme de $\mathcal{A}$ possède un noyau et un conoyau,

ii) pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, le morphisme canonique

$$\mathrm{coim}\, f \longrightarrow \mathrm{im}\, f$$

est un isomorphisme.

Définition 0.2.2. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une suite de morphismes de $\mathcal{A}$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est *exacte* si

i) $g \circ f = 0$,

ii) le morphisme canonique $\mathrm{im}\, f \longrightarrow \ker g$ est un isomorphisme.

Remarque 0.2.3. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

i) La suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ est exacte si et seulement si f est un monomorphisme.

ii) la suite $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si f est un épimorphisme.

Proposition 0.2.4. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et*

$$f : A \longrightarrow B$$

un morphisme de $\mathcal{A}$. On a les suites exactes suivantes :

i) $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{im}\, f \longrightarrow 0$

ii) $0 \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow B \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$

Preuve. C'est immédiat. □

Proposition 0.2.5. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. La suite*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B \longrightarrow 0$$

est exacte.

Preuve. a) Soit $c \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ tel que $i_A \circ c = 0$. Puisque $p_A \circ i_A \circ c = c = 0$, i_A est un monomorphisme.

b) Si on démontre que le conoyau de i_A est (B, p_B) alors $\operatorname{im} i_A \simeq \ker p_B$. Soit $c \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A \oplus B, C)$ tel que $c \circ i_A = 0$. Le morphisme $c \circ i_B : B \longrightarrow C$ rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "0"'] & A \oplus B \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "c"] & B \arrow[dl, "c \circ i_B"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

En effet, comme $i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = \mathrm{id}_{A \oplus B}$, on a

$$c \circ i_A \circ p_A + c \circ i_B \circ p_B = c \circ i_B \circ p_B = c.$$

c) Soit $c \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ tel que $c \circ p_B = 0$. Puisque $c \circ p_B \circ i_B = c = 0$, p_B est un épimorphisme. □

Définition 0.2.6. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. Un *foncteur* additif $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *exact à gauche* (resp. *à droite*) si pour toute suite exacte dans $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

$$(\text{resp.} \qquad A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0)$$

la suite

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

$$(\text{resp.} \qquad F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0)$$

est exacte dans $\mathcal{B}$.

Le *foncteur* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *exact* s'il est exact à gauche et à droite.

Un *foncteur contravariant* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *exact à gauche* (resp. *à droite*) s'il est exact à gauche (resp. à droite) quand il est considéré comme foncteur $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{B}$ (où $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ est la catégorie opposée de $\mathcal{A}$).

Exemple 0.2.7. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Les foncteurs

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(.,X) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

et

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,.) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

(où $\mathcal{A}b$ désigne la catégorie des groupes abéliens) sont exacts à gauche.

0.3. Foncteurs représentables

Définition 0.3.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Soit $h_X : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$ (resp. $h^X : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$) le foncteur additif défini par

$$h_X(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$$

$$(\text{resp. } h^X(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X)).$$

Un *foncteur* additif $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$ (resp. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$) est *représentable* s'il existe $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ tel que

$$F \simeq h_X$$

$$(\text{resp. } F \simeq h^X).$$

On dit que X est un *représentant* de F.

Proposition 0.3.2. *Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$ (resp. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$) est un foncteur additif, alors pour tout $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$*

$$\operatorname{Hom}(h_X, F) \simeq F(X).$$

$$(\textit{resp. } \operatorname{Hom}(h^X, F) \simeq F(X).)$$

Preuve. Considérons les morphismes

$$\varphi : \operatorname{Hom}(h_X, F) \longrightarrow F(X), \qquad \psi : F(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}(h_X, F)$$

définis respectivement par

$$\varphi(\alpha) = \alpha(X)(\mathrm{id}_X) \qquad \forall \alpha \in \operatorname{Hom}(h_X, F)$$

et

$$\psi(a)(Y)(f) = F(f)(a) \qquad \forall a \in F(X), \forall Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}), \forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y).$$

Le morphisme

$$\psi(a) : h_X \longrightarrow F$$

est bien fonctoriel car si $g : Y \longrightarrow Y'$ est un morphisme de $\mathcal{A}$, le carré

$$\begin{tikzcd} h_X(Y) \arrow[r, "\psi(a)(Y)"] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"'] \\ h_X(Y') \arrow[r, "\psi(a)(Y')"] & F(Y') \end{tikzcd}$$

commute car pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, on a

$$\begin{aligned} F(g) \circ \psi(a)(Y)(f) &= F(g) \circ F(f)(a) \\ &= F(g \circ f)(a) \\ &= \psi(a)(Y') \circ h_X(g)(f). \end{aligned}$$

Les morphismes ψ et φ sont inverses l'un de l'autre. En effet, d'une part, on a

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(\alpha)(Y)(f) &= F(f)(\varphi(\alpha)) \\ &= F(f)(\alpha(X)(\mathrm{id}_X)) \\ &= \alpha(Y)(f) \end{aligned}$$

car la carré

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[d, "h_X(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \\ h_X(Y) \arrow[r, "\alpha(Y)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

commute.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(a) &= \psi(a)(X)(\mathrm{id}_X) \\ &= F(\mathrm{id}_X)(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

□

Corollaire 0.3.3. *On a l' isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}\,(h_X, h_Y) \simeq \mathrm{Hom}\,(Y, X)$$

$$(\textit{resp.}\ \mathrm{Hom}\,(h^X, h^Y) \simeq \mathrm{Hom}\,(X, Y)).$$

En particulier, $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme si et seulement si $h_f : h_X \longrightarrow h_Y$ (resp. $h^f : h^X \longrightarrow h^Y$) est un isomorphisme.

Remarque 0.3.4. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ deux catégories additives et

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}', \qquad G : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$$

deux foncteurs additifs.

i) Il résulte de la proposition précédente que se donner un morphisme de foncteurs

$$A(.,.) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(., G(.)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(.), .)$$

est équivalent à se donner un morphisme de foncteurs

$$T(.) : F \circ G(.) \longrightarrow \mathrm{id}(.)$$

caractérisé par

$$A(X, Y)(f) = T(Y) \circ F(f)$$

pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(Y))$.

ii) Par dualité, se donner un morphisme de foncteurs

$$A'(.,.) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(.), .) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(., G(.))$$

est équivalent à se donner un morphisme de foncteurs

$$T'(.) : \mathrm{id}(.) \longrightarrow G \circ F(.)$$

caractérisé par

$$A'(X, Y)(f) = G(f) \circ T'(X)$$

pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), Y)$.

CHAPITRE 1

Catégories triangulées et t-structures

1.1. Catégories triangulées

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive munie d'un automorphisme $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Définition 1.1.1. Un *triangle* de $\mathcal{A}$ est une suite de morphismes de $\mathcal{A}$

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} T(A).$$

Un *morphisme de triangles de* $\mathcal{A}$ est la donnée d'un diagramme commutatif dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\gamma"] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ A' \arrow[r, "a'"] & B' \arrow[r, "b'"] & C' \arrow[r, "c'"] & T(A') \end{tikzcd}$$

Définition 1.1.2. Une *catégorie triangulée* $\mathcal{T}$ est la donnée d'une catégorie additive $\mathcal{T}$ munie d'un automorphisme $T : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ et d'une famille de triangles, appelés *triangles distingués* vérifiant les axiomes suivants :

(TD 0) un triangle isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué,

(TD 1) pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$,

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$$

est un triangle distingué,

(TD 2) pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{T}$, il existe un triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X),$$

(TD 3) le triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

est distingué si et seulement si le triangle

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$$

est distingué,

(TD 4) étant donné deux triangles distingués

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X),$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow T(X'),$$

et un diagramme commutatif dans $\mathcal{T}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

il existe $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, Z')$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X') \end{tikzcd}$$

soit commutatif et donc, on a un morphisme de triangles distingués,

(TD 5) étant donné les triangles distingués

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow T(X)$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow T(Y)$$

$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow T(X),$$

il existe un triangle distingué

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow T(Z')$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\ X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & T(Y) \arrow[d] \\ Z' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X' \arrow[r] & T(Z') \end{tikzcd}$$

Cette dernière assertion, appelée “axiome de l’octaèdre”, peut être visualisée de la manière suivante.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
Z' \arrow[ur] \arrow[d] & & X' \arrow[ll] \arrow[ddl] \\
X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[u] \arrow[uul] \\
 & Y \arrow[ur, "g"'] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}
$$

Notation 1.1.3. Soit X un objet d’une catégorie triangulée $\mathcal{T}$. Par commodité d’écriture, on posera

$$X[n] = T^n(X).$$

Définition 1.1.4. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux catégories triangulées. Un *foncteur triangulé* $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ est un foncteur additif tel que

i) $F(X[1]) \simeq F(X)[1]$
ii) l’image par F d’un triangle distingué de $\mathcal{T}$ est un triangle distingué de $\mathcal{T}'$.

Proposition 1.1.5. *Si $\mathcal{T}$ est une catégorie triangulée et*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué, alors $g \circ f = 0$.

Preuve. Comme

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué, par (TD 4), il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(0, Z)$ tel que le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}
$$

soit commutatif, et donc, $g \circ f = 0$. □

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un *foncteur cohomologique* $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur additif tel que pour tout triangle distingué de $\mathcal{T}$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1],$$

la suite

$$F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

est exacte.

Proposition 1.1.7. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, .) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(., W) : \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$ sont des foncteurs cohomologiques.*

Preuve. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$ un triangle distingué de $\mathcal{T}$. Etablissons que la suite des groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,g)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z)$$

est exacte, i.e. $\mathrm{im}(\mathrm{Hom}\,(W, f)) = \ker(\mathrm{Hom}\,(W, g))$.

D'une part, si $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X)$, on a par la proposition 1.1.5

$$\mathrm{Hom}\,(W, g) \circ \mathrm{Hom}\,(W, f)(\psi) = g \circ f \circ \psi = 0.$$

D'autre part, soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$ vérifiant $\mathrm{Hom}\,(W, g)(\varphi) = g \circ \varphi = 0$. Puisque

$$W \xrightarrow{\mathrm{id}_W} W \longrightarrow 0 \longrightarrow W[1]$$

est un triangle distingué, par (TD 3) et (TD 4), il existe $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X)$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
W[-1] \arrow[r] \arrow[d, "{\varphi[-1]}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\psi"] & W \arrow[d, "\varphi"] \\
Y[-1] \arrow[r, "{-g[-1]}"] & Z[-1] \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

commutatif. On a alors $\mathrm{Hom}\,(W, f)(\psi) = f \circ \psi = \varphi$. □

Corollaire 1.1.8. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et un morphisme de triangles distingués dans $\mathcal{T}$*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & X[1] \arrow[d, "{\varphi[1]}"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Si φ et θ sont des isomorphismes alors ψ est un isomorphisme.

Preuve. Soit $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Comme $\mathrm{Hom}\,(W, .)$ est un foncteur cohomologique, on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(W, Z[-1]) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}\,(W,\theta[-1])}"] & \mathrm{Hom}\,(W, X) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}\,(W,\varphi)}"] & \mathrm{Hom}\,(W, Y) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}\,(W,\psi)}"] & \mathrm{Hom}\,(W, Z) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}\,(W,\theta)}"] & \mathrm{Hom}\,(W, X[1]) \arrow[d, "{\mathrm{Hom}\,(W,\varphi[1])}"] \\
\mathrm{Hom}\,(W, Z'[-1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,(W, X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,(W, Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,(W, Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,(W, X'[1])
\end{tikzcd}$$

Comme φ et θ sont des isomorphismes, $\mathrm{Hom}\,(W, \theta[-1])$, $\mathrm{Hom}\,(W, \varphi)$, $\mathrm{Hom}\,(W, \theta)$ et $\mathrm{Hom}\,(W, \varphi[1])$ sont des isomorphismes et par le lemme des cinq, on en déduit que $\mathrm{Hom}\,(W, \psi)$ est un isomorphisme pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Par le corollaire 0.3.3, on a le résultat. □

Corollaire 1.1.9. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée, et soit*

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow N \longrightarrow X[1]$$

un triangle distingué de $\mathcal{T}$. Alors, f est un isomorphisme si et seulement si $N \simeq 0$.

Preuve. Supposons que f est un isomorphisme. Comme on a le morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & N \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

on en déduit que $N \simeq 0$.

Inversément, si on a un triangle distingué du type

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

par le corollaire précédent, comme on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

on en déduit que f est un isomorphisme. □

Proposition 1.1.10. *Si $\mathcal{T}$ est une catégorie triangulée et si $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, alors*

$$X \xrightarrow{0} Y \xrightarrow{i_Y} X[1] \oplus Y \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué dans $\mathcal{T}$.

Preuve. Par (TD 2), il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$X \xrightarrow{0} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

et comme pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, $\mathrm{Hom}\,(W, .)$ est un foncteur cohomologique, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(W, Y) \xrightarrow{Hom(W,g)} \mathrm{Hom}\,(W, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,h)} \mathrm{Hom}\,(W, X[1]) \longrightarrow 0$$

est exacte. Pour $W = X[1]$, il existe donc $h' \in \mathrm{Hom}\,(X[1], Z)$ tel que

$$\mathrm{Hom}\,(X[1], h)(h') = h \circ h' = id_{X[1]}.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Hom}\,(W,h) \circ \mathrm{Hom}\,(W,h') = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}\,(W,X[1])}$ et la suite ci-dessus est scindée. Par conséquent, pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$,

$$\mathrm{Hom}\,(W,Z) \simeq \mathrm{Hom}\,(W,Y) \oplus \mathrm{Hom}\,(W,X[1]).$$

Comme cet isomorphisme est fonctoriel en W, on a $Z \simeq X[1] \oplus Y$. D'où la conclusion. □

Corollaire 1.1.11. *Si $\mathcal{T}$ est une catégorie triangulée et si*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} X[1]$$

est un triangle distingué dans $\mathcal{T}$, alors $Y \simeq X \oplus Z$.

Preuve. Par la proposition précédente, comme

$$Z \xrightarrow{0} X[1] \longrightarrow Y[1] \longrightarrow Z[1]$$

est un triangle distingué, $Y[1] \simeq Z[1] \oplus X[1]$ et $Y \simeq X \oplus Z$. □

1.2. Localisation d'une catégorie triangulée

Dans cette section, $\mathcal{T}$ désigne une catégorie triangulée.

Définition 1.2.1. Un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ est un *système nul* s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

(N 1) $0 \in \mathcal{N}$,
(N 2) $X \in \mathcal{N}$ si et seulement si $X[1] \in \mathcal{N}$,
(N 3) si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ est un triangle distingué de $\mathcal{T}$ avec X, $Y \in \mathcal{N}$, alors $Z \in \mathcal{N}$.

On note $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ l'ensemble des morphismes $f : X \longrightarrow Y$ tels qu'il existe un triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1],$$

avec $Z \in \mathcal{N}$.

Proposition 1.2.2. *Si $\mathcal{N}$ est un système nul de $\mathcal{T}$, alors*

i) *pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, $\mathrm{id}_X \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$,*
ii) *pour tout $s_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y)$, $s_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,Z)$, tels que s_1, $s_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, on a $s_2 \circ s_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$,*
iii) *tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

avec $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ peut être complété en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "s'"] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

avec $s' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. On a le même résultat avec les morphismes renversés,

iv) *si f et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) il existe $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Y')$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tel que $s \circ f = s \circ g$,

2) il existe $s' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', X)$, $s' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tel que $f \circ s' = g \circ s'$.

Preuve. i) Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Comme $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ est un triangle distingué et que $0 \in \mathcal{N}$, $\mathrm{id}_X \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$.

ii) Puisque s_1, $s_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, il existe deux triangles distingués

$$X \xrightarrow{s_1} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow X[1],$$

$$Y \xrightarrow{s_2} Z \longrightarrow X' \longrightarrow Y[1]$$

avec X', $Z' \in \mathcal{N}$. De plus, par (TD 2), on a un triangle distingué

$$X \xrightarrow{s_2 \circ s_1} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow X[1]$$

et par l'axiome de l'octaèdre, on obtient le triangle distingué suivant.

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow Z'[1]$$

Par (TD 3),

$$X'[-1] \longrightarrow Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X'$$

est un triangle distingué avec $X'[-1]$ et $Z' \in \mathcal{N}$, et donc $Y' \in \mathcal{N}$, ce qui implique que $s_2 \circ s_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$.

iii) Puisque $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, il existe un triangle distingué

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} Z[1]$$

avec $X' \in \mathcal{N}$ et par (TD 2), on a le triangle distingué

$$X \xrightarrow{g \circ f} X' \xrightarrow{g'} X'' \xrightarrow{h'} X[1].$$

Par (TD 3) et (TD 4), il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X''[-1], Z)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X[-1] \arrow[r, "-(g\circ f)[-1]"] \arrow[d, "f[-1]"] & X'[-1] \arrow[r, "-g'[-1]"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'[-1]}"] & X''[-1] \arrow[r, "-h'[-1]"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y[-1] \arrow[r, "-g[-1]"] & X'[-1] \arrow[r, "-h[-1]"] & Z \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

Or, comme par (TD 3) on a le triangle distingué

$$X''[-1] \xrightarrow{-h'[-1]} X \xrightarrow{g \circ f} X' \xrightarrow{g'} X''$$

avec $X' \in \mathcal{N}$, $-h'[-1] \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par conséquent, $W = X''[-1]$ et $s' = -h'[-1]$ conviennent.

iv) Soient $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y)$ et $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,Y')$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tels que $s \circ f = 0$. Démontrons qu'il existe $s' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X',X)$, $s' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tel que $f \circ s' = 0$. Puisque $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, il existe un triangle distingué

$$Y \xrightarrow{s} Y' \xrightarrow{t} Y'' \xrightarrow{t'} Y[1]$$

avec $Y'' \in \mathcal{N}$ et comme $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ est un triangle distingué, par (TD 3) et (TD 4), il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y''[-1])$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
X[-1] \arrow[r] \arrow[d, "{f[-1]}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y[-1] \arrow[r, "{-s[-1]}"] & Y'[-1] \arrow[r, "{-t[-1]}"] & Y''[-1] \arrow[r, "{-t'[-1]}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Comme par (TD 2), on a le triangle distingué

$$X \xrightarrow{\varphi} Y''[-1] \xrightarrow{\psi} Z \xrightarrow{\psi'} X[1],$$

par (TD 3), on a alors le triangle distingué

$$Z[-1] \xrightarrow{-\psi'[-1]} X \xrightarrow{\varphi} Y''[-1] \xrightarrow{\psi} Z.$$

Il s'ensuit que $-\psi'[-1] \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ car $Y''[-1] \in \mathcal{N}$ et

$$f \circ \psi'[-1] = t'[-1] \circ \varphi \circ \psi'[-1] = 0.$$

Par conséquent, $X' = Z[-1]$ et $s' = -\psi'[-1]$ conviennent. $\square$

Lemme 1.2.3. *Soit $\mathcal{N}$ un système nul de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$.*

i) *Soient X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Si un triplet (X', s, f) est la donnée de $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et des morphismes $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', X)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', Y)$, alors la relation R définie par*

$$(X_1', s_1, f_1) R (X_2', s_2, f_2)$$

si et seulement s'il existe un diagramme commutatif dans $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X_1' \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & W \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "u"] \arrow[d, "u'"] & X_2' \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

avec $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et $u \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, est une relation d'équivalence.

ii) *Si les diagrammes suivants*

$$\begin{tikzcd}
 & & X''_1 \arrow[dl, "t'_1"'] \arrow[dr, "g'_1"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & X''_2 \arrow[dl, "t'_2"'] \arrow[dr, "g'_2"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs, et si $s \circ t'_1$ et $s \circ t'_2$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ alors

$$(X''_1, s \circ t'_1, g \circ g'_1) R (X''_2, s \circ t'_2, g \circ g'_2).$$

Preuve. i) Il est clair que la relation R est réflexive et symétrique. Démontrons qu'elle est transitive. Supposons que

$$(X'_1, s_1, f_1) R (X'_2, s_2, f_2) \text{ et } (X'_2, s_2, f_2) R (X'_3, s_3, f_3),$$

i.e. qu'il existe deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X'_1 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & W_1 \arrow[u, "u_1"'] \arrow[l, "v_1"'] \arrow[r, "v'_1"] \arrow[d, "u'_1"] & X'_2 \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X'_2 \arrow[ur, "s_2"] \arrow[dr, "f_2"'] & W_2 \arrow[u, "u_2"'] \arrow[l, "v_2"'] \arrow[r, "v'_2"] \arrow[d, "u'_2"] & X'_3 \arrow[ul, "s_3"'] \arrow[dl, "f_3"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

avec u_1, $u_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Comme on a

$$\begin{tikzcd} & W_2 \arrow[d, "u_2"] \\ W_1 \arrow[r, "u_1"] & X \end{tikzcd}$$

avec $u_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, par la proposition 1.2.2, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "u_3"] & W_2 \arrow[d, "u_2"] \\ W_1 \arrow[r, "u_1"] & X \end{tikzcd}$$

avec $u_3 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. De plus, on a

$$\begin{aligned} s_2 \circ v_1' \circ u_3 &= u_1 \circ u_3 \\ &= u_2 \circ u_4 \\ &= s_2 \circ v_2 \circ u_4 \end{aligned}$$

et par la proposition 1.2.2, il existe $W_4 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W_4, W_3)$, $t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tels que

$$v_1' \circ u_3 \circ t = v_2 \circ u_4 \circ t.$$

On vérifie alors aisément que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X_1' \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & W_4 \arrow[u, "u_1 \circ u_3 \circ t"] \arrow[l, "v_1 \circ u_3 \circ t"'] \arrow[r, "v_2' \circ u_4 \circ t"] \arrow[d, "u_1' \circ u_3 \circ t"] & X_3' \arrow[ul, "s_3"'] \arrow[dl, "f_3"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

est commutatif et comme $u_1 \circ u_3 \circ t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, la relation R est transitive.

ii) Comme on a

$$\begin{tikzcd} & X_2'' \arrow[d, "s \circ t_2'"] \\ X_1'' \arrow[r, "s \circ t_1'"] & X \end{tikzcd}$$

avec $s \circ t'_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, par la proposition 1.2.2, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & X''_2 \arrow[d, "s \circ t'_2"] \\ X''_1 \arrow[r, "s \circ t'_1"] & X \end{tikzcd}$$

avec $h_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Donc, on a $s \circ t'_1 \circ h_1 = s \circ t'_2 \circ h_2$ et par la proposition 1.2.2, il existe $W' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W', W)$, $h' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tels que

$$t'_1 \circ h_1 \circ h' = t'_2 \circ h_2 \circ h'.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} t \circ g'_1 \circ h_1 \circ h' &= f \circ t'_1 \circ h_1 \circ h' \\ &= f \circ t'_2 \circ h_2 \circ h' \\ &= t \circ g'_2 \circ h_2 \circ h', \end{aligned}$$

et par la proposition 1.2.2, il existe $W'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et $h'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W'', W')$, $h'' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ tels que

$$g'_1 \circ h_1 \circ h' \circ h'' = g'_2 \circ h_2 \circ h' \circ h''.$$

On vérifie alors aisément que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X''_1 \arrow[ur, "s \circ t'_1"] \arrow[dr, "g \circ g'_1"'] & W'' \arrow[l, "h_1 \circ h' \circ h''"'] \arrow[r, "h_2 \circ h' \circ h''"] \arrow[u, "s \circ t'_1 \circ h_1 \circ h' \circ h''"] \arrow[d, "g \circ g'_1 \circ h_1 \circ h' \circ h''"] & X''_2 \arrow[ul, "s \circ t'_2"'] \arrow[dl, "g \circ g'_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

est commutatif et comme $s \circ t'_1 \circ h_1 \circ h' \circ h'' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, on en déduit que

$$(X''_1, s \circ t'_1, g \circ g'_1) R (X''_2, s \circ t'_2, g \circ g'_2).$$

$\square$

Définition 1.2.4. Soit $\mathcal{N}$ un système nul de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$. La catégorie $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ appelée la *localisation de $\mathcal{T}$ par $\mathcal{N}$* a pour objets les objets de $\mathcal{T}$, les morphismes d'un objet X dans un objet Y étant les classes d'équivalence des triplets (X', s, f) pour la relation considérée dans le lemme précédent.

Pour composer les morphismes représentés par (X', s, f) et (Y', t, g), on forme le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

avec $t' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ (cf. proposition 1.2.2) et on pose

$$(Y', t, g) \circ (X', s, f) = (X'', s \circ t', g \circ h).$$

Cette définition est licite. En effet, d'une part, supposons qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & X''_1 \arrow[dl, "t'_1"'] \arrow[dr, "h_1"] & & \\
& X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

avec $t'_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Puisque $s \circ t'$ et $s \circ t'_1$ appartiennent a $\mathcal{S}(\mathcal{N})$, on en déduit du lemme précédent que $(X'', s \circ t', g \circ h) R (X''_1, s \circ t'_1, g \circ h_1)$.

D'autre part, supposons que $(X', s, f) R (X'_1, s_1, f_1)$ et démontrons que

$$((Y', t, g) \circ (X'_1, s_1, f_1)) R ((Y', t, g) \circ (X', s, f)).$$

Comme $(X', s, f) R (X'_1, s_1, f_1)$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & W \arrow[u, "u"'] \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u'"] & X'_1 \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[dl, "f_1"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

avec $u \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. De plus, puisque $t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "u'_1"] \arrow[d, "t_1"] & Y' \arrow[d, "t"] \\ W \arrow[r, "u'"] & Y \end{tikzcd}$$

avec $t_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Donc, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & W' \arrow[dl, "v \circ t_1"'] \arrow[dr, "u'_1"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

est commutatif et $s \circ v \circ t_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par le lemme précédent,

$$(W', s \circ v \circ t_1, g \circ u'_1) R((Y', t, g) \circ (X', s, f)).$$

De la même manière, on a

$$(W', s \circ v \circ t_1, g \circ u'_1) R((Y', t, g) \circ (X'_1, s_1, f_1)),$$

et par transitivité, on en déduit que la loi de composition est bien définie.

Remarquons que la loi de composition que l'on vient de définir est associative. En effet, soient $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow Z$, $\gamma : Z \longrightarrow W$ trois morphismes de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$. Supposons que α, β, γ sont respectivement représentés par (X', s, f), (Y', t, g) et (Z', u, h). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & & X''' \arrow[dl, "u''"'] \arrow[dr, "k"] & & & \\ & & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "i"] & & Y'' \arrow[dl, "u'"'] \arrow[dr, "j"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & Z' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y & & Z & & W \end{tikzcd}$$

avec t', u', $u'' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. D'une part,

$$\begin{aligned} (Z', u, h) \circ ((Y', t, g) \circ (X', s, f)) &= (Z', u, h) \circ (X'', s \circ t', g \circ i) \\ &= (X''', s \circ t' \circ u'', h \circ j \circ k) \end{aligned}$$

car $g \circ i \circ u'' = g \circ u' \circ k = u \circ j \circ k$, et d'autre part,

$$\begin{aligned}((Z', u, h) \circ (Y', t, g)) \circ (X', s, f) &= (Y'', t \circ u', h \circ j) \circ (X', s, f) \\ &= (X''', s \circ t' \circ u'', h \circ j \circ k)\end{aligned}$$

car $f \circ t' \circ u'' = t \circ i \circ u'' = t \circ u' \circ k$. On en déduit que la loi de composition est associative.

Enfin, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, $\mathrm{id}_X \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et donc,

$$(X, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(X, X).$$

De plus, si $(X', s, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(X, Y)$, on a

$$(X', s, f) \circ (X, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) = (X', s, f)$$

car le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & & \\ & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & X & & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif et $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. De même, si $(Y', s, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Y, X)$, on a

$$(X, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) \circ (Y', s, f) = (Y', s, f).$$

Définition 1.2.5. On définit le foncteur

$$Q : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$$

par $Q(X) = X$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, et $Q(f) = (X, \mathrm{id}_X, f)$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$.

Il s'agit bien d'un foncteur car

i) pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, $Q(\mathrm{id}_X) = (X, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$,
ii) pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z)$, on a

$$\begin{aligned}Q(g) \circ Q(f) &= (Y, \mathrm{id}_Y, g) \circ (X, \mathrm{id}_X, f) \\ &= (X, \mathrm{id}_X, g \circ f) \\ &= Q(g \circ f)\end{aligned}$$

car le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
 & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.2.6. *Soit $\mathcal{N}$ un système nul de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$.*

i) *Pour tout $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, $Q(s)$ est un isomorphisme.*

ii) *Pour tout $X \in \mathcal{N}$, $Q(X) \simeq 0$.*

iii) *Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $Q(X) \simeq 0$,

b) il existe $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ tel que $X \oplus Y \in \mathcal{N}$,

c) $X \oplus X[1] \in \mathcal{N}$.

Preuve. i) Soit $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. On a

$$Q(s) = (X, \mathrm{id}_X, s),$$

et comme $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, $(X, s, \mathrm{id}_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Y, X)$. D'une part,

$$(X, s, \mathrm{id}_X) \circ (X, \mathrm{id}_X, s) = (X, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$$

car le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & & \\
 & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "s"] & & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \\
X & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

D'autre part,

$$(X, \mathrm{id}_X, s) \circ (X, s, \mathrm{id}_X) = (X, s, s)$$

car le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & & \\
 & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

est commutatif. De plus, puisque le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
X \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s"'] & X \arrow[l, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[u, "s"] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[ul, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

commute, on a

$$(X, s, s)R(Y, \mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y),$$

et $Q(s)$ est un isomorphisme.

ii) Soit $X \in \mathcal{N}$. Puisque

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué, par (TD 3),

$$0 \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0$$

est un triangle distingué et $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par conséquent, $Q(\alpha)$ est un isomorphisme, ce qui suffit.

iii) Si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, $Q(X) \simeq 0$ si et seulement si $\mathrm{id}_{Q(X)} = 0_{Q(X)}$. Ainsi, l'annulation de $Q(X)$ est équivalente à l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "0"'] & X' \arrow[l, "t"'] \arrow[u, "s"'] \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[ul, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

avec $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Dans un tel diagramme, $s = t = t' = f = 0$. Il en résulte que $Q(X) \simeq 0$ si et seulement s'il existe un triangle distingué

$$X' \xrightarrow{0} X \longrightarrow N \longrightarrow X'[1]$$

avec $N \in \mathcal{N}$. Vu la proposition 1.1.10 et le corollaire 1.1.8, dans un tel triangle, $N \simeq X'[1] \oplus X$. Ce qui établit l'équivalence de a) et b).

Comme on dispose aussi du triangle distingué

$$X \xrightarrow{0} X \longrightarrow X[1] \oplus X \longrightarrow X[1],$$

l'axiome de l'octaèdre donne le triangle distingué

$$N \longrightarrow N \longrightarrow X[1] \oplus X \longrightarrow N[1].$$

Il en résulte que $X[1] \oplus X \in \mathcal{N}$. Ainsi, c) est un conséquence de a). Comme b) est clairement une conséquence de c), iii) est démontré. $\square$

Remarque 1.2.7. Si $\alpha : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ représenté par (X', s, f), alors

$$\alpha = Q(f) \circ Q(s)^{-1}.$$

En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \arrow[dl, "\mathrm{id}_{X'}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{X'}"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{X'}"] & & X' \arrow[dl, "\mathrm{id}_{X'}"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & X' & & Y
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 1.2.8. *Soit $\mathcal{N}$ un système nul de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$.*

i) *$\mathcal{T}/\mathcal{N}$ est une catégorie triangulée en considérant comme triangles distingués ceux isomorphes à l'image par Q d'un triangle distingué dans $\mathcal{T}$.*

ii) *Si $\mathcal{T}'$ est une catégorie triangulée et si $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ est un foncteur de catégories triangulées tel que $F(X) \simeq 0$ pour tout $X \in \mathcal{N}$, alors il existe un foncteur unique $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T}'$ tel que $G \circ Q = F$. Schématiquement,*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{T}/\mathcal{N} \arrow[dl, "G"] \\
\mathcal{T}' &
\end{tikzcd}$$

Preuve. i) Vérifions que $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ satisfait aux axiomes d'une catégorie triangulée. Pour (TD 0), (TD 1) et (TD 3), cela découle immédiatement de ce que la catégorie $\mathcal{T}$ est triangulée.

(TD 2) Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(X, Y)$. On peut supposer que f est représenté par

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

avec $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par (TD 2) appliqué à la catégorie $\mathcal{T}$, il existe un triangle distingué

$$X' \xrightarrow{a} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X'[1]$$

et donc,

$$X' \xrightarrow{Q(a)} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X'[1]$$

est un triangle distingué dans $\mathcal{T}/\mathcal{N}$. Comme $Q(s)$ est un isomorphisme et que $f \circ Q(s) = Q(a)$, on a l'isomorphisme de triangles de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "Q(a)"] \arrow[d, "Q(s)"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & X'[1] \arrow[d, "Q(s)[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

et

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$.

(TD 4) On peut supposer que les triangles de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ que l'on doit considérer sont l'image par Q des deux triangles distingués de $\mathcal{T}$ suivants.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1]$$

Soient $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(X, X')$ et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Y, Y')$ des morphismes tels que $Q(f') \circ u = v \circ Q(f)$. On a donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "Q(f')"] & Y' \arrow[r, "Q(g')"] & Z' \arrow[r, "Q(h')"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Supposons que u et v sont représentés respectivement par

$$\begin{tikzcd}
& X'' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & X' & Y & & Y'
\end{tikzcd}$$

avec s, $t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, et que $Q(f') \circ u$ et $v \circ Q(f)$ sont donnés respectivement par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "a'"] & & \\
& X'' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & X' \arrow[dl, "\mathrm{id}_{X'}"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
X & & X' & & Y'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & W' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "b'"] & & \\
& X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & Y & & Y'
\end{tikzcd}$$

avec s', $t' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Comme $Q(f') \circ u = v \circ Q(f)$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
W \arrow[ur, "s \circ s'"] \arrow[dr, "f' \circ a'"'] & W'' \arrow[l, "w"'] \arrow[r, "w'"] \arrow[u, "w''"'] \arrow[d] & W' \arrow[ul, "t'"'] \arrow[dl, "b \circ b'"] \\
& Y' &
\end{tikzcd}$$

avec $w'' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par (TD 2), il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$W'' \xrightarrow{b' \circ w'} Y'' \longrightarrow Z'' \longrightarrow W''[1].$$

Considérons alors le schéma suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \\
W'' \arrow[u, "w''"'] \arrow[r, "b' \circ w'"] \arrow[d, "a' \circ w"'] & Y'' \arrow[u, "t"'] \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Z'' \arrow[r] & W''[1] \arrow[u, "w''[1]"'] \arrow[d, "a' \circ w[1]"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que

$$f \circ w'' = t \circ b' \circ w', f' \circ a' \circ w = b \circ b' \circ w',$$

et par (TD 4), il existe $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z'', Z)$ et $k' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z'', Z')$ tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \\
W'' \arrow[u, "w''"'] \arrow[r, "b' \circ w'"] \arrow[d, "a' \circ w"'] & Y'' \arrow[u, "t"'] \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Z'' \arrow[u, "k"'] \arrow[r] \arrow[d, "k'"'] & W''[1] \arrow[u, "w''[1]"'] \arrow[d, "a' \circ w[1]"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur Q, on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont des triangles distingués dans $\mathcal{T}/\mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(f)"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] & X[1] \\
W'' \arrow[u, "Q(w'')"'] \arrow[r, "Q(b' \circ w')"] \arrow[d, "Q(a' \circ w)"'] & Y'' \arrow[u, "Q(t)"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(b)"'] & Z'' \arrow[u, "Q(k)"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(k')"'] & W''[1] \arrow[u, "Q(w''[1])"'] \arrow[d, "Q(a' \circ w[1])"'] \\
X' \arrow[r, "Q(f')"] & Y' \arrow[r, "Q(g')"] & Z' \arrow[r, "Q(h')"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Comme $Q(w'')$ et $Q(t)$ sont des isomorphismes, par le corollaire 1.1.8, $Q(k)$ est un isomorphisme et on a donc le morphisme de triangles distingués suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "Q(a' \circ w) \circ Q(w'')^{-1}"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(b) \circ Q(t)^{-1}"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(k') \circ Q(k)^{-1}"] & X[1] \arrow[d, "Q(a' \circ w[1]) \circ Q(w'')^{-1}[1]"] \\
X' \arrow[r, "Q(f')"] & Y' \arrow[r, "Q(g')"] & Z' \arrow[r, "Q(h')"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Or, $Q(a' \circ w) \circ Q(w'')^{-1} = u$. En effet, $Q(a' \circ w) \circ Q(w'')^{-1}$ est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & W'' \arrow[dl, "\mathrm{id}_{W''}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{W''}"] & & \\
& W'' \arrow[dl, "w''"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{W''}"] & & W'' \arrow[dl, "\mathrm{id}_{W''}"] \arrow[dr, "a' \circ w"] & \\
X & & W'' & & X'
\end{tikzcd}$$

et $(W'', w'', a' \circ w) R (X'', s, a)$ car le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
W'' \arrow[ur, "w''"] \arrow[dr, "a' \circ w"'] & W'' \arrow[l, "\mathrm{id}_{W''}"'] \arrow[r, "s' \circ w"] \arrow[u, "w''"'] \arrow[d, "a' \circ w"] & X'' \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl, "a"] \\
& X' &
\end{tikzcd}$$

est commutatif et $w'' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. De la même manière, $Q(b) \circ Q(t')^{-1} = v$ et l'axiome (TD 4) est donc vérifié.

(TD 5) De la même manière que pour (TD 4), en utilisant l'axiome de l'octaèdre pour la catégorie $\mathcal{T}$, on obtient l'axiome de l'octaèdre pour la catégorie $\mathcal{T}/\mathcal{N}$.

ii) Etablissons tout d'abord que pour tout $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, $F(s)$ est un isomorphisme. Si $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, il existe un triangle distingué

$$X \xrightarrow{s} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

avec $Z \in \mathcal{N}$. Comme F est un foncteur de catégories triangulées et que $F(Z) \simeq 0$, on a le triangle distingué

$$F(X) \xrightarrow{F(s)} F(Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow F(X)[1]$$

et par le corollaire 1.1.9, $F(s)$ est un isomorphisme.

Démontrons à présent l'unicité du foncteur G. Soit $\alpha : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ représenté par (X', s, f). On sait que $\alpha = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= G(Q(f) \circ Q(s)^{-1}) \\ &= G \circ Q(f) \circ G \circ Q(s)^{-1} \\ &= F(f) \circ (G \circ Q(s))^{-1} \\ &= F(f) \circ F(s)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui assure l'unicité de G.

On définit le foncteur

$$G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T}'$$

par $G(X) = F(X)$ pour tout $X \in \mathcal{T}/\mathcal{N}$ et

$$G(\alpha) = F(f) \circ F(s)^{-1}$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(X, Y)$ représenté par (X', s, f). Cette définition est licite. En effet, supposons que $(X'', s', f')R(X', s, f)$. Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & X''' \arrow[u, "u"] \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u'"] & X'' \arrow[ul, "s'"'] \arrow[dl, "f'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

avec $u \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Comme $F(s) \circ F(v) = F(u)$, $F(v)$ est inversible. D'une part, on a

$$\begin{aligned} F(u') \circ F(u)^{-1} &= F(f \circ v) \circ (F(s \circ v))^{-1} \\ &= F(f) \circ F(v) \circ F(v)^{-1} \circ F(s)^{-1} \\ &= F(f) \circ F(s)^{-1}, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} F(u') \circ F(u)^{-1} &= F(f' \circ v') \circ (F(s' \circ v'))^{-1} \\ &= F(f') \circ F(s')^{-1}, \end{aligned}$$

et donc, G est bien défini.

Démontrons que G est un foncteur.

Soient $\alpha : X \longrightarrow Y$ et $\beta : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ représentés respectivement par (X', s, f) et (Y', t, g). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

où $t' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par définition, $\beta \circ \alpha$ est représenté par $(X'', s \circ t', g \circ h)$. Comme $f \circ t' = t \circ h$, on a $F(f) \circ F(t') = F(t) \circ F(h)$ et par conséquent,

$$F(t)^{-1} \circ F(f) = F(h) \circ F(t')^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} G(\beta \circ \alpha) &= F(g \circ h) \circ (F(s \circ t'))^{-1} \\ &= F(g) \circ F(h) \circ F(t')^{-1} \circ F(s)^{-1} \\ &= F(g) \circ F(t)^{-1} \circ F(f) \circ F(s)^{-1} \\ &= G(\beta) \circ G(\alpha). \end{aligned}$$

De plus, comme $\mathrm{id}_{Q(X)}$ est représenté par $(X, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$, il est clair que $G(\mathrm{id}_{Q(X)}) = \mathrm{id}_{G(Q(X))}$.

Enfin, par définition du foncteur G, on a $G \circ Q = F$, d'où la conclusion. □

Proposition 1.2.9. *Soient $\mathcal{N}$ un système nul de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ telle que tout triangle distingué dans $\mathcal{T}$*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

avec X, $Y \in Ob(\mathcal{T}')$ est un triangle distingué dans $\mathcal{T}'$. Alors, $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$ est un système nul de $\mathcal{T}'$.

De plus, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, avec $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$, $Y \in \mathcal{N}$ se factorise par un élément de $\mathcal{N}'$,

ii) pour tout $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$, il existe $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X)$, $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$ tel que $s \circ w \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$.

Sous ces conditions, $\mathcal{T}'/\mathcal{N}'$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}/\mathcal{N}$.

Preuve. On vérifie immédiatement que $\mathcal{N}'$ est un système nul de $\mathcal{T}'$.

i) $\Rightarrow$ ii) Soient $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$. Il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

avec $Z \in \mathcal{N}$. Par hypothèse, il existe $Z' \in \mathcal{N}'$ et des morphismes $g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,Z')$ et $g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z',Z)$ tels que $g = g_2 \circ g_1$. De plus, par (TD 2), on obtient les triangles distingués dans $\mathcal{T}$

$$(*) \qquad Y \xrightarrow{g_1} Z' \xrightarrow{h_1} Y'' \xrightarrow{f_1} Y[1]$$

$$Z' \xrightarrow{g_2} Z \xrightarrow{h_2} Z'' \xrightarrow{f_2} Z'[1]$$

et comme par (TD 3), on a le triangle distingué

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-s[1]} Y[1],$$

on peut appliquer l'axiome de l'octaèdre et on a le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z' \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "g_2"] & Y'' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g_1"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & X[1] \arrow[r, "-s[1]"] \arrow[d] & Y[1] \arrow[d, "g_1[1]"] \\
Z' \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & Z'' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Z''}"] & Z'[1] \arrow[d] \\
Y'' \arrow[r, "\alpha"] & X[1] \arrow[r] & Z'' \arrow[r] & Y''[1]
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, $f_1 = -s[1] \circ \alpha$ et donc,

$$-f_1[-1] = s \circ \alpha[-1].$$

Or, par (TD 3), on a le triangle distingué

$$Y''[-1] \xrightarrow{-f_1[-1]} Y \xrightarrow{g_1} Z' \xrightarrow{h_1} Y''$$

et comme $Z' \in \mathcal{N}'$, $-f_1[-1] \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. De plus, vu $(*)$, puisque Y et $Z' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$, $Y'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$. Il s'ensuit que $W = Y''[-1]$ et $w = \alpha[-1]$ conviennent.

ii) $\Rightarrow$ i) se démontre de manière analogue.

Pour conclure, il suffit de démontrer que le foncteur

$$I : \mathcal{T}'/\mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$$

défini par $I(X) = X$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}'/\mathcal{N}')$ et $I(X', s, f) = (X', s, f)$ pour tout $(X', s, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'/\mathcal{N}'}(X, Y)$, est pleinement fidèle, i.e. l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'/\mathcal{N}'}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(I(X), I(Y))$$

est bijective.

Supposons d'une part que

$$I(X', s, f) R_{\mathcal{N}} I(X'', s', f'),$$

donc, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & W \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "u'"] & X'' \arrow[ul, "s'"'] \arrow[dl, "f'"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

avec $u \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par ii), il existe $W' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$ et $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W', W)$ tels que $u \circ w \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. On en déduit que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & W' \arrow[l, "v \circ w"'] \arrow[r, "v' \circ w"] \arrow[u, "u \circ w"] \arrow[d, "u' \circ w"] & X'' \arrow[ul, "s'"'] \arrow[dl, "f'"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. De plus, comme $u \circ w \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$W' \xrightarrow{u \circ w} X \longrightarrow W'' \longrightarrow W'[1]$$

avec $W'' \in \mathcal{N}$. Or, comme W' et $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$, $W'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$. Par conséquent, $u \circ w \in \mathcal{S}(\mathcal{N}')$ et

$$(X', s, f) R_{\mathcal{N}'} (X'', s', f').$$

D'autre part, considérons $(X', s, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(I(X), I(Y))$. Vu ii), il existe $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$ et $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X')$ tel que $s \circ w \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Comme le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & W \arrow[u, "s \circ w"] \arrow[l, "w"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "f \circ w"] & W \arrow[ul, "s \circ w"'] \arrow[dl, "f \circ w"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, on a

$$I(W, s \circ w, f \circ w) R_{\mathcal{N}}(X', s, f),$$

ce qui suffit. □

1.3. t-structures

Dans cette section, $\mathcal{T}$ désigne une catégorie triangulée.

Définition 1.3.1. Soient $\mathcal{T}^{\leq 0}$ et $\mathcal{T}^{\geq 0}$ deux sous-catégories strictement pleines de $\mathcal{T}$. Posons

$$\mathcal{T}^{\leq n} := \mathcal{T}^{\leq 0}[-n], \mathcal{T}^{\geq n} := \mathcal{T}^{\geq 0}[-n].$$

Le couple $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$ est une *t-structure sur* $\mathcal{T}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\mathcal{T}^{\leq -1} \subset \mathcal{T}^{\leq 0}$ et $\mathcal{T}^{\geq 1} \subset \mathcal{T}^{\geq 0}$,

ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) = 0$ pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$,

iii) pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, il existe un triangle distingué

$$X_0 \longrightarrow X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0[1]$$

tel que $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$.

Dans le reste de la section, $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$ est une t-structure sur $\mathcal{T}$.

Théorème 1.3.2. i) *Il existe un foncteur*

$$\tau^{\leq n} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\leq n}$$

et pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq n})$, *pour tout* $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ *un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n}}(X, \tau^{\leq n}(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$$

fonctoriel en X *et* Y.

ii) *Il existe un foncteur*

$$\tau^{\geq n} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\geq n}$$

et pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$*, pour tout* $Y \in Ob(\mathcal{T}^{\geq n})$ *un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq n}}(\tau^{\geq n}(X), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$$

fonctoriel en X *et* Y*.*

Les foncteurs $\tau^{\leq n}$ et $\tau^{\geq n}$ sont les *foncteurs de troncature* associés à la t-structure $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$.

Preuve. On peut supposer que $n = 0$.

i) Soit $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Il existe un triangle distingué

$$Y_0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_0[1]$$

tel que $Y_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $Y_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$. Démontrons que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, Y_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$$

est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$. Comme $\mathrm{Hom}\,(X, .)$ est un foncteur cohomologique, on a la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_1[-1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_1).$$

Puisque $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et Y_1, $Y_1[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_1[-1]) = 0, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_1) = 0,$$

et par conséquent,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$$

pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$. De plus, comme $\mathcal{T}^{\leq 0}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, Y_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$.

On définit le foncteur $\tau^{\leq 0} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\leq 0}$ par $\tau^{\leq 0}(Y) = Y_0$ pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ (Y_0 est défini par le triangle distingué ci-dessus).

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Y')$. Il existe deux triangles distingués

$$Y_0 \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_0[1]$$

$$Y_0' \xrightarrow{\alpha'} Y' \longrightarrow Y_1' \longrightarrow Y_0'[1]$$

avec Y_0, $Y_0' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$. Or, on a le schéma suivant,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(Y_0, Y_0) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(Y_0, \alpha)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_0, Y) \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Hom}\,(Y_0, f)} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(Y_0, Y_0') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(Y_0, \alpha')} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_0, Y')
\end{array}$$

et on définit

$$\tau^{\leq 0}(f) = \mathrm{Hom}\,(Y_0, \alpha')^{-1} \circ \mathrm{Hom}\,(Y_0, f) \circ \mathrm{Hom}\,(Y_0, \alpha)(\mathrm{id}_{Y_0}).$$

On peut vérifier que $\tau^{\leq 0} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\leq 0}$ est un foncteur.

Il nous reste à démontrer que l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, \tau^{\leq 0}(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$$

est fonctoriel en X et en Y. D'une part, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, X')$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, \tau^{\leq 0}(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(X,\alpha)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(f, \tau^{\leq 0}(Y))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(f, Y)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X', \tau^{\leq 0}(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(X',\alpha)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', Y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif et l'isomorphisme est fonctoriel en X.

D'autre part, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Y')$, par construction de $\tau^{\leq 0}(f)$, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(\tau^{\leq 0}(Y), \tau^{\leq 0}(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(\tau^{\leq 0}(Y),\alpha)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(\tau^{\leq 0}(Y), \tau^{\leq 0}(f))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq 0}(Y), Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(\tau^{\leq 0}(Y), f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(\tau^{\leq 0}(Y), \tau^{\leq 0}(Y')) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(\tau^{\leq 0}(Y),\alpha')"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq 0}(Y), Y')
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}\,(X, .)$, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, \tau^{\leq 0}(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(X,\alpha)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(X, \tau^{\leq 0}(f))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(X, f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(X, \tau^{\leq 0}(Y')) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(X,\alpha')"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y')
\end{tikzcd}$$

et l'isomorphisme est fonctoriel en Y.

ii) Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Il existe un triangle distingué

$$X_0 \longrightarrow X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0[1]$$

avec $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$. Dans ce cas, on définit $\tau^{\geq 1}(X) = X_1$ et la preuve est analogue à celle de i). □

Remarque 1.3.3. Appliquons la remarque 0.3.4 en prenant $\mathcal{A} = \mathcal{T}^{\leq n}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{T}$, le foncteur F étant l'inclusion $I : \mathcal{T}^{\leq n} \longrightarrow \mathcal{T}$ et le foncteur G étant le foncteur de troncature $\tau^{\leq n} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\leq n}$. A l'isomorphisme fonctoriel

$$A^{\leq n}(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n}}(X, \tau^{\leq n}(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y),$$

on associe le morphisme de foncteurs

$$T^{\leq n}(.) : \tau^{\leq n}(.) \longrightarrow \mathrm{id}(.)$$

caractérisé par

$$A^{\leq n}(X,Y)(f) = T^{\leq n}(Y) \circ f$$

pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n}}(X, \tau^{\leq n}(Y))$.

De même, à l'isomorphisme fonctoriel

$$A^{\geq n}(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq n}}(\tau^{\geq n}(X), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y),$$

on associe le morphisme de foncteurs

$$T^{\geq n}(.) : \mathrm{id}(.) \longrightarrow \tau^{\geq n}(.)$$

caractérisé par

$$A^{\geq n}(X,Y)(f) = f \circ T^{\geq n}(X)$$

pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq n}}(\tau^{\geq n}(X), Y)$.

Lemme 1.3.4. *Considérons deux triangles distingués de $\mathcal{T}$*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h_i} X[1] \qquad (i = 1, 2).$$

Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[1], Z) = 0$, alors $h_1 = h_2$.

Preuve. Par (TD 4), on a le morphisme de triangles distingués suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h_1} & X[1] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{X[1]}} \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h_2} & X[1]
\end{array}$$

Il s'ensuit que $u \circ g = g$, $h_1 = h_2 \circ u$ et donc,

$$(\mathrm{id}_Z - u) \circ g = 0.$$

Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(., Z)$ est un foncteur cohomologique, on a la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[1], Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(h_1, Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(g, Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(f, Z)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Z).$$

Par conséquent, il existe $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[1], Z)$ tel que

$$\psi \circ h_1 = \mathrm{id}_Z - u,$$

et comme notre hypothèse entraîne que $\psi = 0$, on en déduit que $u = \mathrm{id}_Z$ et $h_1 = h_2$. $\square$

Proposition 1.3.5. *Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, il existe un morphisme unique*

$$h(X) : \tau^{\geq n+1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq n}(X)[1]$$

tel que

$$\tau^{\leq n}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{h(X)} \tau^{\leq n}(X)[1]$$

est un triangle distingué.

De plus, $h(X)$ est fonctoriel en X et induit le morphisme de foncteurs

$$h : \tau^{\geq n+1} \longrightarrow [1] \circ \tau^{\leq n}.$$

Preuve. On peut supposer que $n = 0$.

Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Par définition d'une t-structure et par le théorème 1.3.2, il existe un triangle distingué

$$\tau^{\leq 0}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq 1}(X) \xrightarrow{h(X)} \tau^{\leq 0}(X)[1].$$

L'unicité de $h(X)$ résulte du lemme précédent. En effet, comme $\tau^{\leq 0}(X)[1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $\tau^{\geq 1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq 0}(X)[1], \tau^{\geq 1}(X)) = 0.$$

Finalement, démontrons que $h(X)$ est fonctoriel en X. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$. En reprenant les notations de la remarque 1.3.3, on a deux triangles distingués dans $\mathcal{T}$,

$$\tau^{\leq 0}(X) \xrightarrow{T^{\leq 0}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq 1}(X)} \tau^{\geq 1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq 0}(X)[1]$$

$$\tau^{\leq 0}(Y) \xrightarrow{T^{\leq 0}(Y)} Y \xrightarrow{T^{\geq 1}(Y)} \tau^{\geq 1}(Y) \longrightarrow \tau^{\leq 0}(Y)[1],$$

et comme $T^{\leq 0} : \tau^{\leq 0}(.) \longrightarrow \mathrm{id}(.)$ est un morphisme de foncteurs, le carré

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq 0}(X) \arrow[r, "T^{\leq 0}(X)"] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\tau^{\leq 0}(Y) \arrow[r, "T^{\leq 0}(Y)"] & Y
\end{tikzcd}$$

commute et par (TD 4), on a le morphisme de triangles distingués suivant.

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq 0}(X) \arrow[r, "T^{\leq 0}(X)"] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)"'] & X \arrow[r, "T^{\geq 1}(X)"] \arrow[d, "f"] & \tau^{\geq 1}(X) \arrow[r, "h(X)"] \arrow[d, "u"] & \tau^{\leq 0}(X)[1] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)[1]"] \\
\tau^{\leq 0}(Y) \arrow[r, "T^{\leq 0}(Y)"] & Y \arrow[r, "T^{\geq 1}(Y)"] & \tau^{\geq 1}(Y) \arrow[r, "h(Y)"] & \tau^{\leq 0}(Y)[1]
\end{tikzcd}$$

De même, comme $T^{\geq 1} : \mathrm{id}(.) \longrightarrow \tau^{\geq 1}(.)$ est un morphisme de foncteurs, le carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T^{\geq 1}(X)"] \arrow[d, "f"'] & \tau^{\geq 1}(X) \arrow[d, "\tau^{\geq 1}(f)"] \\ Y \arrow[r, "T^{\geq 1}(Y)"] & \tau^{\geq 1}(Y) \end{tikzcd}$$

commute. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} A^{\geq 1}(X, \tau^{\geq 1}(Y))(u) &= u \circ T^{\geq 1}(X) \\ &= T^{\geq 1}(Y) \circ f \\ &= \tau^{\geq 1}(f) \circ T^{\geq 1}(X) \\ &= A^{\geq 1}(X, \tau^{\geq 1}(Y))(\tau^{\geq 1}(f)), \end{aligned}$$

et puisque $A^{\geq 1}(X, \tau^{\geq 1}(Y))$ est un isomorphisme, $u = \tau^{\geq 1}(f)$. Il s'ensuit que le carré

$$\begin{tikzcd} \tau^{\geq 1}(X) \arrow[r, "h(X)"] \arrow[d, "\tau^{\geq 1}(f)"'] & \tau^{\leq 0}(X)[1] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)[1]"] \\ \tau^{\geq 1}(Y) \arrow[r, "h(Y)"] & \tau^{\leq 0}(Y)[1] \end{tikzcd}$$

commute, ce qui suffit. □

Remarque 1.3.6. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, on a

i) $\tau^{\leq n}(X[m]) \simeq \tau^{\leq n+m}(X)[m]$,

ii) $\tau^{\geq n}(X[m]) \simeq \tau^{\geq n+m}(X)[m]$.

Pour établir i), il suffit de montrer que

$$\tau^{\leq n}(X[m])[-m] \simeq \tau^{\leq n+m}(X).$$

Pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq n+m})$, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n+m}}(Y, \tau^{\leq n+m}(X)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y[m], X[m]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n}}(Y[m], \tau^{\leq n}(X[m])) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n+m}}(Y, \tau^{\leq n}(X[m])[-m]), \end{aligned}$$

et donc, $\tau^{\leq n}(X[m])[-m] \simeq \tau^{\leq n+m}(X)$. On obtient ii) de manière analogue.

Proposition 1.3.7. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq n})$,

ii) $\tau^{\leq n}(X) \simeq X$,

iii) $\tau^{\geq n+1}(X) \simeq 0$.

On a un résultat analogue en échangeant $\leq$ et $\geq$.

Preuve. i) $\Leftrightarrow$ ii) Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq n})$, en reprenant les notations de la remarque 1.3.3, on a les isomorphismes

$$A^{\leq n}(\tau^{\leq n}(X), X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n}}(\tau^{\leq n}(X), \tau^{\leq n}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq n}(X), X)$$
$$A^{\leq n}(X, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq n}}(X, \tau^{\leq n}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X).$$

On vérifie alors facilement que

$$A^{\leq n}(\tau^{\leq n}(X), X)(\mathrm{id}_{\tau^{\leq n}(X)}) : \tau^{\leq n}(X) \longrightarrow X$$

et

$$(A^{\leq n}(X, X))^{-1}(\mathrm{id}_X) : X \longrightarrow \tau^{\leq n}(X)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. La réciproque est immédiate.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. Comme on a le triangle distingué

$$\tau^{\leq n}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq n+1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq n}(X)[1],$$

cela résulte du corollaire 1.1.9. $\square$

Proposition 1.3.8. *Soit*

$$X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow X'[1]$$

un triangle distingué dans $\mathcal{T}$. Si X' et $X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ (resp. $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$) alors $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ (resp. $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$).

Preuve. Comme $\mathrm{Hom}\,(\tau^{\leq -1}(X), .)$ est un foncteur cohomologique, on a la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X''),$$

et puisque $\tau^{\leq -1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq -1})$ et X', $X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X') \simeq 0, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X'') \simeq 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X) \simeq 0.$$

Or,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq -1}}(\tau^{\leq -1}(X), \tau^{\leq -1}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq -1}(X), X) \simeq 0,$$

et $\tau^{\leq -1}(X) \simeq 0$. La conclusion résulte alors de la proposition précédente. $\square$

Proposition 1.3.9. *Soient a, $b \in \mathbb{Z}$.*

i) *Si $a \leq b$, alors*

$$\tau^{\geq b} \circ \tau^{\geq a} \simeq \tau^{\geq a} \circ \tau^{\geq b} \simeq \tau^{\geq b}$$

et

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\leq a} \simeq \tau^{\leq a} \circ \tau^{\leq b} \simeq \tau^{\leq a}.$$

ii) *Si $a > b$, alors*

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a} \simeq \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} \simeq 0.$$

iii) *Il existe un unique morphisme*

$$\varphi : \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} \longrightarrow \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}$$

tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq b}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & \tau^{\geq a}(X) \\
\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De plus, φ est un isomorphisme.

Preuve. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$.

i) Comme $\tau^{\geq b}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq b}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a})$, par la proposition 1.3.7, on a

$$\tau^{\geq a} \circ \tau^{\geq b}(X) \simeq \tau^{\geq b}(X).$$

De plus, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq b})$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq b}}(\tau^{\geq b} \circ \tau^{\geq a}(X), Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\geq a}(X), Y) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq a}}(\tau^{\geq a}(X), Y) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq b}}(\tau^{\geq b}(X), Y),
\end{aligned}$$

et donc,

$$\tau^{\geq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \simeq \tau^{\geq b}(X).$$

ii) Puisque $a > b$, $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq b+1})$ et pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$,

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \simeq 0.$$

De la même manière, $\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} \simeq 0$.

iii) Vu ii), on peut supposer $b \geq a$. En reprenant les notations de la remarque 1.3.3, il existe deux triangles distingués

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \xrightarrow{T^{\leq b}(\tau^{\geq a}(X))} \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq b+1} \circ \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)[1]$$

$$\tau^{\leq a-1} \circ \tau^{\leq b}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b}(X) \xrightarrow{T^{\geq a}(\tau^{\leq b}(X))} \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \longrightarrow \tau^{\leq a-1} \circ \tau^{\leq b}(X)[1],$$

et vu i), $\tau^{\geq b+1} \circ \tau^{\geq a}(X) \simeq \tau^{\geq b+1}(X)$ et $\tau^{\leq a-1} \circ \tau^{\leq b}(X) \simeq \tau^{\leq a-1}(X)$. On a donc les deux triangles distingués

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \xrightarrow{T^{\leq b}(\tau^{\geq a}(X))} \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq b+1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)[1]$$

$$\tau^{\leq a-1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b}(X) \xrightarrow{T^{\geq a}(\tau^{\leq b}(X))} \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \longrightarrow \tau^{\leq a-1}(X)[1].$$

Or, $\tau^{\geq a}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a})$ et comme $b \geq a$, $\tau^{\geq b+1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a})$. Donc, par la proposition précédente,

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a} \cap \mathcal{T}^{\leq b}).$$

De même, $\tau^{\leq b}(X)$ et $\tau^{\leq a-1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq b})$ et donc,

$$\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a} \cap \mathcal{T}^{\leq b}).$$

De plus, on a les triangles distingués suivants.

$$\tau^{\leq b}(X) \xrightarrow{T^{\leq b}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq b+1}(X)} \tau^{\geq b+1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b}(X)[1]$$
$$\tau^{\leq a-1}(X) \xrightarrow{T^{\leq a-1}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq a}(X)} \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\leq a-1}(X)[1]$$

Puisque on a l'isomorphisme fonctoriel

$$A^{\leq b}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\geq a}(X)) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq b}}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\geq a}(X))$$

et que $T^{\geq a}(X) \circ T^{\leq b}(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\geq a}(X))$, il existe un morphisme unique $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq b}}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X))$ tel que

$$\begin{aligned} A^{\leq b}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\geq a}(X))(\psi) &= T^{\leq b}(\tau^{\geq a}(X)) \circ \psi \\ &= T^{\geq a}(X) \circ T^{\leq b}(X), \end{aligned}$$

i.e., le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \tau^{\leq b}(X) \arrow[r, "T^{\leq b}(X)"] \arrow[drr, "\psi"] & X \arrow[r, "T^{\geq a}(X)"] & \tau^{\geq a}(X) \\ & & \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \arrow[u, "T^{\leq b}(\tau^{\geq a}(X))"'] \end{tikzcd}$$

commute. De même, puisque on a l'isomorphisme fonctoriel

$$A^{\geq a}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq a}}(\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)),$$

et que $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq b}}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X))$, il existe un morphisme unique $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq a}}(\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X))$ tel que

$$\begin{aligned} A^{\geq a}(\tau^{\leq b}(X), \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X))(\varphi) &= \varphi \circ T^{\geq a}(\tau^{\leq b}(X)) \\ &= \psi, \end{aligned}$$

et donc, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \tau^{\leq b}(X) \arrow[r, "T^{\leq b}(X)"] \arrow[d, "T^{\geq a}(\tau^{\leq b}(X))"'] & X \arrow[r, "T^{\geq a}(X)"] & \tau^{\geq a}(X) \\ \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \arrow[u, "T^{\leq b}(\tau^{\geq a}(X))"'] \end{tikzcd}$$

commute.

Il nous reste à établir que φ est un isomorphisme. Comme on a les triangles distingués

$$\tau^{\leq a-1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \longrightarrow \tau^{\leq a-1}(X)[1]$$

$$\tau^{\leq b}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq b+1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b}(X)[1]$$
$$\tau^{\leq a-1}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\leq a-1}(X)[1],$$

par l'axiome de l'octaèdre, on a le triangle distingué

$$\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq b+1}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X)[1].$$

Or, on a le triangle distingué

$$\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq b+1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)[1],$$

et donc, par (TD 4) et le corollaire 1.1.8, on a l'isomorphisme de triangles distingués suivants.

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & \tau^{\geq a}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \tau^{\geq b+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X)[1] \arrow[d, "\varphi'[1]"'] \\
\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \arrow[r] & \tau^{\geq a}(X) \arrow[r] & \tau^{\geq b+1}(X) \arrow[r] & \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

Finalement, $\varphi = \varphi'$. En effet, comme $T^{\geq a}(.) : \mathrm{id}(.) \longrightarrow \tau^{\geq a}(.)$ est un morphisme de foncteurs, le carré

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq b}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \arrow[r] & \tau^{\geq a}(X)
\end{tikzcd}$$

commute, d'où l'on tire que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq b}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & \tau^{\geq a}(X) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}(X) \arrow[r] & \tau^{\geq a}(X)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. La conclusion s'ensuit aussitôt. □

Définition 1.3.10. Le *cœur d'une t-structure* $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$, noté $\mathcal{C}$, est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ définie par

$$\mathcal{C} = \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 0}.$$

Proposition 1.3.11. *Si*

$$X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow X'[1]$$

est un triangle distingué dans $\mathcal{T}$, et si X', $X'' \in \mathcal{C}$ alors $X \in \mathcal{C}$.

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.3.8. □

Définition 1.3.12. On définit le foncteur $H^0 : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}$ par

$$H^0(X) = \tau^{\leq 0} \circ \tau^{\geq 0}(X) \simeq \tau^{\geq 0} \circ \tau^{\leq 0}(X).$$

On pose

$$H^n(X) = H^0(X[n]) \simeq (\tau^{\geq n} \circ \tau^{\leq n}(X))[n].$$

Proposition 1.3.13. *Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. S'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a})$ (resp. $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq a})$) alors $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ (resp. $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$) si et seulement si $H^n(X) = 0$ pour $n < 0$ (resp. $n > 0$).*

Preuve. La condition est nécessaire. En effet, comme $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$, $\tau^{\leq -1}(X) = 0$ et on a donc

$$H^{-1}(X) = (\tau^{\geq -1} \circ \tau^{\leq -1}(X))[-1] = 0.$$

Comme $\mathcal{T}^{\geq 0} \subset \mathcal{T}^{\geq n}$ pour tout $n < 0$, on en déduit que $H^n(X) = 0$ pour $n < 0$.

La condition est suffisante. Si $a \geq 0$, le résultat est trivial.

Supposons $a < 0$. Par hypothèse, $H^a(X) = 0$. On a le triangle distingué

$$\tau^{\leq a} \circ \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a+1}(X) \circ \tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\leq a} \circ \tau^{\geq a}(X)[1],$$

et comme $\tau^{\leq a} \circ \tau^{\geq a}(X) = H^a(X)[-a] = 0$, et $\tau^{\geq a+1}(X) \circ \tau^{\geq a}(X) \simeq \tau^{\geq a+1}(X)$, on a par (TD 3), le triangle distingué suivant.

$$\tau^{\geq a}(X) \longrightarrow \tau^{\geq a+1}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \tau^{\geq a}(X)[1]$$

Or, $\tau^{\geq a}(X) \simeq X$ car $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a})$. On a alors le morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\geq a}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \tau^{\geq a+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \tau^{\geq a}(X)[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

et par le corollaire 1.1.8, $X \simeq \tau^{\geq a+1}(X)$. Par conséquent, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq a+1})$ et en raisonnant de proche en proche (pour la dernière étape $a = -1$), on obtient $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$. □

Lemme 1.3.14. *Si $\mathcal{C}$ est le cœur de la t-structure $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$ et si on a le triangle distingué*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

avec X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ alors

i) $H^0(Z) \simeq \mathrm{coker}(f)$,

ii) $H^0(Z[-1]) \simeq \ker(f)$.

Preuve. Comme $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $X[1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$, par la proposition 1.3.8, $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$. De même, comme $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq -1})$ et $X[1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq -1})$, on a $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq -1})$. Puisque $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$, par la proposition 1.3.7, $\tau^{\leq 0}(Z) \simeq Z$ et donc,

$$H^0(Z) \simeq \tau^{\geq 0}(Z).$$

De même, comme $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq -1})$, on a $Z[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ et donc

$$H^0(Z[-1]) \simeq \tau^{\leq 0}(Z[-1]).$$

Pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}\,(W, .)$ et $\mathrm{Hom}\,(., W)$ étant des foncteurs cohomologiques, on a les deux suites exactes suivantes.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[1], W) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(h,W)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(g,W)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, W) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(f,W)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y[-1]) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,-g[-1])} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z[-1]) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,-h[-1])} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$$

D'une part, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[1], W) = 0$ car $X[1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq -1})$ et $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$; d'autre part, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y[-1]) = 0$ car $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $Y[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$. De plus, en reprenant les notations de la remarque 1.3.3, on a les isomorphismes suivants.

$$\begin{aligned} A^{\geq 0}(Z, W) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq 0}}(\tau^{\geq 0}(Z), W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W) \\ f &\longmapsto f \circ T^{\geq 0}(Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{\leq 0}(W, Z[-1]) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(W, \tau^{\leq 0}(Z[-1])) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z[-1]) \\ f &\longmapsto T^{\leq 0}(Z) \circ f \end{aligned}$$

Par conséquent, on a les deux suites exactes suivantes.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\geq 0}}(\tau^{\geq 0}(Z), W) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(T^{\geq 0}(Z) \circ g, W)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, W) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(f,W)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(W, \tau^{\leq 0}(Z[-1])) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W, -h[-1] \circ T^{\leq 0}(Z[-1]))} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(W,f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$$

Vu la proposition 0.1.14, cela suffit. □

Théorème 1.3.15. *Le cœur $\mathcal{C} = \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 0}$ est une catégorie abélienne.*

Preuve. On va décomposer la preuve en trois étapes.

a) Etablissons tout d'abord que la catégorie $\mathcal{C}$ est additive.

i) Comme on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(\tau^{\leq 0}(0), \tau^{\leq 0}(0)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\tau^{\leq 0}(0), 0),$$

$\tau^{\leq 0}(0)$ est l'objet nul de $\mathcal{T}^{\leq 0}$. De même, $\tau^{\geq 0}(0)$ est l'objet nul de $\mathcal{T}^{\geq 0}$.

ii) Soit $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Par le corollaire 1.1.11, il existe un triangle distingué

$$X \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow Y \longrightarrow X[1]$$

et par la proposition 1.3.11, $X \oplus Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

b) Démontrons que tout morphisme de $\mathcal{C}$ a un noyau et un conoyau.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Par (TD 2), il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1].$$

Par le lemme précédent,

$$H^0(Z) \simeq \mathrm{coker}(f)$$

$$H^0(Z[-1]) \simeq \ker(f).$$

c) Finalement, établissons que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\mathrm{coim}(f) \simeq \mathrm{im}(f)$.

Vu b), on a le triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

avec $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq -1})$ et en reprenant les notations du lemme précédent, plongeons le morphisme

$$T^{\geq 0}(Z) \circ g : Y \longrightarrow \tau^{\geq 0}(Z)$$

dans le triangle distingué

$$Y \xrightarrow{T^{\geq 0}(Z)\circ g} \tau^{\geq 0}(Z) \longrightarrow W \longrightarrow Y[1].$$

Par (TD 3), on a le triangle distingué

$$(\tau^{\geq 0}(Z))[-1] \longrightarrow W[-1] \longrightarrow Y \longrightarrow \tau^{\geq 0}(Z),$$

et comme $Y, (\tau^{\geq 0}(Z))[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$, $W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$. Puisque on a les triangles distingués

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1] \longrightarrow Y[1]$$

$$Z \xrightarrow{T^{\geq 0}(Z)} \tau^{\geq 0}(Z) \longrightarrow (\tau^{\leq -1}(Z))[1] \longrightarrow Z[1]$$

$$Y \xrightarrow{T^{\geq 0}(Z)\circ g} \tau^{\geq 0}(Z) \longrightarrow W \longrightarrow Y[1],$$

par l'axiome de l'octaèdre, on a le triangle distingué suivant.

$$X[1] \longrightarrow W \longrightarrow (\tau^{\leq -1}(Z))[1] \longrightarrow X[2]$$

On a donc le triangle distingué

$$X \longrightarrow W[-1] \longrightarrow \tau^{\leq -1}(Z) \longrightarrow X[1]$$

et comme X, $\tau^{\leq -1}(Z) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$, $W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$. Par conséquent, $W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Comme on a le triangle distingué

$$(\tau^{\leq -1}(Z))[-1] \longrightarrow X \longrightarrow W[-1] \longrightarrow \tau^{\leq -1}(Z),$$

et que par la remarque 1.3.6,

$$\begin{aligned}(\tau^{\leq -1}(Z))[-1] &\simeq \tau^{\leq 0}(Z[-1]) \\ &\simeq \ker(f),\end{aligned}$$

on a alors le triangle distingué

$$\ker(f) \longrightarrow X \longrightarrow W[-1] \longrightarrow \ker(f)[1]$$

et par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}H^0(W[-1]) &\simeq \mathrm{coim}(f) \\ &\simeq W[-1]\end{aligned}$$

car $W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Comme $\tau^{\geq 0}(Z) \simeq \mathrm{coker}(f)$, on a le triangle distingué

$$Y \longrightarrow \mathrm{coker}(f) \longrightarrow W \longrightarrow Y[1],$$

et par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}H^0(W[-1]) &\simeq \mathrm{im}(f) \\ &\simeq W[-1],\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.3.16. *Si*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

est une suite exacte dans le cœur $\mathcal{C}$, alors il existe un unique $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, X[1])$ tel que

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \xrightarrow{h} X[1]$$

soit un triangle distingué dans $\mathcal{T}$.

Preuve. On peut supposer $Z \simeq \mathrm{coker}\, f$. Par (TD 3), il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow X[1]$$

avec $Z' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq -1})$. Comme $Z'[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$, $H^0(Z'[-1]) \simeq \tau^{\leq 0}(Z'[-1])$ et par le lemme 1.3.14, on a

$$\tau^{\leq 0}(Z'[-1]) \simeq \ker f \simeq 0$$

car f est un monomorphisme. Par conséquent, $Z'[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$ et donc, $Z' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} H^0(Z') &\simeq Z' \\ &\simeq \operatorname{coker} f \\ &\simeq Z, \end{aligned}$$

et on a alors le triangle distingué suivant.

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{h} X[1]$$

L'unicité de h résulte du lemme 1.3.4. □

Théorème 1.3.17. *Le foncteur $H^0 : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur cohomologique.*

Preuve. Si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

est un triangle distingué, établissons que

$$H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z)$$

est une suite exacte dans $\mathcal{C}$.

On va décomposer la preuve en quatre étapes.

a) Supposons que X, Y, $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ et démontrons que la suite

$$0 \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z)$$

est exacte.

Soit $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Comme $\mathrm{Hom}\,(W, .)$ est un foncteur cohomologique, on a la suite exacte suivante.

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z[-1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z)$$

Puisque $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $Z[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z[-1]) \simeq 0.$$

De plus, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(W, \tau^{\leq 0}(X)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq 0}}(W, H^0(X)) \end{aligned}$$

car $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$. On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, H^0(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, H^0(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, H^0(Z)),$$

et on obtient donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z).$$

b) Supposons que $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ et démontrons que la suite

$$0 \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z)$$

est exacte.

Soit $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq -1})$. Comme on a la suite exacte (†) et comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z[-1]) \simeq 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq -1}}(W, \tau^{\leq -1}(X)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leq -1}}(W, \tau^{\leq -1}(Y)), \end{aligned}$$

et donc, $\tau^{\leq -1}(X) \simeq \tau^{\leq -1}(Y)$. Par conséquent, on a les trois triangles distingués

$$\tau^{\leq -1}(Y) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq 0}(X) \longrightarrow \tau^{\leq -1}(Y)[1]$$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

$$\tau^{\leq -1}(Y) \longrightarrow Y \longrightarrow \tau^{\geq 0}(Y) \longrightarrow \tau^{\leq -1}(Y)[1],$$

et par l'axiome de l'octaèdre, on obtient le triangle distingué suivant.

$$\tau^{\geq 0}(X) \longrightarrow \tau^{\geq 0}(Y) \longrightarrow Z \longrightarrow \tau^{\geq 0}(X)[1]$$

Or, $\tau^{\geq 0}(X)$, $\tau^{\geq 0}(Y)$ et Z appartiennent à $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 0})$ et en appliquant la première étape, la suite

$$0 \longrightarrow H^0(\tau^{\geq 0}(X)) \longrightarrow H^0(\tau^{\geq 0}(Y)) \longrightarrow H^0(Z)$$

est exacte. Bien sûr, $H^0(\tau^{\geq 0}(X)) \simeq H^0(X)$ et on a le résultat annoncé.

c) Par dualité, si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$, la suite

$$H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z) \longrightarrow 0$$

est exacte.

d) Démontrons le cas général. Comme on a les trois triangles distingués

$$\tau^{\leq 0}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq 1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq 0}(X)[1]$$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

$$\tau^{\leq 0}(X) \longrightarrow Y \longrightarrow W \longrightarrow \tau^{\leq 0}(X)[1],$$

par l'axiome de l'octaèdre, on obtient le triangle distingué suivant.

$$\tau^{\geq 1}(X) \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow \tau^{\geq 1}(X)[1]$$

Si on applique c) au triangle distingué

$$\tau^{\leq 0}(X) \longrightarrow Y \longrightarrow W \longrightarrow \tau^{\leq 0}(X)[1],$$

la suite

$$H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(W) \longrightarrow 0$$

est exacte et si on applique b) au triangle distingué

$$W \longrightarrow Z \longrightarrow \tau^{\geq 1}(X)[1] \longrightarrow W[1],$$

la suite

$$0 \longrightarrow H^0(W) \longrightarrow H^0(Z) \longrightarrow H^0(\tau^{\geq 1}(X)[1])$$

est exacte. On en déduit que la suite

$$H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow H^0(Z)$$

est exacte, d'où la conclusion. □

1.4. Localisation d'une t-structure

Théorème 1.4.1. *Soient $\mathcal{N}$ un système nul de $\mathcal{T}$ et*

$$Q : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$$

le foncteur canonique associé à la localisation de $\mathcal{T}$ par $\mathcal{N}$. Désignons par $Q(\mathcal{T}^{\leq 0})$ (resp. $Q(\mathcal{T}^{\geq 0})$) l'image essentielle de $Q_{|\mathcal{T}^{\leq 0}}$ (resp. $Q_{|\mathcal{T}^{\geq 0}}$). Alors,

$$(Q(\mathcal{T}^{\leq 0}), Q(\mathcal{T}^{\geq 0}))$$

est une t-structure sur $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ si pour tout triangle distingué

$$X_1 \xrightarrow{u} X_0 \xrightarrow{v} N \longrightarrow X_1[1]$$

de $\mathcal{T}$ tel que $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$, $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $N \in \mathcal{N}$, on a X_0, $X_1 \in \mathcal{N}$.

Preuve. Seul le deuxième axiome de la définition d'une t-structure n'est pas évident. Soient $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$. Démontrons que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Q(X_0), Q(X_1)) = 0.$$

Un morphisme $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Q(X_0), Q(X_1))$ est représenté par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X_0 & & X_1 \end{tikzcd}$$

avec $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, X_0)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, X_1)$. Il existe donc un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$Z \xrightarrow{s} X_0 \longrightarrow N \longrightarrow Z[1]$$

avec $N \in \mathcal{N}$. On a aussi un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$Z_0 \xrightarrow{t} Z \longrightarrow Z_1 \longrightarrow Z_0[1]$$

avec $Z_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$ et $Z_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\geq 1})$. De plus, par (TD 2), il existe un triangle distingué dans $\mathcal{T}$

$$Z_0 \xrightarrow{s \circ t} X_0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow Z_0[1],$$

et par la proposition 1.3.8, $N_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}^{\leq 0})$. Par l'axiome de l'octaèdre, on obtient le triangle distingué

$$Z_1 \longrightarrow N_0 \longrightarrow N \longrightarrow Z_1[1],$$

et notre hypothèse montre que Z_1, $N_0 \in \mathcal{N}$. Par conséquent, $t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z_0, X_1) = 0,$$

on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
& X_0 & \\
Z \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "a"'] & Z_0 \arrow[l, "t"'] \arrow[u, "s \circ t"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{X_0}"] \arrow[d, "0"] & Z_0 \arrow[ul, "s \circ t"'] \arrow[dl, "0"] \\
& X_1 &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que

$$(Z, s, a) R (Z_0, s \circ t, 0),$$

et donc $\alpha = 0$, d'où la conclusion. $\square$

Remarque 1.4.2. Sous les hypothèses du théorème précédent,

$$\tau^{\leq 0}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}, \qquad \tau^{\geq 0}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}.$$

En effet, soit $N \in \mathcal{N}$. Comme on a le triangle distingué

$$\tau^{\leq 0}(N) \longrightarrow N \longrightarrow \tau^{\geq 1}(N) \longrightarrow \tau^{\leq 0}(N)[1],$$

le triangle

$$\tau^{\geq 1}(N)[-1] \longrightarrow \tau^{\leq 0}(N) \longrightarrow N \longrightarrow \tau^{\geq 1}(N)$$

est distingué. Or,

$$\tau^{\geq 1}(N)[-1] \simeq \tau^{\geq 2}(N[-1]),$$

ce qui implique que $\tau^{\geq 1}(N)[-1]$, $\tau^{\leq 0}(N) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$.

CHAPITRE 2

Catégorie dérivée d'une catégorie quasi-abélienne

2.1. Catégorie $K(\mathcal{A})$ associée à une catégorie additive $\mathcal{A}$

Dans toute cette section, $\mathcal{A}$ est une catégorie additive.

Définition 2.1.1. Un *complexe* X *de* $\mathcal{A}$ est la donnée d'une suite infinie

$$\dots X^{k-1} \xrightarrow{d_X^{k-1}} X^k \xrightarrow{d_X^k} X^{k+1} \dots$$

telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $X^k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $d_X^k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^k, X^{k+1})$ et $d_X^k \circ d_X^{k-1} = 0$.

La famille $d_X = \{d_X^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est la *différentielle du complexe* X.

Soient X et Y deux complexes de $\mathcal{A}$. Un *morphisme de complexes* $f : X \longrightarrow Y$ est une suite de morphismes $f^k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^k, Y^k)$, $k \in \mathbb{Z}$, telle que

$$d_Y^k \circ f^k = f^{k+1} \circ d_X^k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On note $C(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes ainsi obtenue. On peut vérifier qu'il s'agit d'une catégorie additive.

Un complexe X est dit *borné*(resp. *borné inférieurement*; *borné supérieurement*) si $X^k = 0$ pour $|k| >> 0$(resp. pour $k << 0$; pour $k >> 0$).

On note $C^b(\mathcal{A})$ (resp. $C^+(\mathcal{A})$, resp. $C^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{A})$ formée des complexes bornés (resp. bornés inférieurement; bornés supérieurement).

Définition 2.1.2. Un *morphisme* $f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ est *homotope à zéro* s'il existe une famille de morphismes $s^k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^k, Y^{k-1})$, $k \in \mathbb{Z}$, telle que

$$f^k = d_Y^{k-1} \circ s^k + s^{k+1} \circ d_X^k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Schématiquement,

$$\begin{tikzcd}
\dots & X^{k-1} \arrow[r, "d_X^{k-1}"] \arrow[d, "f^{k-1}"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] \arrow[d, "f^k"] \arrow[dl, "s^k"] & X^{k+1} \arrow[d, "f^{k+1}"] \arrow[dl, "s^{k+1}"] & \dots \\
\dots & Y^{k-1} \arrow[r, "d_Y^{k-1}"] & Y^k \arrow[r, "d_Y^k"] & Y^{k+1} & \dots
\end{tikzcd}$$

Deux morphismes f, $g \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ sont *homotopes* si $f - g$ est homotope à zéro.

Pour X, $Y \in \mathrm{Ob}(C(\mathcal{A}))$, on pose

$$Ht(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \text{ homotope à zéro }\}.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$ stable pour la composition.

Définition 2.1.3. On définit une nouvelle catégorie $K(\mathcal{A})$ par

$$\mathrm{Ob}(K(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(C(\mathcal{A})),$$

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)/Ht(X,Y).$$

Définition 2.1.4. Soit $X \in \mathrm{Ob}(C(\mathcal{A}))$. On définit un nouveau complexe $X[1]$ en posant

$$X[1]^k = X^{k+1},$$

$$d^k_{X[1]} = -d^{k+1}_X.$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$. On définit $f[1] : X[1] \longrightarrow Y[1]$ en posant

$$f[1]^k = f^{k+1}.$$

On vient donc de définir un automorphisme

$$[1] : C(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathcal{A}).$$

Définition 2.1.5. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$. Le *mapping cone* de f noté $M(f)$ est l'objet de $C(\mathcal{A})$ défini de la manière suivante :

$$M(f)^k = X^{k+1} \oplus Y^k,$$

$$d^k_{M(f)} = \begin{pmatrix} -d^{k+1}_X & 0 \\ f^{k+1} & d^k_Y \end{pmatrix}.$$

(On vérifie facilement que $d^k_{M(f)} \circ d^{k-1}_{M(f)} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.)

On définit les morphismes $\alpha(f) : Y \longrightarrow M(f)$ et $\beta(f) : M(f) \longrightarrow X[1]$ par

$$\alpha(f)^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix}$$

et

$$\beta(f)^k = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie directement qu'il s'agit de morphismes de complexes.

Lemme 2.1.6. *Pour tout* $f \in \operatorname{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$*, il existe un isomorphisme*

$$\varphi \in \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X[1], M(\alpha(f)))$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"'] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M(f)}"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"'] \\ Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & Y[1] \end{tikzcd}$$

commute dans $K(\mathcal{A})$*.*

Preuve. On a

$$M(\alpha(f))^k = Y^{k+1} \oplus M(f)^k \simeq Y^{k+1} \oplus X^{k+1} \oplus Y^k,$$

et

$$d^k_{M(\alpha(f))} = \begin{pmatrix} -d_Y^{k+1} & 0 \\ \alpha(f)^{k+1} & d^k_{M(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix}.$$

Définissons $\varphi : X[1] \longrightarrow M(\alpha(f))$ par

$$\varphi^k = \begin{pmatrix} -f^{k+1} \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

et $\psi : M(\alpha(f)) \longrightarrow X[1]$ par

$$\psi^k = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrons que φ et ψ sont des morphismes de complexes. On a successivement

$$\begin{aligned} d^k_{M(\alpha(f))} \circ \varphi^k &= \begin{pmatrix} -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{k+1} \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_Y^{k+1} \circ f^{k+1} \\ -d_X^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f^{k+2} \circ d_X^{k+1} \\ -d_X^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \varphi^{k+1} \circ d^k_{X[1]}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\psi^{k+1} \circ d^k_{M(\alpha(f))} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_X^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= d^k_{X[1]} \circ \psi^k .
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre dans $K(\mathcal{A})$. D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\psi^k \circ \varphi^k &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{k+1} \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\
&= \mathrm{id}_{X[1]^k} .
\end{aligned}$$

D'autre part, $\varphi \circ \psi$ est homotope à $\mathrm{id}_{M(\alpha(f))}$ car la famille de morphismes

$$s^k : M(\alpha(f))^k \longrightarrow M(\alpha(f))^{k-1}$$

définie par

$$s^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\mathrm{id}_{M(\alpha(f))^k} - \varphi^k \circ \psi^k = s^{k+1} \circ d^k_{M(\alpha(f))} + d^{k-1}_{M(\alpha(f))} \circ s^k .$$

En effet, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{M(\alpha(f))^k} - \varphi^k \circ \psi^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -f^{k+1} \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -f^{k+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
s^{k+1} \circ d^k_{M(\alpha(f))} + d^{k-1}_{M(\alpha(f))} \circ s^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -d_Y^k & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^k & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^k} & f^k & d_Y^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & d_Y^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_Y^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer que le diagramme figurant dans l'énoncé commute.

Puisque

$$\alpha(\alpha(f))^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{M(f)^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix},$$

il vient

$$\begin{aligned}
\psi^k \circ \alpha(\alpha(f))^k &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \beta(f)^k.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi \circ \beta(f) = \alpha(\alpha(f))$ dans $K(\mathcal{A})$. Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha(f))^k \circ \varphi^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{k+1} \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -f^{k+1} \\
&= -f[1]^k.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.1.7. *La catégorie $K(\mathcal{A})$ munie de l'automorphisme $[1]$ et des triangles isomorphes à ceux du type*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

est une catégorie triangulée.

Preuve. On doit vérifier que les différents axiomes d'une catégorie triangulée sont satisfaits par $K(\mathcal{A})$.

(TD 0) et (TD 2) sont évidents.

(TD 3) Soit $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ un triangle distingué dans $K(\mathcal{A})$. On peut supposer qu'il est isomorphe à

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1].$$

Par le lemme précédent, il existe un isomorphisme $\varphi \in \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X[1], M(\alpha(f)))$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"'] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M(f)}"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"'] \\ Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & Y[1] \end{tikzcd}$$

commute dans $K(\mathcal{A})$ et

$$Y \longrightarrow M(f) \longrightarrow X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

est donc un triangle distingué.

(TD 1) Le mapping cone du morphisme $f : 0 \longrightarrow X$ est donné par

$$M(f)^k = X^k$$

$$d^k_{M(f)} = d^k_X,$$

et $\alpha(f) = \mathrm{id}_X$, $\beta(f) = 0$. Par conséquent, le triangle

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0$$

est distingué et par(TD 3), on a le triangle distingué suivant.

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

(TD 4) Soient

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1],$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow X'[1]$$

deux triangles distingués dans $K(\mathcal{A})$ et un carré commutatif dans $K(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

On peut supposer que les deux triangles distingués sont isomorphes à

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1],$$

et

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1]$$

respectivement. Comme $v \circ f = f' \circ u$ dans $K(\mathcal{A})$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $s^k \in \operatorname{Hom}(X^k, Y'^{k-1})$ tel que

$$v^k \circ f^k - f'^k \circ u^k = d_{Y'}^{k-1} \circ s^k + s^{k+1} \circ d_X^k.$$

On définit $w : M(f) \longrightarrow M(f')$ par

$$w^k = \begin{pmatrix} u^{k+1} & 0 \\ s^{k+1} & v^k \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un morphisme de complexes car

$$\begin{aligned} d_{M(f')}^k \circ w^k &= \begin{pmatrix} -d_{X'}^{k+1} & 0 \\ f'^{k+1} & d_{Y'}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k+1} & 0 \\ s^{k+1} & v^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -d_{X'}^{k+1} \circ u^{k+1} & 0 \\ f'^{k+1} \circ u^{k+1} + d_{Y'}^k \circ s^{k+1} & d_{Y'}^k \circ v^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u^{k+2} \circ d_X^{k+1} & 0 \\ v^{k+1} \circ f^{k+1} - s^{k+2} \circ d_X^{k+1} & v^{k+1} \circ d_Y^k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w^{k+1} \circ d_{M(f)}^k &= \begin{pmatrix} u^{k+2} & 0 \\ s^{k+2} & v^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u^{k+2} \circ d_X^{k+1} & 0 \\ v^{k+1} \circ f^{k+1} - s^{k+2} \circ d_X^{k+1} & v^{k+1} \circ d_Y^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, $\alpha(f') \circ v = w \circ \alpha(f)$ car

$$\begin{aligned} w^k \circ \alpha(f)^k &= \begin{pmatrix} u^{k+1} & 0 \\ s^{k+1} & v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ v^k \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f')^k \circ v^k, \end{aligned}$$

et $\beta(f') \circ w = u[1] \circ \beta(f)$ car

$$\begin{aligned}\beta(f')^k \circ w^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k+1} & 0 \\ s^{k+1} & v^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= u^{k+1} \circ \beta(f)^k \\ &= u[1]^k \circ \beta(f)^k.\end{aligned}$$

On a donc le morphisme de triangles distingués suivant.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "v"'] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "w"'] & X[1] \arrow[d, "u[1]"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "\alpha(f')"] & M(f') \arrow[r, "\beta(f')"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

(TD 5) Considérons trois triangles distingués

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\alpha(g)} M(g) \xrightarrow{\beta(g)} Y[1]$$

$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \xrightarrow{\alpha(g\circ f)} M(g \circ f) \xrightarrow{\beta(g\circ f)} X[1].$$

Définissons $u : M(f) \longrightarrow M(g \circ f)$ et $v : M(g \circ f) \longrightarrow M(g)$ par

$$u^k : M(f)^k = X^{k+1} \oplus Y^k \longrightarrow M(g \circ f)^k = X^{k+1} \oplus Z^k$$

$$u^k = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & g^k \end{pmatrix},$$

$$v^k : M(g \circ f)^k = X^{k+1} \oplus Z^k \longrightarrow M(g)^k = Y^{k+1} \oplus Z^k$$

$$v^k = \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix}.$$

Montrons que u et v sont des morphismes de complexes. On a successivement

$$\begin{aligned}d^k_{M(g\circ f)} \circ u^k &= \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & d_Z^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & g^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & d_Z^k \circ g^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & g^{k+1} \circ d_Y^k \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u^{k+1} \circ d^k_{M(f)} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 \\ 0 & g^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{k+1}_X & 0 \\ f^{k+1} & d^k_Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d^{k+1}_X & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & g^{k+1} \circ d^k_Y \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
d^k_{M(g)} \circ v^k &= \begin{pmatrix} -d^{k+1}_Y & 0 \\ g^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d^{k+1}_Y \circ f^{k+1} & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -f^{k+2} \circ d^{k+1}_X & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^{k+1} \circ d^k_{M(g\circ f)} &= \begin{pmatrix} f^{k+2} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{k+1}_X & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -f^{k+2} \circ d^{k+1}_X & 0 \\ g^{k+1} \circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Définissons $w : M(g) \longrightarrow M(f)[1]$ par

$$w = \alpha(f)[1] \circ \beta(g).$$

Alors, le diagramme suivant est commutatif.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "g"'] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "u"'] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"'] \\
X \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "\alpha(g\circ f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"'] & M(g\circ f) \arrow[r, "\beta(g\circ f)"] \arrow[d, "v"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha(f)"'] & Z \arrow[r, "\alpha(g)"] \arrow[d, "\alpha(g\circ f)"'] & M(g) \arrow[r, "\beta(g)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M(g)}"'] & Y[1] \arrow[d, "\alpha(f)[1]"'] \\
M(f) \arrow[r, "u"] & M(g\circ f) \arrow[r, "v"] & M(g) \arrow[r, "w"] & M(f)[1]
\end{tikzcd}
$$

En effet, on a

i) $u \circ \alpha(f) = \alpha(g \circ f) \circ g$ car

$$\begin{aligned} u^k \circ \alpha(f)^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & g^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ g^k \end{pmatrix} \\ &= \alpha(g \circ f)^k \circ g^k; \end{aligned}$$

ii) $\beta(g \circ f) \circ u = \beta(f)$ car

$$\begin{aligned} \beta(g \circ f)^k \circ u^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & g^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \beta(f)^k; \end{aligned}$$

iii) $v \circ \alpha(g \circ f) = \alpha(g)$ car

$$\begin{aligned} v^k \circ \alpha(g \circ f)^k &= \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\ &= \alpha(g)^k; \end{aligned}$$

iv) $\beta(g) \circ v = f[1] \circ \beta(g \circ f)$ car

$$\begin{aligned} \beta(g)^k \circ v^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= f[1]^k \circ \beta(g \circ f)^k. \end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer que

$$M(f) \xrightarrow{u} M(g \circ f) \xrightarrow{v} M(g) \xrightarrow{w} M(f)[1]$$

est un triangle distingué. On va construire un isomorphisme dans $K(\mathcal{A})$

$$\varphi : M(u) \longrightarrow M(g)$$

et son inverse

$$\psi : M(g) \longrightarrow M(u)$$

tels que

$$\varphi \circ \alpha(u) = v, \qquad \beta(u) \circ \psi = w,$$

et on aura alors l'isomorphisme de triangles suivant.

$$\begin{tikzcd}
M(f) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M(g\circ f) \arrow[r, "\alpha(u)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M(u) \arrow[r, "\beta(u)"] \arrow[d, "\varphi"'] & M(f)[1] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
M(f) \arrow[r, "u"] & M(g\circ f) \arrow[r, "v"] & M(g) \arrow[r, "w"] & M(f)[1]
\end{tikzcd}$$

On a

$$M(u)^k = M(f)^{k+1} \oplus M(g\circ f)^k \simeq X^{k+2} \oplus Y^{k+1} \oplus X^{k+1} \oplus Z^k,$$

et

$$d^k_{M(u)} = \begin{pmatrix} -d^{k+1}_{M(f)} & 0 \\ u^{k+1} & d^k_{M(g\circ f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{k+2}_X & 0 & 0 & 0 \\ -f^{k+2} & -d^{k+1}_Y & 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & -d^{k+1}_X & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1}\circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix}.$$

Comme

$$M(g)^k = Y^{k+1} \oplus Z^k,$$

on définit φ et ψ par

$$\varphi^k = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix}$$

$$\psi^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix}.$$

Ce sont des morphismes de complexes car d'une part,

$$\begin{aligned}
d^k_{M(g)} \circ \varphi^k &= \begin{pmatrix} -d^{k+1}_Y & 0 \\ g^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d^{k+1}_Y & -d^{k+1}_Y \circ f^{k+1} & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1}\circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d^{k+1}_Y & -f^{k+2} \circ d^{k+1}_X & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1}\circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1} \circ d^k_{M(u)} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+2}} & f^{k+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{k+2}_X & 0 & 0 & 0 \\ -f^{k+2} & -d^{k+1}_Y & 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & -d^{k+1}_X & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1}\circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d^{k+1}_Y & -f^{k+2} \circ d^{k+1}_X & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1}\circ f^{k+1} & d^k_Z \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$
\begin{aligned}
d^k_{M(u)} \circ \psi^k &= \begin{pmatrix} d_X^{k+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{k+2} & -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1} \circ f^{k+1} & d_Z^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_Y^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ g^{k+1} & d_Z^k \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\psi^{k+1} \circ d^k_{M(g)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Y^{k+1} & 0 \\ g^{k+1} & d_Z^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_Y^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ g^{k+1} & d_Z^k \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De plus, $\varphi \circ \alpha(u) = v$ car

$$
\begin{aligned}
\varphi^k \circ \alpha(u)^k &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= v^k,
\end{aligned}
$$

et $\beta(u) \circ \psi = w$ car

$$
\begin{aligned}
\beta(u)^k \circ \psi^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= w^k.
\end{aligned}
$$

Il nous reste donc à démontrer que φ et ψ sont des isomorphismes dans $K(\mathcal{A})$. Tout d'abord, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{M(g)}$ car

$$\begin{aligned}
\varphi^k \circ \psi^k &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{id}_{M(g)^k} .
\end{aligned}$$

Ensuite, $\psi \circ \varphi$ est homotope à l'identité car le morphisme

$$s^k : M(u)^k \longrightarrow M(u)^{k-1}$$

défini par

$$s^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\mathrm{id}_{M(u)^k} - \psi^k \circ \varphi^k = s^{k+1} \circ d^k_{M(u)} + d^{k-1}_{M(u)} \circ s^k.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{M(u)^k} - \psi^k \circ \varphi^k &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Y^{k+1}} & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
s^{k+1} \circ d^k_{M(u)} + d^{k-1}_{M(u)} \circ s^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^{k+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{k+2} & -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & g^{k+1} & g^{k+1} \circ f^{k+1} & d_Z^k \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} d_X^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{k+1} & -d_Y^{k} & 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 & -d_X^{k} & 0 \\ 0 & g^{k} & g^{k} \circ f^{k} & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & -f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

d'où la conclusion.

□

2.2. t-structure sur $K(\mathcal{A})$

Dans toute cette section, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie additive telle que tout morphisme possède un noyau et un conoyau.

Définition 2.2.1. Une suite

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

de $\mathcal{A}$ est *fortement exacte* si pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C)$$

est exacte.

Plus généralement, une suite

$$A_0 \longrightarrow A_1 \ldots \longrightarrow A_n$$

est fortement exacte si la suite

$$A_{k-1} \longrightarrow A_k \longrightarrow A_{k+1}$$

est fortement exacte pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Exemple 2.2.2. i) La suite
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$$
est fortement exacte si et seulement si u est un monomorphisme.

ii) La suite
$$A \xrightarrow{u} B \longrightarrow 0$$
est fortement exacte si et seulement si u a une section, i.e., il existe $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$ tel que $u \circ s = \mathrm{id}_B$.

iii) Une suite
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$
est fortement exacte si et seulement si (A, u) est un noyau de v.

iv) Une suite courte
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$
est fortement exacte si et seulement si elle est scindée.

Preuve. i) La suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$ est fortement exacte si et seulement si pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u)} \mathrm{Hom}\,(X, B)$$
est exacte. Soit $f \in \mathrm{Hom}\,(X, A)$ tel que
$$\mathrm{Hom}\,(X, u)(f) = u \circ f = 0.$$
Par conséquent, $\mathrm{Hom}\,(X, u)$ est injectif pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, si et seulement si u est un monomorphisme.

ii) La suite $A \xrightarrow{u} B \longrightarrow 0$ est fortement exacte si pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite
$$\mathrm{Hom}\,(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, B) \longrightarrow 0$$
est exacte.

La condition est nécessaire. En effet, la suite
$$\mathrm{Hom}\,(B, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(B,u)} \mathrm{Hom}\,(B, B) \longrightarrow 0$$
étant exacte, il existe $s \in \mathrm{Hom}\,(B, A)$ tel que
$$\mathrm{Hom}\,(B, u)(s) = u \circ s = \mathrm{id}_B\,.$$

La condition est suffisante. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. La suite
$$\mathrm{Hom}\,(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u)} \mathrm{Hom}\,(X, B) \longrightarrow 0$$
est exacte car si $f \in \mathrm{Hom}\,(X, B)$, alors $s \circ f \in \mathrm{Hom}\,(X, A)$ et
$$\mathrm{Hom}\,(X, u)(s \circ f) = u \circ s \circ f = f.$$

iii) La suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ est fortement exacte si pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u)} \mathrm{Hom}\,(X,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,v)} \mathrm{Hom}\,(X,C)$$

est exacte.

La condition est nécessaire. En effet, soient $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $f \in \mathrm{Hom}\,(X,B)$ tels que $v \circ f = 0$. Par conséquent,

$$f \in \ker(\mathrm{Hom}\,(X,v)) = \mathrm{im}(\mathrm{Hom}\,(X,u)),$$

et il existe donc $f' \in \mathrm{Hom}\,(X,A)$ tel que

$$\mathrm{Hom}\,(X,u)(f') = u \circ f' = f.$$

Ainsi, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & X \arrow[ul, "f'"] \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

commute et (A,u) est un noyau de v.

La condition est suffisante. En effet, la suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$$

est fortement exacte car u est un monomorphisme. De plus, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, on vérifie facilement que la suite

$$\mathrm{Hom}\,(X,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u)} \mathrm{Hom}\,(X,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,v)} \mathrm{Hom}\,(X,C)$$

est exacte.

iv) La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u)} \mathrm{Hom}\,(X,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,v)} \mathrm{Hom}\,(X,C) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ainsi v a une section s. Le morphisme $\mathrm{Hom}\,(X,s)$ est alors une section de $\mathrm{Hom}\,(X,v)$. Par conséquent, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}\,(X,A) \oplus \mathrm{Hom}\,(X,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X,B)$$

$$(a,c) \longmapsto u \circ a + s \circ c.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Hom}\,(.,A) \oplus \mathrm{Hom}\,(.,C) \simeq \mathrm{Hom}\,(.,B)$, et donc $B \simeq A \oplus C$. $\square$

Proposition 2.2.3. *La suite*

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

est fortement exacte si et seulement si la suite courte

$$0 \longrightarrow \ker u \longrightarrow A \longrightarrow \ker v \longrightarrow 0$$

est fortement exacte et donc scindée.

Preuve. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite

$$\mathrm{Hom}\,(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u)} \mathrm{Hom}\,(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,v)} \mathrm{Hom}\,(X, C)$$

est exacte.

Rappelons que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, \ker u') \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(X,u')} \mathrm{Hom}\,(X, \ker v)$$

où u' est défini par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\ker v \arrow[r, "i_v"] & B \arrow[r, "v"] & C \\
& A \arrow[ul, "u'"'] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Démontrons que $\mathrm{Hom}\,(X, u')$ est surjectif. Soit $f \in \mathrm{Hom}\,(X, \ker v)$. Comme $v \circ i_v \circ f = 0$,

$$i_v \circ f \in \ker(\mathrm{Hom}\,(X, v)) = \mathrm{im}(\mathrm{Hom}\,(X, u)).$$

Il existe donc $f' \in \mathrm{Hom}\,(X, A)$ tel que

$$\begin{aligned} i_v \circ f &= \mathrm{Hom}\,(X, u)(f') \\ &= u \circ f' \\ &= i_v \circ u' \circ f', \end{aligned}$$

et puisque i_v est un monomorphisme, $f = u' \circ f'$ et $\mathrm{Hom}\,(X, u')$ est surjectif. On en déduit que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, \ker u') \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X, \ker v) \longrightarrow 0$$

est exacte et donc, que la suite

$$0 \longrightarrow \ker u' \longrightarrow A \xrightarrow{u'} \ker v \longrightarrow 0$$

est fortement exacte. Comme i_v est un monomorphisme, $\ker u' \simeq \ker u$, d'où la conclusion car la réciproque est immédiate. $\square$

Définition 2.2.4. Par dualité, une suite

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

de $\mathcal{A}$ est *fortement co-exacte* si pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}\,(C, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(B, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A, X)$$

est exacte.

Plus généralement, une suite

$$A_0 \longrightarrow A_1 \ldots \longrightarrow A_n$$

est fortement co-exacte si la suite

$$A_{k-1} \longrightarrow A_k \longrightarrow A_{k+1}$$

est fortement co-exacte pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Exemple 2.2.5. i) La suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$$

est fortement co-exacte si et seulement si u a une rétraction, i.e., il existe $r \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$ tel que $r \circ u = \mathrm{id}_A$.

ii) La suite

$$A \xrightarrow{u} B \longrightarrow 0$$

est fortement co-exacte si et seulement si u est un épimorphisme.

iii) Une suite

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

est fortement co-exacte si et seulement si (C, v) est un conoyau de u.

iv) Une suite courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

est fortement co-exacte si et seulement si elle est scindée.

Définition 2.2.6. Un *complexe* $X \in C(\mathcal{A})$ est *fortement exact* (resp. *co-exact*) *en degré* k si la suite

$$X^{k-1} \xrightarrow{d_X^{k-1}} X^k \xrightarrow{d_X^k} X^{k+1}$$

est fortement exacte (resp. co-exacte).

Un *complexe* est *fortement exact* (resp. *co-exact*) s'il est fortement exact (resp. co-exact) en tout degré.

Proposition 2.2.7. *Pour un complexe $X \in C(\mathcal{A})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *X est fortement exact,*

ii) *X est fortement co-exact,*

iii) *X est homotopiquement nul.*

Preuve. i) $\Rightarrow$ iii) Par la proposition 2.2.3, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$X^k \simeq \ker d_X^k \oplus \ker d_X^{k+1}.$$

Le complexe X est alors isomorphe au complexe

$$\dots \ker d_X^{k-1} \oplus \ker d_X^k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \ker d_X^k \oplus \ker d_X^{k+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \ker d_X^{k+1} \oplus \ker d_X^{k+2} \dots$$

Le morphisme

$$s^k : \ker d_X^k \oplus \ker d_X^{k+1} \longrightarrow \ker d_X^{k-1} \oplus \ker d_X^k$$

défini par

$$s^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ s^k + s^{k+1} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le complexe X est donc homotopiquement nul.

iii) $\Rightarrow$ i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme $s^k \in \mathrm{Hom}\,(X^k, X^{k-1})$ tel que

$$d_X^{k-1} \circ s^k + s^{k+1} \circ d_X^k = \mathrm{id}_{X^k}.$$

Démontrons que pour tout $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, la suite

$$\mathrm{Hom}\,(Z, X^{k-1}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(Z, d_X^{k-1})} \mathrm{Hom}\,(Z, X^k) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(Z, d_X^k)} \mathrm{Hom}\,(Z, X^{k+1})$$

est exacte. Bien sûr,

$$\mathrm{im}(\mathrm{Hom}\,(Z, d_X^{k-1})) \subset \ker(\mathrm{Hom}\,(Z, d_X^k)).$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}\,(Z, X^k)$ tel que

$$\mathrm{Hom}\,(Z, d_X^k)(f) = d_X^k \circ f = 0.$$

On a

$$f = d_X^{k-1} \circ s^k \circ f + s^{k+1} \circ d_X^k \circ f = d_X^{k-1} \circ s^k \circ f,$$

ce qui suffit.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) s'établit par dualité. $\square$

Lemme 2.2.8. *Si X est un complexe de $C(\mathcal{A})$, on a le triangle distingué dans $K(\mathcal{A})$*

$$X_0 \longrightarrow X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0[1]$$

où X_0 est le complexe

$$\dots X^{-2} \xrightarrow{d_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{\delta_X^{-1}} \ker d_X^0 \longrightarrow 0$$

($\ker d_X^0$ *est en degré* 0), X_1 *est le complexe*

$$0 \longrightarrow \ker d_X^0 \xrightarrow{i_X^0} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \longrightarrow \dots$$

(X^0 *est en degré* 0).

Preuve. Rappelons que i_X^0 est le morphisme canonique de $\ker d_X^0$ dans X^0 et que δ_X^{-1} est donné par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \ker d_X^0 \arrow[r, "i_X^0"] & X^0 \arrow[r, "d_X^0"] & X^1 \\ & X^{-1} \arrow[ul, "\delta_X^{-1}"] \arrow[u, "d_X^{-1}"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $u : X_0 \longrightarrow X$ le morphisme défini par

$$u^k = \begin{cases} \mathrm{id}_{X^k} & \text{si} \quad k < 0, \\ i^0 & \text{si} \quad k = 0, \\ 0 & \text{si} \quad k > 0. \end{cases}$$

Il suffit de démontrer que le mapping cone de u est isomorphe à X_1 dans $K(\mathcal{A})$. Le mapping cone de u est par définition le complexe M donné explicitement par

$$\dots X^{-1} \oplus X^{-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\delta_X^{-1} & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{-1}} & d_X^{-2} \end{pmatrix}} \ker d_X^0 \oplus X^{-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_X^0 & d_X^{-1} \end{pmatrix}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} X^2 \dots$$

Soient $\alpha : X_1 \longrightarrow M$ le morphisme défini par

$$\alpha^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < -1, \\ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^0} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si} \quad k = -1, \\ \mathrm{id}_{X^k} & \text{si} \quad k > -1, \end{cases}$$

et $\beta : M \longrightarrow X_1$ le morphisme défini par

$$\beta^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < -1, \\ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^0} & \delta_X^{-1} \end{pmatrix} & \text{si} \quad k = -1, \\ \mathrm{id}_{X^k} & \text{si} \quad k > -1. \end{cases}$$

On a $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{X_1}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, définissons

$$s^k : M^k \longrightarrow M^{k-1}$$

par

$$s^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si} \quad k < 0, \\ 0 & \text{si} \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Le calcul

$$s^{k+1} \circ d_M^k + d_M^{k-1} \circ s^k$$

donne pour $k < -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{k+1}} & d_X^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_X^k & 0 \\ \mathrm{id}_{X^k} & d_X^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^k} \end{pmatrix},$$

pour $k = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_X^{-1} & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{-1}} & d_X^{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_X^{-2} & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{-2}} & d_X^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{-2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{-1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{-2}}, \end{pmatrix},$$

pour $k = -1$

$$0 \begin{pmatrix} i_X^0 & d_X^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta_X^{-1} & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{-1}} & d_X^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_X^{-1} \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{-1}} \end{pmatrix},$$

et donne zéro pour $k \geq 0$. De même, le calcul de

$$\mathrm{id}_{M^k} - \alpha^k \circ \beta^k$$

donne pour $k < -1$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^k} \end{pmatrix},$$

pour $k = -1$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^0} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{-1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^0} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^0} & \delta_X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_X^{-1} \\ 0 & \mathrm{id}_{X^{-1}} \end{pmatrix},$$

et zéro pour $k > -1$.

Ainsi, $\alpha \circ \beta$ est homotope à id_{M^k} et α, β sont des isomorphismes dans $K(\mathcal{A})$. D'où la conclusion. □

Proposition 2.2.9. *Si $K^{\leq n}(\mathcal{A})$ (resp. $K^{\geq n}(\mathcal{A})$) sont les sous-catégories pleines de $K(\mathcal{A})$ formées des complexes fortement exacts en degré $k > n$ (resp. $k < n$), alors*

$$(K^{\leq 0}(\mathcal{A}), K^{\geq 0}(\mathcal{A}))$$

est une t-structure canonique sur $K(\mathcal{A})$.

Preuve. On doit vérifier les trois axiomes de la définition d'une t-structure. Le premier résulte de la définition de $K^{\leq n}(\mathcal{A})$, $K^{\geq n}(\mathcal{A})$ et le troisième du lemme précédent.

Il nous reste à démontrer que si $X \in \mathrm{Ob}(K^{\leq 0}(\mathcal{A}))$ et $Y \in \mathrm{Ob}(K^{\geq 1}(\mathcal{A}))$ alors $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) = 0$. Vu le lemme précédent, on a les deux triangles distingués suivants.

$$X_0 \longrightarrow X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0[1]$$

$$Y_0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_0[1]$$

Comme le complexe X est fortement exact en degré $k > 0$, il est clair que le complexe X_1 est fortement exact et donc, $X_1 \simeq 0$ dans $K(\mathcal{A})$. Par le corollaire 1.1.9, $X_0 \simeq X$. De même $Y_0 \simeq 0$ et $Y \simeq Y_1$. Il suffit donc de démontrer que

$$\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X_0, Y_1) = 0.$$

Soit $u \in \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X_0, Y_1)$. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\dots & X^{-2} \arrow[r, "d_X^{-2}"] \arrow[d, "u^{-2}"'] & X^{-1} \arrow[r, "\delta_X^{-1}"] \arrow[d, "u^{-1}"'] & \ker d_X^0 \arrow[r] \arrow[d, "u^0"'] & 0 \arrow[d, "u^1"'] & \dots \\
\dots & 0 \arrow[r] & \ker d_Y^0 \arrow[r, "i_Y^0"] & Y^0 \arrow[r, "d_Y^0"] & Y^1 & \dots
\end{tikzcd}$$

commute, il vient $u^k = 0$ si $k \leq -2$ ou si $k \geq 1$, et

$$u^{-1} \circ d_X^{-2} = 0,$$

$$d_Y^0 \circ u^0 = 0,$$

$$u^0 \circ \delta_X^{-1} = i_Y^0 \circ u^{-1}.$$

Par définition du noyau de d_Y^0, il existe un unique $s^0 \in \operatorname{Hom}(\ker d_X^0, \ker d_Y^0)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\ker d_Y^0 \arrow[r, "i_Y^0"] & Y^0 \arrow[r, "d_Y^0"] & Y^1 \\
& \ker d_X^0 \arrow[ul, "s^0"] \arrow[u, "u^0"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Par conséquent,

$$u^0 \circ \delta_X^{-1} = i_Y^0 \circ s^0 \circ \delta_X^{-1} = i_Y^0 \circ u^{-1},$$

et donc, $u^{-1} = s^0 \circ \delta_X^{-1}$. Si on pose $s^k = 0$ pour $k \neq 0$, on a

$$d_{Y_1}^{k-1} \circ s^k + s^{k+1} \circ d_{X_0}^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < -1, \\ s^0 \circ \delta_X^{-1} = u^{-1} & \text{si} \quad k = -1, \\ i_Y^0 \circ s^0 = u^0 & \text{si} \quad k = 0, \\ 0 & \text{si} \quad k > 0, \end{cases}$$

et donc, $u = 0$ dans $K(\mathcal{A})$. $\square$

Définition 2.2.10. On appelle *t-structure gauche de* $K(\mathcal{A})$ la t-structure considérée dans la proposition précédente.

La t-structure gauche de $K(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ induit une autre t-structure sur $K(\mathcal{A})$. On l'appellera la *t-structure droite*.

Notons $\mathcal{LK}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{A}$. Un morphisme de $u : A \longrightarrow B$ dans $u' : A' \longrightarrow B'$ étant une classe d'équivalence de carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \end{tikzcd}$$

pour la relation R définie par

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow \exists h : B \longrightarrow A' : u' \circ h = b - b'.$$

Proposition 2.2.11. *Le foncteur I de $\mathcal{LK}(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{A})$ qui envoie le morphisme*

$$A \xrightarrow{u} B$$

vers le complexe

$$\ldots 0 \longrightarrow \ker u \xrightarrow{i_u} A \xrightarrow{u} B \longrightarrow 0 \ldots$$

(b en degré 0) induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{LK}(\mathcal{A})$ et le cœur de la t-structure gauche de $K(\mathcal{A})$.

Preuve. Démontrons tout d'abord que le foncteur I est bien défini. Considérons un morphisme de $u : A \longrightarrow B$ dans $u' : A' \longrightarrow B'$, donné par un couple de morphismes (a, b) rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme

$$u' \circ a \circ i_u = b \circ u \circ i_u = 0,$$

par définition du noyau de u', il existe un unique $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker u, \ker u')$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \ker u' \arrow[r, "i_{u'}"] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \\ & \ker u \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "a \circ i_u"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

On définit alors l'image par I du couple (a, b) par le morphisme de complexes suivant.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker u \arrow[r, "i_u"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker u' \arrow[r, "i_{u'}"] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Cette définition a un sens car si $(a', b')R(a, b)$, i.e., il existe $h : B \longrightarrow A'$ tel que $u' \circ h = b - b'$, alors $I((a', b'))$ est homotope à $I((a, b))$. En effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\ker u' \arrow[r, "i_{u'}"] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \\
& \ker u \arrow[ul, "\alpha'"] \arrow[u, "a' \circ i_u"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

et $I((a', b'))$ est le morphisme de complexes suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker u \arrow[r, "i_u"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a'"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker u' \arrow[r, "i_{u'}"] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque

$$u' \circ (a - a') = (b - b') \circ u = u' \circ h \circ u,$$

on a $u' \circ (a - a' - h \circ u) = 0$, et par définition du noyau de u', il existe un unique $h' \in \operatorname{Hom}(A, \ker u')$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker u' \arrow[r, "i_{u'}"] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \\
& A \arrow[ul, "h'"] \arrow[u, "a - a' - h \circ u"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. On en déduit que

$$a - a' = h \circ u + i_{u'} \circ h',$$

et que

$$\begin{aligned}
i_{u'} \circ h' \circ i_u &= (a - a' - h \circ u) \circ i_u \\
&= (a - a') \circ i_u \\
&= i_{u'} \circ (\alpha - \alpha'),
\end{aligned}$$

et donc, $h' \circ i_u = \alpha - \alpha'$. Par conséquent, $I((a, b))$ est homotope à $I((a', b'))$ et le foncteur I est bien défini.

On vérifie facilement que I est pleinement fidèle.

Il nous reste à établir que le foncteur I est essentiellement surjectif. Pour tout $X \in \operatorname{Ob}(K^{\leq 0}(\mathcal{A}) \cap K^{\geq 0}(\mathcal{A}))$, on a

$$X \simeq \tau^{\leq 0} \circ \tau^{\geq 0}(X),$$

et comme $\tau^{\geq 0}(X)$ est le complexe

$$0 \longrightarrow \ker d_X^{-1} \xrightarrow{i_X^{-1}} X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \dots,$$

$\tau^{\leq 0} \circ \tau^{\geq 0}(X)$ est le complexe

$$\dots 0 \longrightarrow \ker d_X^{-1} \xrightarrow{i_X^{-1}} X^{-1} \xrightarrow{\delta_X^{-1}} \ker d_X^0 \longrightarrow 0 \dots$$

Ce dernier complexe est l'image par le foncteur étudié du morphisme

$$X^{-1} \xrightarrow{\delta_X^{-1}} \ker d_X^0.$$

Le foncteur I est donc essentiellement surjectif. □

Remarque 2.2.12. Un objet $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{LK}(\mathcal{A})$ est isomorphe à zéro si et seulement si u a une section.

En effet, il existe des couples $(a : A \longrightarrow 0, b : B \longrightarrow 0)$ et $(a' : 0 \longrightarrow A, b' : 0 \longrightarrow B)$ tels que

$$((a,b) \circ (a',b'))R(0,0)$$
$$((a',b') \circ (a,b))R(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B).$$

Or, $a = b = a' = b' = 0$. Donc,

$$(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)R(0,0)$$

i.e., il existe $h : b \longrightarrow A$ tel que $u \circ h = \mathrm{id}_B$.

Remarque 2.2.13. La catégorie $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{LK}(\mathcal{A})$.

En effet, le foncteur $J : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{LK}(\mathcal{A})$ qui envoie un objet a de $\mathcal{A}$ vers le morphisme $0 \longrightarrow A$, et qui envoie un morphisme $u : A \longrightarrow B$ vers le couple $(0,u)$ est pleinement fidèle.

2.3. Catégories quasi-abéliennes

Dans cette section, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie additive telle que tout morphisme possède un noyau et un conoyau.

Définition 2.3.1. Un *morphisme* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ est *strict* si le morphisme canonique (cf. 0.1.19)

$$u' : \operatorname{coim} u \longrightarrow \operatorname{im} u$$

est un isomorphisme.

Proposition 2.3.2. *Soit* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

i) *Le monomorphisme canonique* $i : \ker u \longrightarrow A$ *est strict.*
ii) *Si* u *est un monomorphisme strict alors* $A \simeq \operatorname{im} u$.
iii) *Par dualité, l'épimorphisme canonique* $q : B \longrightarrow \operatorname{coker} u$ *est strict.*
iv) *Si* u *est un épimorphisme strict, alors* $B \simeq \operatorname{coim} u$.

Preuve. i) Comme i est un monomorphisme, on a $\operatorname{coim} i \simeq \ker u$. Il suffit donc de démontrer que $\ker u \simeq \operatorname{im} i$.

Soient $C \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ et $v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ tels que $u \circ v = 0$. Par définition du noyau de u, il existe un unique $v' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(C, \ker u)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker u \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "u"] & B \\ & C \arrow[ul, "v'"] \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si $j : \operatorname{im} i \longrightarrow A$ et $q' : A \longrightarrow \operatorname{coker} i$ sont les morphismes canoniques, on a $q' \circ i = 0$ et par définition de $\operatorname{im} i$, il existe un unique $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker u, \operatorname{im} i)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im} i \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, "q'"] & \operatorname{coker} i \\ & \ker u \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On vérifie alors facilement que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im} i \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, "u"] & B \\ & C \arrow[ul, "\alpha \circ v'"] \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

commute, ce qui suffit.

ii) est trivial. □

Proposition 2.3.3. *Une somme directe de morphismes stricts est stricte.*

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition 0.1.17. □

Définition 2.3.4. La *catégorie* $\mathcal{A}$ est *quasi-abélienne* si elle vérifie les conditions suivantes :

i) dans un carré cartésien,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ A' \arrow[u] \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

si f est un épimorphisme strict alors f' est un épimorphisme strict,

ii) dans un carré co-cartésien,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] & B' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

si f est un monomorphisme strict alors f' est un monomorphisme strict.

Proposition 2.3.5. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie quasi-abélienne, la composée de deux épimorphismes stricts est un épimorphisme strict.*

Preuve. Soient $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, $v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ deux épimorphismes stricts et les morphismes canoniques $i_u : \ker u \longrightarrow A$, $i_v : \ker v \longrightarrow B$ et $i_{v \circ u} : \ker(v \circ u) \longrightarrow A$. Comme $v \circ u \circ i_{v \circ u} = 0$, par définition du noyau de v, il existe un unique $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker(u \circ v), \ker v)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker v \arrow[r, "i_v"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & \ker(v \circ u) \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "u \circ i_{v \circ u}"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Etablissons que le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ \ker(v \circ u) \arrow[u, "i_{v \circ u}"] \arrow[r, "f"] & \ker v \arrow[u, "i_v"] \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Soient $W \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, A)$ et $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, \ker v)$ tels que $u \circ \alpha = i_v \circ \beta$.

Puisque

$$v \circ u \circ \alpha = v \circ i_v \circ \beta = 0,$$

par définition du noyau de $v \circ u$, il existe un unique $\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, \ker(v \circ u))$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \ker(v \circ u) \arrow[r, "i_{v \circ u}"] & A \arrow[r, "v \circ u"] & C \\ & W \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} i_v \circ f \circ \gamma &= u \circ i_{v \circ u} \circ \gamma \\ &= u \circ \alpha \\ &= i_v \circ \beta, \end{aligned}$$

$f \circ \gamma = \beta$, et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "u"] & B \\
 & \ker(v \circ u) \arrow[u, "i_{v \circ u}"'] \arrow[r, "f"] & \ker v \arrow[u, "i_v"'] \\
W \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[urr, "\beta"] & &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Le carré commutatif ci-dessus est donc cartésien. Comme u est un épimorphisme strict, f est un épimorphisme strict.

Par la proposition 2.3.2 , il suffit de démontrer que $(C, v \circ u)$ est un conoyau de $i_{v \circ u}$.

Soient $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, W)$ tels que $\gamma \circ i_{v \circ u} = 0$. Démontrons qu'il existe un unique $\gamma'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, W)$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker(v \circ u) \arrow[r, "i_{v \circ u}"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "v \circ u"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \arrow[dl, "\gamma''"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

commutatif. Puisque $v \circ u \circ i_u = 0$, par définition du noyau de $v \circ u$, il existe un unique $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker u, \ker(v \circ u))$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker(v \circ u) \arrow[r, "i_{v \circ u}"] & A \arrow[r, "v \circ u"] & C \\
 & \ker u \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "i_u"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. Par conséquent,

$$\gamma \circ i_u = \gamma \circ i_{v \circ u} \circ g = 0,$$

et comme par la proposition 2.3.2, $B \simeq \operatorname{coim} u$, il existe un unique $\gamma' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, W)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker u \arrow[r, "i_u"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[dl, "\gamma'"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On en déduit que

$$\begin{aligned} \gamma' \circ i_v \circ f &= \gamma' \circ u \circ i_{v \circ u} \\ &= \gamma \circ i_{v \circ u} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et comme f est un épimorphisme, $\gamma' \circ i_v = 0$. De même, puisque v est un épimorphisme strict, il existe un unique $\gamma'' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(C, W)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker v \arrow[r, "i_v"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\gamma'"'] & C \arrow[dl, "\gamma''"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il s'ensuit que

$$\gamma'' \circ v \circ u = \gamma' \circ u = \gamma,$$

d'où la conclusion. $\square$

2.4. Dérivation d'une catégorie quasi-abélienne

Dans cette section, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie quasi-abélienne.

Définition 2.4.1. Une suite

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

de $\mathcal{A}$ telle que $v \circ u = 0$ est *strictement exacte* si la flèche canonique

$$\operatorname{coim} u \longrightarrow \ker v$$

est un isomorphisme.

Plus généralement, une suite

$$A_0 \longrightarrow A_1 \ldots \longrightarrow A_n$$

est strictement exacte si la suite

$$A_{k-1} \longrightarrow A_k \longrightarrow A_{k+1}$$

est strictement exacte pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Remarque 2.4.2. Dire que la suite $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ telle que $v \circ u = 0$ est strictement exacte revient à dire que u est strict et que la flèche canonique

$$\operatorname{im} u \longrightarrow \ker v$$

est un isomorphisme.

Exemple 2.4.3. i) La suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$$

est strictement exacte si et seulement si u est un monomorphisme.

ii) La suite

$$A \xrightarrow{u} B \longrightarrow 0$$

est strictement exacte si et seulement si u est un épimorphisme strict.

iii) Une suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

est strictement exacte si et seulement si (A, u) est un noyau de v.

iv) Une suite courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

est strictement exacte si et seulement si (A, u) est un noyau de v et (C, v) est un conoyau de u.

Proposition 2.4.4. *La suite*

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

est strictement exacte si et seulement si $v \circ u = 0$ *et la suite courte*

$$0 \longrightarrow \ker u \xrightarrow{i_u} A \xrightarrow{u'} \ker v \longrightarrow 0$$

est strictement exacte.

Preuve. Rappelons que $i_v \circ u' = u$.

La condition est nécessaire. En effet, comme i_v est un monomorphisme, $\ker u \simeq \ker u'$ et $(\ker u, i_u)$ est un noyau de u'. De plus, par hypothèse, $\ker v \simeq \operatorname{coim} u$ et donc, par définition de la coimage de u, $(\ker v, u')$ est un conoyau de i_u, ce qui suffit.

La condition est suffisante. En effet, $v \circ u = v \circ i_v \circ u' = 0$. Comme $(\ker v, u')$ est un conoyau de i_u, $\ker v \simeq \operatorname{coim} u$ et la suite $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ est donc strictement exacte. $\square$

Proposition 2.4.5. *Une suite fortement exacte est strictement exacte.*

Preuve. Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ une suite fortement exacte. Il suffit de démontrer que $\operatorname{coim} u \simeq \ker v$.

Par la proposition 2.2.3, on a la suite fortement exacte

$$0 \longrightarrow \ker u \xrightarrow{i_u} A \xrightarrow{u'} \ker v \longrightarrow 0$$

où u' est donné par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \ker v \arrow[r, "i_v"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & A \arrow[ul, "u'"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme u' a donc une section. Soit $s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker v, A)$ tel que

$$u' \circ s = \mathrm{id}_{\ker v} .$$

Notons $q : A \longrightarrow \operatorname{coim} u$ le morphisme canonique. Par définition de $\operatorname{coim} u$, il existe un unique $u'' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{coim} u, B)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker u \arrow[r, "i_u"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & \operatorname{coim} u \arrow[dl, "u''"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démontrons que $(\operatorname{coim} u, u'')$ est un noyau de v. Soient $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ et $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B)$ tels que $v \circ \alpha = 0$. Par définition du noyau de v, il existe un unique $\alpha' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \ker v)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \ker v \arrow[r, "i_v"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & X \arrow[ul, "\alpha'"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} u'' \circ q \circ s \circ \alpha' &= u \circ s \circ \alpha' \\ &= i_v \circ u' \circ s \circ \alpha' \\ &= i_v \circ \alpha' \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coim} u \arrow[r, "u''"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & X \arrow[ul, "q \circ s \circ \alpha'"] \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

commute. La conclusion en résulte aussitôt. $\square$

Définition 2.4.6. Un *complexe* $X \in C(\mathcal{A})$ est *strictement exact en degré* k si la suite

$$X^{k-1} \xrightarrow{d_X^{k-1}} X^k \xrightarrow{d_X^k} X^{k+1}$$

est strictement exacte.

Un *complexe* est *strictement exact* s'il est strictement exact en tout degré.

Proposition 2.4.7. *Si X et Y sont deux complexes isomorphes dans $K(\mathcal{A})$, alors ils sont simultanément strictement exacts en degré k.*

Preuve. Soient $u \in \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y)$, $v \in \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y, X)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $s^k \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y^k, Y^{k-1})$ tels que

$$d_Y^{k-1} \circ s^k + s^{k+1} \circ d_Y^k = \mathrm{id}_{Y^k} - u^k \circ v^k.$$

Supposons que X est strictement exact en degré k. Par la proposition précédente, on a la suite strictement exacte

$$0 \longrightarrow \ker d_X^{k-1} \xrightarrow{i_X^{k-1}} X^{k-1} \xrightarrow{\delta_X^{k-1}} \ker d_X^k \longrightarrow 0$$

où δ_X^{k-1} est donné par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \ker d_X^k \arrow[r, "i_X^k"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1} \\ & X^{k-1} \arrow[ul, "\delta_X^{k-1}"] \arrow[u, "d_X^{k-1}"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Il suffit d'établir que la suite courte

$$0 \longrightarrow \ker d_Y^{k-1} \xrightarrow{i_Y^{k-1}} Y^{k-1} \xrightarrow{\delta_Y^{k-1}} \ker d_Y^k \longrightarrow 0$$

est strictement exacte. Comme i_Y^k est un monomorphisme, $\ker d_Y^{k-1} \simeq \ker \delta_Y^{k-1}$, et il suffit donc d'établir que $(\ker d_Y^k, \delta_Y^{k-1})$ est un conoyau de i_Y^{k-1}. Puisque

$$d_Y^k \circ u^k \circ i_X^k = u^{k+1} \circ d_X^k \circ i_X^k = 0,$$

par définition du noyau de d_Y^k, il existe un unique $u'^k \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker d_X^k, \ker d_Y^k)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \ker d_Y^k \arrow[r, "i_Y^k"] & Y^k \arrow[r, "d_Y^k"] & Y^{k+1} \\ & \ker d_X^k \arrow[ul, "u'^k"] \arrow[u, "u^k \circ i_X^k"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. De même, il existe un unique $v'^k \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker d_Y^k, \ker d_X^k)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \ker d_X^k \arrow[r, "i_X^k"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1} \\ & \ker d_Y^k \arrow[ul, "v'^k"] \arrow[u, "v^k \circ i_Y^k"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Par conséquent, puisque

$$\mathrm{id}_{Y^k} - u^k \circ v^k = d_Y^{k-1} \circ s^k + s^{k+1} \circ d_Y^k,$$

on a successivement

$$\begin{aligned} i_Y^k - u^k \circ v^k \circ i_Y^k &= d_Y^{k-1} \circ s^k \circ i_Y^k + s^{k+1} \circ d_Y^k \circ i_Y^k, \\ i_Y^k - u^k \circ i_X^k \circ v'^k &= i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} \circ s^k \circ i_Y^k, \\ i_Y^k - i_Y^k \circ u'^k \circ v'^k &= i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} \circ s^k \circ i_Y^k. \end{aligned}$$

Comme i_Y^k est un monomorphisme, il vient

$$\mathrm{id}_{\ker d_Y^k} - u'^k \circ v'^k = \delta_Y^{k-1} \circ s^k \circ i_Y^k.$$

De plus,

$$\begin{aligned} i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} \circ u^{k-1} \circ v^{k-1} &= d_Y^{k-1} \circ u^{k-1} \circ v^{k-1} \\ &= u^k \circ d_X^{k-1} \circ v^{k-1} \\ &= u^k \circ v^k \circ d_Y^{k-1} \\ &= u^k \circ v^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} \\ &= u^k \circ i_X^k \circ v'^k \circ \delta_Y^{k-1} \\ &= i_Y^k \circ u'^k \circ v'^k \circ \delta_Y^{k-1}, \end{aligned}$$

et

$$\delta_Y^{k-1} \circ u^{k-1} \circ v^{k-1} = u'^k \circ v'^k \circ \delta_Y^{k-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\delta_Y^{k-1} \circ (\mathrm{id}_{Y^{k-1}} - u^{k-1} \circ v^{k-1} - s^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1}) \\
&= \delta_Y^{k-1} - \delta_Y^{k-1} \circ u^{k-1} \circ v^{k-1} - \delta_Y^{k-1} \circ s^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} \\
&= (\mathrm{id}_{\ker d_Y^k} - u'^k \circ v'^k - \delta_Y^{k-1} \circ s^k \circ i_Y^k) \circ \delta_Y^{k-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\ker \delta_Y^{k-1} \simeq \ker d_Y^{k-1}$, il existe un unique $w^{k-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y^{k-1}, \ker d_Y^{k-1})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker d_Y^{k-1} \arrow[r, "i_Y^{k-1}"] & Y^{k-1} \arrow[r, "\delta_Y^{k-1}"] & \ker d_Y^k \\
& Y^{k-1} \arrow[ul, "w^{k-1}"] \arrow[u, "\gamma^{k-1}"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

(où $\gamma^{k-1} = \mathrm{id}_{Y^{k-1}} - u^{k-1} \circ v^{k-1} - s^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1}$) soit commutatif, et donc,

$$u^{k-1} \circ v^{k-1} = \mathrm{id}_{Y^{k-1}} - s^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} - i_Y^{k-1} \circ w^{k-1}.$$

A présent, établissons que $(\ker d_Y^k, \delta_Y^{k-1})$ est un conoyau de i_Y^{k-1}. Soient $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y^{k-1}, Z)$ tels que

$$\alpha \circ i_Y^{k-1} = 0.$$

On a

$$\alpha \circ u^{k-1} \circ i_X^{k-1} = \alpha \circ i_Y^{k-1} \circ u'^{k-1} = 0.$$

Comme par hypothèse, $(\ker d_X^k, \delta_X^{k-1})$ est un conoyau de i_X^{k-1}, il existe un unique $\alpha' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker d_X^k, Z)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker d_X^{k-1} \arrow[r, "i_X^{k-1}"] \arrow[dr, "0"'] & X^{k-1} \arrow[r, "\delta_X^{k-1}"] \arrow[d, dashed, "\alpha \circ u^{k-1}"] & \ker d_X^k \arrow[dl, "\alpha'"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. De plus, on a

$$\begin{aligned}
i_X^k \circ v'^k \circ \delta_Y^{k-1} &= v^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} \\
&= v^k \circ d_Y^{k-1} \\
&= d_X^{k-1} \circ v^{k-1} \\
&= i_X^k \circ \delta_X^{k-1} \circ v^{k-1},
\end{aligned}$$

et donc,

$$v'^k \circ \delta_Y^{k-1} = \delta_X^{k-1} \circ v^{k-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\alpha' \circ v'^k \circ \delta_Y^{k-1} &= \alpha' \circ \delta_X^{k-1} \circ v^{k-1}\\ &= \alpha \circ u^{k-1} \circ v^{k-1}\\ &= \alpha - \alpha \circ s^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1} - \alpha \circ i_Y^{k-1} \circ w^{k-1}\\ &= \alpha - \alpha \circ s^k \circ i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1},\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\alpha = (\alpha \circ s^k \circ i_Y^k + \alpha' \circ v'^k) \circ \delta_Y^{k-1}.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker d_Y^{k-1} \arrow[r, "i_Y^{k-1}"] \arrow[dr, "0"'] & Y^{k-1} \arrow[r, "\delta_Y^{k-1}"] \arrow[d, "\alpha"] & \ker d_Y^k \arrow[dl, "\alpha \circ s^k \circ i_Y^k + \alpha' \circ v'^k"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

est donc commutatif, d'où le résultat. $\square$

Proposition 2.4.8. *Soit*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

un triangle distingué dans $K(\mathcal{A})$. Si X et Z sont strictement exacts en degré k, alors Y est strictement exact en degré k.

Preuve. Puisque

$$Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

est un triangle distingué, la proposition 2.4.7 nous permet de supposer que Y est le mapping cone de $-w[-1]$. Par conséquent, on a

$$Y^k = M(-w[-1])^k = X^k \oplus Z^k$$

$$d_Y^k = d_{M(-w[-1])}^k = \begin{pmatrix} d_X^k & -w^k \\ 0 & d_Z^k \end{pmatrix}.$$

Considérons le carré

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} Z^{k-1} \arrow[r, "\delta_Z^{k-1}"] & \ker d_Z^k \\ \ker d_X^k \oplus Z^{k-1} \arrow[u, "p_{Z^{k-1}}"] \arrow[r, "\beta^k"] & \ker d_Y^k \arrow[u, "p'_{Z^k}"'] \end{tikzcd}$$

avec

i) $p_{Z^{k-1}}$ la projection canonique sur Z^{k-1},

ii) δ_Z^{k-1} donné par le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} \ker d_Z^k \arrow[r, "i_Z^k"] & Z^k \arrow[r, "d_Z^k"] & Z^{k+1} \\ & Z^{k-1} \arrow[ul, "\delta_Z^{k-1}"] \arrow[u, "d_Z^{k-1}"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

iii) p'_{Z^k} défini de la manière suivante : comme

$$\begin{aligned} p_{Z^{k+1}} \circ d_Y^k &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Z^{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^k & -w^k \\ 0 & d_Z^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & d_Z^k \end{pmatrix} \\ &= d_Z^k \circ p_{Z^k}, \end{aligned}$$

on a

$$d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k = p_{Z^{k+1}} \circ d_Y^k \circ i_Y^k = 0,$$

et par définition du noyau de d_Z^k, il existe un unique $p'_{Z^k} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker d_Y^k, \ker d_Z^k)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \ker d_Z^k \arrow[r, "i_Z^k"] & Z^k \arrow[r, "d_Z^k"] & Z^{k+1} \\ & \ker d_Y^k \arrow[ul, "p'_{Z^k}"] \arrow[u, "p_{Z^k} \circ i_Y^k"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

iv) β^k défini de la manière suivante : si

$$\beta'^k : \ker d_X^k \oplus Z^{k-1} \longrightarrow X^k \oplus Z^k = Y^k$$

est défini par

$$\beta'^k = \begin{pmatrix} i_X^k & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} d_Y^k \circ \beta'^k &= \begin{pmatrix} d_X^k & -w^k \\ 0 & d_Z^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_X^k & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_X^k \circ i_X^k & -d_X^k \circ w^{k-1} - w^k \circ d_Z^{k-1} \\ 0 & d_Z^k \circ d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $w : Z \longrightarrow X[1]$ est un morphisme de complexes.

Par définition du noyau de d_Y^k, il existe un unique

$$\beta^k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker d_X^k \oplus Z^{k-1}, \ker d_Y^k)$$

tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\ker d_Y^k \arrow[r, "i_Y^k"] & Y^k \arrow[r, "d_Y^k"] & Y^{k+1} \\
& \ker d_X^k \oplus Z^{k-1} \arrow[ul, "\beta^k"] \arrow[u, "\beta'^k"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démontrons que le carré (*) est cartésien. On a successivement

$$\begin{aligned}
i_Z^k \circ p'_{Z^k} \circ \beta^k &= p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \beta^k \\
&= p_{Z^k} \circ \beta'^k \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_X^k & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= d_Z^{k-1} \circ p_{Z^{k-1}} \\
&= i_Z^k \circ \delta_Z^{k-1} \circ p_{Z^{k-1}},
\end{aligned}$$

et le carré est donc commutatif.

Soient $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $\gamma_1 \in \mathrm{Hom}\,(W, Z^{k-1})$ et $\gamma_2 \in \mathrm{Hom}\,(W, \ker d_Y^k)$ tels que

$$\delta_Z^{k-1} \circ \gamma_1 = p'_{Z^k} \circ \gamma_2.$$

Comme $d_Y^k \circ i_Y^k \circ \gamma_2 = 0$, il vient

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{pmatrix} d_X^k & -w^k \\ 0 & d_Z^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \\ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^k \circ p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 - w^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \\ d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^k \circ p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 - w^k \circ i_Z^k \circ p'_{Z^k} \circ \gamma_2 \\ d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^k \circ p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 - w^k \circ i_Z^k \circ \delta_Z^{k-1} \circ \gamma_1 \\ d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^k \circ p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 - w^k \circ d_Z^{k-1} \circ \gamma_1 \\ d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^k \circ p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 + d_X^k \circ w^{k-1} \circ \gamma_1 \\ d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^k \circ (p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 + w^{k-1} \circ \gamma_1) \\ d_Z^k \circ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Donc, par définition du noyau de d_X^k, il existe un unique $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, \ker d_X^k)$ tel que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\ker d_X^k \arrow[r, "i_X^k"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1} \\
& W \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}
$$

(où $\psi = p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 + w^{k-1} \circ \gamma_1$) soit commutatif. Le morphisme

$$\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, \ker d_X^k \oplus Z^{k-1})$$

défini par

$$\gamma = \begin{pmatrix} \varphi \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

vérifie d'une part,

$$p_{Z^{k-1}} \circ \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Z^{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \gamma_1,$$

et d'autre part,

$$
\begin{aligned}
i_Y^k \circ \beta^k \circ \gamma &= \beta'^k \circ \gamma \\
&= \begin{pmatrix} i_X^k & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i_X^k \circ \varphi - w^{k-1} \circ \gamma_1 \\ d_Z^{k-1} \circ \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 + w^{k-1} \circ \gamma_1 - w^{k-1} \circ \gamma_1 \\ i_Z^k \circ \delta_Z^{k-1} \circ \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \\ i_Z^k \circ p'_{Z^k} \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{X^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \\ p_{Z^k} \circ i_Y^k \circ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= i_Y^k \circ \gamma_2.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
& Z^{k-1} \arrow[r, "\delta_Z^{k-1}"] & \ker d_Z^k \\
& \ker d_X^k \oplus Z^{k-1} \arrow[u, "p_{Z^{k-1}}"'] \arrow[r, "\beta^k"] & \ker d_Y^k \arrow[u, "p'_{Z^k}"'] \\
W \arrow[uur, "\gamma_1"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[urr, "\gamma_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

commute. Comme γ est le seul morphisme ayant cette propriété, le carré (*) est cartésien.

Par hypothèse, le complexe Z est strictement exact en degré k. Il en résulte que la suite

$$0 \longrightarrow \ker d_Z^{k-1} \xrightarrow{i_Z^{k-1}} Z^{k-1} \xrightarrow{\delta_Z^{k-1}} \ker d_Z^k \longrightarrow 0$$

est strictement exacte et que δ_Z^{k-1} est un épimorphisme strict. Puisque la catégorie $\mathcal{A}$ est quasi-abélienne, β^k est un épimorphisme strict. De même, X étant strictement exact en degré k, δ_X^{k-1} est un épimorphisme strict. Comme $\mathrm{id}_{Z^{k-1}}$ est aussi un épimorphisme strict, la proposition 2.3.3 montre que

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} \delta_X^{k-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^{k-1}} \end{pmatrix} : X^{k-1} \oplus Z^{k-1} \longrightarrow \ker d_X^k \oplus Z^{k-1}$$

est un épimorphisme strict. La composée de deux épimorphismes stricts étant un épimorphisme strict, $\beta^k \circ \alpha^k$ est un épimorphisme strict. Or,

$$\begin{aligned}
i_Y^k \circ \beta^k \circ \alpha^k &= \beta'^k \circ \alpha^k \\
&= \begin{pmatrix} i_X^k & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_X^{k-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^{k-1}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i_X^k \circ \delta_X^{k-1} & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_X^{k-1} & -w^{k-1} \\ 0 & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= d_Y^{k-1} \\
&= i_Y^k \circ \delta_Y^{k-1},
\end{aligned}$$

et $\delta_Y^{k-1} = \beta^k \circ \alpha^k$. Par conséquent, δ_Y^{k-1} est un épimorphisme strict et la suite courte

$$0 \longrightarrow \ker d_Y^{k-1} \xrightarrow{i_Y^{k-1}} Y^{k-1} \xrightarrow{\delta_Y^{k-1}} \ker d_Y^k \longrightarrow 0$$

est strictement exacte. Le complexe Y est donc strictement exact en degré k. □

Proposition 2.4.9. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie quasi-abélienne.*

i) *La sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{A})$ formée des complexes strictement exacts est un système nul.*

ii) *Si*

$$X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow N \longrightarrow X_1[1]$$

est un triangle distingué de $K(\mathcal{A})$ avec $X_1 \in \mathrm{Ob}(K^{\geq 1}(\mathcal{A}))$, $X_0 \in \mathrm{Ob}(K^{\leq 0}(\mathcal{A}))$ et N strictement exact alors X_1 et X_0 sont strictement exacts.

Preuve. i) résulte de la proposition précédente.

ii) Comme X_1 est fortement exact en degré négatif , X_1 est strictement exact en degré négatif et comme N est strictement exact, par la proposition précédente X_0 est strictement exact en degré négatif. Le complexe X_0 est donc strictement exact et par la proposition précédente, X_1 est strictement exact, ce qui suffit. □

Définition 2.4.10. Le système nul de $K(\mathcal{A})$ formé des complexes strictement exacts est noté $\mathcal{N}(\mathcal{A})$.

La catégorie localisée correspondante $K(\mathcal{A})/\mathcal{N}(\mathcal{A})$ est la *catégorie dérivée de $\mathcal{A}$*. On la note $D(\mathcal{A})$.

Grâce à la proposition précédente et au théorème 1.4.1, la t-structure gauche de $K(\mathcal{A})$ induit une t-structure canonique sur $D(\mathcal{A})$. On l'appellera la *t-structure gauche* *de* $D(\mathcal{A})$ et on la notera $(D^{\leq 0}(\mathcal{A}), D^{\geq 0}(\mathcal{A}))$. Son coeur sera noté $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$. Quant aux foncteurs cohomologiques correspondants, ils seront notés

$$LH^k : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{LH}(\mathcal{A}).$$

Définition 2.4.11. Si X et $Y \in \mathrm{Ob}(D(\mathcal{A}))$, posons

$$\mathrm{Ext}^k(X, Y) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[k])$$

Proposition 2.4.12. *Si*

$$Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow Y'[1]$$

est un triangle distingué dans $D(\mathcal{A})$*, pour tout* $X \in \mathrm{Ob}(D(\mathcal{A}))$*, on a les deux suites exactes longues suivantes :*

$$\ldots \mathrm{Ext}^k(X, Y') \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(X, Y'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k+1}(X, Y') \ldots$$

$$\ldots \mathrm{Ext}^k(Y'', X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(Y', X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k+1}(Y'', X) \ldots .$$

Preuve. Cela provient du fait que $\mathrm{Hom}\,(X, .)$ et $\mathrm{Hom}\,(., X)$ sont des foncteurs cohomologiques. $\square$

Proposition 2.4.13. *Soit* $X \in \mathrm{Ob}(D(\mathcal{A}))$*. Le tronqué* $\tau^{\leq n}(X)$ *(resp.* $\tau^{\geq n}(X)$*) de* X *pour la t-structure gauche de* $D(\mathcal{A})$ *est isomorphe à*

$$\ldots X^{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \ker d_X^n \longrightarrow 0 \ldots$$

où $\ker d_X^n$ *est en degré* n *(resp.*

$$\ldots 0 \longrightarrow \mathrm{coim}\, d_X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow X^{n+1} \ldots$$

où X^n *est en degré* n*).*

Preuve. Comme la t-structure de $D(\mathcal{A})$ est induite par la t-structure de $K(\mathcal{A})$, on sait que le tronqué $\tau^{\leq n}(X)$ (resp. $\tau^{\geq n}(X)$) pour la t-structure gauche de $D(\mathcal{A})$ est donné par

$$\ldots X^{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \ker d_X^n \longrightarrow 0 \ldots$$

(resp.

$$\ldots 0 \longrightarrow \ker d_X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^n \ldots).$$

Il nous reste donc à démontrer que ce dernier complexe que l'on note T_1 est isomorphe dans $D(\mathcal{A})$ au complexe T_2

$$\ldots 0 \longrightarrow \mathrm{coim}\, d_X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow X^{n+1} \ldots$$

Il suffit d'établir que $\tau^{\leq n}(T_1) \simeq \tau^{\leq n}(T_2)$ car $\tau^{\geq n+1}(T_1) \simeq \tau^{\geq n+1}(T_2)$ et par le corollaire 1.1.8, on aura l'isomorphisme de triangles distingués suivant.

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq n}(T_1) \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] \arrow[d] & \tau^{\geq n+1}(T_1) \arrow[r] \arrow[d] & \tau^{\leq n}(T_1)[1] \arrow[d] \\
\tau^{\leq n}(T_2) \arrow[r] & T_2 \arrow[r] & \tau^{\geq n+1}(T_2) \arrow[r] & \tau^{\leq n}(T_2)[1]
\end{tikzcd}$$

Il nous suffit donc de démontrer que le morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker d_X^{n-1} \arrow[r, "i_X^{n-1}"] \arrow[d] & X^{n-1} \arrow[r, "\delta_X^{n-1}"] \arrow[d, "q_X^{n-1}"] & \ker d_X^n \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\ker d_X^n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \operatorname{coim} d_X^{n-1} \arrow[r, "\delta_X'^{n-1}"] & \ker d_X^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

appartient à $\mathcal{S}(\mathcal{N}(\mathcal{A}))$, i.e., que le mapping cone de ce morphisme donné explicitement par

$$0 \longrightarrow \ker d_X^{n-1} \xrightarrow{-i_X^{n-1}} X^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\delta_X^{n-1} \\ q_X^{n-1} \end{pmatrix}} \ker d_X^n \oplus \operatorname{coim} d_X^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta_X'^{n-1} \end{pmatrix}} \ker d_X^n \longrightarrow 0$$

($\ker d_X^n$ en degré n) est strictement exact.

Par l'exemple 2.4.3, la suite

$$0 \longrightarrow \ker d_X^{n-1} \xrightarrow{-i_X^{n-1}} X^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\delta_X^{n-1} \\ q_X^{n-1} \end{pmatrix}} \ker d_X^n \oplus \operatorname{coim} d_X^{n-1}$$

est strictement exacte car $(\ker d_X^{n-1}, -i_X^{n-1})$ est un noyau de $\begin{pmatrix} -\delta_X^{n-1} \\ q_X^{n-1} \end{pmatrix}$.

De plus, en degré $n-1$, on doit établir que

$$\operatorname{coim} \begin{pmatrix} -\delta_X^{n-1} \\ q_X^{n-1} \end{pmatrix} \simeq \ker \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta_X'^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Or, comme

$$\operatorname{coim} \begin{pmatrix} -\delta_X^{n-1} \\ q_X^{n-1} \end{pmatrix} \simeq \operatorname{coker} i_X^{n-1} \simeq \operatorname{coim} d_X^{n-1},$$

il suffit de démontrer que $\left(\operatorname{coim} d_X^{n-1}, \begin{pmatrix} -\delta_X'^{n-1} \\ \mathrm{id}_{\operatorname{coim} d_X^{n-1}} \end{pmatrix}\right)$ est un noyau de $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta_X'^{n-1} \end{pmatrix}$.

Soient $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : W \longrightarrow \ker d_X^n \oplus \operatorname{coim} d_X^{n-1}$$

tels que

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta_X'^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f + \delta_X'^{n-1} \circ g = 0.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coim} d_X^{n-1} \arrow[rr, "\begin{pmatrix} -\delta'^{n-1}_X \\ \mathrm{id}_{\operatorname{coim} d_X^{n-1}} \end{pmatrix}"] & & \ker d_X^n \oplus \operatorname{coim} d_X^{n-1} \arrow[rr, "\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta'^{n-1}_X \end{pmatrix}"] & & \ker d_X^n \\
& & W \arrow[ull, "g"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

est donc commutatif, ce qui suffit.

Finalement,

$$\ker d_X^n \oplus \operatorname{coim} d_X^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta'^{n-1}_X \end{pmatrix}} \ker d_X^n \longrightarrow 0$$

est strictement exact car

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} \\ 0 \end{pmatrix} : \ker d_X^n \longrightarrow \ker d_X^n \oplus \operatorname{coim} d_X^{n-1}$$

est une section de $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\ker d_X^n} & \delta'^{n-1}_X \end{pmatrix}$, d'où la conclusion. □

Proposition 2.4.14. *Un complexe appartient au cœur de la t-structure gauche de $D(\mathcal{A})$ si et seulement s'il est isomorphe à un complexe de la forme*

$$A \xrightarrow{u} B$$

(B en degré 0) où u est un monomorphisme de $\mathcal{A}$.

Preuve. On sait que X appartient au cœur si et seulement si

$$X \simeq \tau^{\geq 0} \circ \tau^{\leq 0}(X).$$

Par la proposition précédente, X est isomorphe au complexe Y donné par

$$0 \longrightarrow \operatorname{coim} d_X^{-1} \xrightarrow{\delta'^{-1}_X} \ker d_X^0 \longrightarrow 0.$$

Or, $\tau^{\leq -1}(Y)$ est isomorphe à zéro dans $D(\mathcal{A})$, i.e., le complexe

$$0 \longrightarrow \ker \delta'^{-1}_X \longrightarrow 0$$

est strictement exact. Par conséquent, $\ker \delta'^{-1}_X \simeq 0$ et δ'^{-1}_X est un monomorphisme, d'où la conclusion. □

Proposition 2.4.15. *i) Si $X \in \mathrm{Ob}(C(\mathcal{A}))$ alors $LH^0(X) \simeq 0$ dans $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$ si et seulement si X est strictement exact en degré zéro.*

ii) Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{A}$, alors f est un épimorphisme dans $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$ si et seulement si f est un épimorphisme strict.

Preuve. i) Par définition du cœur $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$, $LH^0(X) \simeq 0$ si et seulement si le complexe

$$0 \longrightarrow \operatorname{coim} d_X^{-1} \xrightarrow{\delta_X'^{-1}} \ker d_X^0 \longrightarrow 0$$

est strictement exact, donc, si et seulement si $\operatorname{coim} d_X^{-1} \simeq \ker d_X^0$ car $\delta_X'^{-1}$ est un monomorphisme.

ii) Par le lemme 1.3.14, f est un épimorphisme si et seulement si

$$\operatorname{coker} f \simeq LH^0(M(f)) \simeq 0$$

dans $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$, donc, si et seulement si $M(f)$ est strictement exact en degré 0. Comme $M(f)$ est donné par

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

avec B en degré 0, la conclusion s'ensuit aussitôt. □

2.5. Dérivation des foncteurs entre catégories quasi-abéliennes

Dans cette section, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie quasi-abélienne.

Définition 2.5.1. Un objet P de $\mathcal{A}$ est *projectif* si pour tout épimorphisme strict $u : E \longrightarrow F$ de $\mathcal{A}$, et pour tout $v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, F)$, il existe $v' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, E)$ tel que $u \circ v' = v$. Schématiquement, on a

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \\ & P \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, "v'"] \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathcal{A}$ a *assez de projectifs* si pour tout $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$, il existe un épimorphisme strict $u : P \longrightarrow A$ avec P projectif.

Par dualité, un objet I de $\mathcal{A}$ est *injectif* si pour tout monomorphisme strict $u : E \longrightarrow F$ de $\mathcal{A}$, et pour tout $v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(E, I)$, il existe $v' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(F, I)$ tel que $v' \circ u = v$. Schématiquement, on a

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & F \arrow[dl, "v'"] \\ I & \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathcal{A}$ a *assez d'injectifs* si pour tout $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$, il existe un monomorphisme strict $u : A \longrightarrow I$ avec I injectif.

Proposition 2.5.2. *Si P_1 et P_2 sont deux objets de $\mathcal{A}$, $P_1 \oplus P_2$ est projectif si et seulement si P_1 et P_2 sont projectifs.*

Preuve. La condition est nécessaire. En effet, soit $u : E \longrightarrow F$ un épimorphisme strict de $\mathcal{A}$. Puisque l'application

$$\mathrm{Hom}\,(P_1 \oplus P_2, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(P_1 \oplus P_2, u)} \mathrm{Hom}\,(P_1 \oplus P_2, F)$$

est surjective et comme

$$\mathrm{Hom}\,(P_1 \oplus P_2, E) \simeq \mathrm{Hom}\,(P_1, E) \oplus \mathrm{Hom}\,(P_2, E)$$

$$\mathrm{Hom}\,(P_1 \oplus P_2, F) \simeq \mathrm{Hom}\,(P_1, F) \oplus \mathrm{Hom}\,(P_2, F),$$

les applications

$$\mathrm{Hom}\,(P_1, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(P_1, u)} \mathrm{Hom}\,(P_1, F)$$

$$\mathrm{Hom}\,(P_2, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(P_2, u)} \mathrm{Hom}\,(P_2, F)$$

sont surjectives et P_1, P_2 sont donc projectifs.

La suffisance de la condition s'établit de manière analogue. □

Proposition 2.5.3. *Une suite strictement exacte*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} P \longrightarrow 0$$

avec P projectif est scindée.

Preuve. Par l'exemple 2.2.2, il suffit de démontrer que la suite est fortement exacte. Comme u est un noyau de v, il suffit de démontrer que v a une section. Comme v est un épimorphisme strict et que P est projectif, il existe $v' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, B)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "v"] & P \\
& P \arrow[u, "\mathrm{id}_P"'] \arrow[ul, "v'"]
\end{tikzcd}$$

commute, ce qui suffit. □

Lemme 2.5.4. *Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, pour tout $C \in \mathrm{Ob}(C^-(\mathcal{A}))$, il existe un morphisme*

$$u : P \longrightarrow C$$

de $\mathcal{S}(\mathcal{N}(\mathcal{A}))$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, P^k soit projectif et

$$u^k : P^k \longrightarrow C^k$$

soit un épimorphisme strict.

Preuve. On peut supposer que $C^k = 0$ pour $k > 0$. Par commodité d'écriture, posons $C_k := C^{-k}$. Construisons le complexe P et le morphisme u par récurrence. Pour $k < 0$, prenons $P_k = 0$ et $u_k = 0$. Supposons avoir construit P_k, u_k, d_k^P de sorte que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "u_k"] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "u_{k-1}"] & \dots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "u_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_k \arrow[r] & C_{k-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit un morphisme de complexes dont le mapping cone est strictement exact en chaque degré supérieur ou égal à $-k$ et que chaque $u_l : P_l \longrightarrow C_l$ $(0 \leq l \leq k)$ soit un épimorphisme strict avec P_l projectif. Nous notons $u(k) : P(k) \longrightarrow C(k)$ le morphisme ci-dessus.

Formons le carré cartésien(cf. 0.1.18)

$$\begin{tikzcd}
C_{k+1} \arrow[r, "\delta_{k+1}^C"] & \ker d_k^C \\
C'_{k+1} \arrow[r, "v"] \arrow[u, "v'"] & \ker d_k^P \arrow[u, "u'_k"]
\end{tikzcd}$$

où δ_{k+1}^C et u'_k sont donnés respectivement par les diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{tikzcd}
\ker d_k^C \arrow[r, "i_k^C"] & C_k \arrow[r, "d_k^C"] & C_{k-1} \\
& C_{k+1} \arrow[ul, "\delta_{k+1}^C"] \arrow[u, "d_{k+1}^C"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\ker d_k^C \arrow[r, "i_k^C"] & C_k \arrow[r, "d_k^C"] & C_{k-1} \\
& \ker d_k^P \arrow[ul, "u'_k"] \arrow[u, "u_k \circ i_k^P"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, il existe un épimorphisme strict

$$w : P_{k+1} \longrightarrow C'_{k+1}$$

avec P_{k+1} projectif. Posons

$$d_{k+1}^P = i_k^P \circ v \circ w, \qquad u_{k+1} = v' \circ w,$$

et démontrons que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_{k+1} \arrow[r, "d_{k+1}^P"] \arrow[d, "u_{k+1}"] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "u_k"] & \dots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "u_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "d_{k+1}^C"] & C_k \arrow[r] & \dots \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est un morphisme de complexes dont le mapping cone est strictement exact en chaque degré supérieur ou égal à $-(k+1)$ et chaque $u_l : P_l \longrightarrow C_l$ $(0 \leq l \leq k+1)$ est un épimorphisme strict avec P_l projectif. Comme on a

$$\begin{aligned} d^C_{k+1} \circ u_{k+1} &= d^C_{k+1} \circ v' \circ w \\ &= i^C_k \circ \delta^C_{k+1} \circ v' \circ w \\ &= i^C_k \circ u'_k \circ v \circ w \\ &= u_k \circ i^P_k \circ v \circ w \\ &= u_k \circ d^P_{k+1}, \end{aligned}$$

et

$$d^P_k \circ d^P_{k+1} = d^P_k \circ i^P_k \circ v \circ w = 0,$$

on a bien construit un morphisme de complexes. Vu l'hypothèse de récurrence, son mapping cone est strictement exact en chaque degré supérieur ou égal à $-k$. Il sera strictement exact en degré $-(k+1)$ si la suite

$$P_{k+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ -d^P_{k+1} \end{pmatrix}} C_{k+1} \oplus P_k \xrightarrow{\begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix}} C_k \oplus P_{k-1}$$

est strictement exacte.

La suite ci-dessus est strictement exacte si et seulement si

$$\alpha : P_{k+1} \longrightarrow \ker \begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix}$$

défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \ker \begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix} \arrow[r, "i"] & C_{k+1} \oplus P_k \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix}"] & C_k \oplus P_{k-1} \\ & P_{k+1} \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ -d^P_{k+1} \end{pmatrix}"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

est un épimorphisme strict.

Remarquons que $(C'_{k+1}, \begin{pmatrix} v' \\ -i_k^P \circ v \end{pmatrix})$ est un noyau de $\begin{pmatrix} d_{k+1}^C & u_k \\ 0 & -d_k^P \end{pmatrix}$. En effet, soit

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : W \longrightarrow C_{k+1} \oplus P_k$$

tel que

$$\begin{pmatrix} d_{k+1}^C & u_k \\ 0 & -d_k^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{k+1}^C \circ f + u_k \circ g \\ -d_k^P \circ g \end{pmatrix} = 0.$$

Par définition du noyau de d_k^P, il existe un unique morphisme $g' : W \longrightarrow \ker d_k^P$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker d_k^P \arrow[r, "i_k^P"] & P_k \arrow[r, "d_k^P"] & P_{k-1} \\
& W \arrow[ul, "g'"] \arrow[u, "g"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= d_{k+1}^C \circ f + u_k \circ g \\ &= d_{k+1}^C \circ f + u_k \circ i_k^P \circ g' \\ &= i_k^C \circ \delta_{k+1}^C \circ f + i_k^C \circ u'_k \circ g', \end{aligned}$$

et donc, $\delta_{k+1}^C \circ f = -u'_k \circ g'$. Par définition d'un carré cartésien, il existe un seul γ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& C_{k+1} \arrow[r, "\delta_{k+1}^C"] & \ker d_k^C \\
& C'_{k+1} \arrow[u, "v'"'] \arrow[r, "v"] & \ker d_k^P \arrow[u, "u'_k"'] \\
W \arrow[uur, "f"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[urr, "-g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C'_{k+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} v' \\ -i_k^P \circ v \end{pmatrix}"] & C_{k+1} \oplus P_k \arrow[r, "\begin{pmatrix} d_{k+1}^C & u_k \\ 0 & -d_k^P \end{pmatrix}"] & C_k \oplus P_{k-1} \\
& W \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

Soit

$$\beta : C'_{k+1} \longrightarrow \ker \begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix}$$

défini par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\ker \begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix} \arrow[r, "i"] & C_{k+1} \oplus P_k \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^C_{k+1} & u_k \\ 0 & -d^P_k \end{pmatrix}"] & C_k \oplus P_{k-1} \\
 & C'_{k+1} \arrow[ul, "\beta"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} v' \\ -i^P_k \circ v \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Il résulte de ce qui précède que β est un isomorphisme. C'est donc un épimorphisme strict. Or, il vient

$$\begin{aligned} i \circ \beta \circ w &= \begin{pmatrix} v' \\ -i^P_k \circ v \end{pmatrix} \circ w \\ &= \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ -d^P_{k+1} \end{pmatrix} \\ &= i \circ \alpha, \end{aligned}$$

et donc, $\alpha = \beta \circ w$ et comme la composée de deux épimorphismes stricts est un épimorphisme strict, α est un épimorphisme strict.

Pour conclure, démontrons que u_{k+1} est un épimorphisme strict. Par hypothèse de récurrence, il existe un triangle distingué

$$P(k) \longrightarrow C(k) \longrightarrow D \longrightarrow P(k)[1]$$

avec D strictement exact en degré supérieur ou égal à $-k$. En appliquant le foncteur LH_k, on obtient la suite exacte

$$LH_k(P(k)) \longrightarrow LH_k(C(k)) \longrightarrow LH_k(D)$$

dans $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$ et comme par la proposition 2.4.15, $LH_k(D) \simeq 0$,

$$LH_k(P(k)) \longrightarrow LH_k(C(k))$$

est un épimorphisme dans $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$. On en déduit que

$$u'_k : \ker d^P_k \longrightarrow \ker d^C_k$$

est un épimorphisme dans $\mathcal{LH}(\mathcal{A})$. Par la proposition 2.4.15, u'_k est donc un épimorphisme strict dans $\mathcal{A}$. La catégorie $\mathcal{A}$ étant quasi-abélienne, v' est un épimorphisme strict, et par composition, u_{k+1} est un épimorphisme strict, d'où la conclusion. $\square$

Proposition 2.5.5. *Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors le foncteur canonique*

$$J : K^-(\mathcal{P}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$$

(où $\mathcal{P}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets projectifs) est une équivalence de catégories. Il existe donc un foncteur

$$J' : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow K^-(\mathcal{P})$$

tel que $J \circ J' \simeq \mathrm{id}_{D^-(\mathcal{A})}$ et $J' \circ J \simeq \mathrm{id}_{K^-(\mathcal{P})}$.

Preuve. Par le lemme précédent, le foncteur J est essentiellement surjectif. Démontrons qu'il est pleinement fidèle. Nous allons appliquer la proposition 1.2.9 pour démontrer que le foncteur

$$J'' : K^-(\mathcal{P})/\mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Ob}(K^-(\mathcal{P})) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$$

est pleinement fidèle. Pour cela, il suffit de montrer que si X, Y sont deux objets de $\mathrm{Ob}(K^-(\mathcal{A}))$ et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{S}(\mathcal{N}(\mathcal{A}))$ alors il existe un morphisme $u : P \longrightarrow X$ avec $P \in K^-(\mathcal{P})$ tel que $f \circ u \in \mathcal{S}(\mathcal{N}(\mathcal{A}))$. Cela résulte du lemme précédent.

Pour conclure, il suffit d'établir que $\mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Ob}(K^-(\mathcal{P})) = 0$. Soit P un complexe de $\mathrm{Ob}(K^-(\mathcal{P}))$ strictement exact. Par la proposition 2.2.7, il suffit de démontrer que P est fortement exact, i.e., pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la suite

$$0 \longrightarrow \ker d_k^P \longrightarrow P_k \longrightarrow \ker d_{k-1}^P \longrightarrow 0$$

est scindée. Pour cela, il suffit que $\ker d_k^P$ soit projectif pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Démontrons donc par récurrence que $\ker d_k^P$ est projectif. C'est évident pour $k << 0$. Supposons que $\ker d_{k-1}^P$ est projectif. Comme la suite

$$0 \longrightarrow \ker d_k^P \longrightarrow P_k \longrightarrow \ker d_{k-1}^P \longrightarrow 0$$

est strictement exacte, elle est scindée et, par la proposition 2.5.2, $\ker d_k^P$ est projectif. □

Définition 2.5.6. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux catégories quasi-abéliennes et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur additif. Soient les foncteurs naturels

$$Q : K^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$$

$$Q' : K^-(\mathcal{A}') \longrightarrow D^-(\mathcal{A}').$$

Un *foncteur dérivé à gauche de F* est la donnée d'un couple (T, s) où

$$T : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A}')$$

est un foncteur de catégories triangulées, et

$$s : T \circ Q \longrightarrow Q' \circ K^-(F)$$

est un morphisme de foncteurs tel que pour tout couple (T', t) où

$$T' : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A}')$$

$$t : T' \circ Q \longrightarrow Q' \circ K^-(F),$$

il existe un unique morphisme de foncteurs $\alpha : T' \longrightarrow T$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} T \circ Q \arrow[dr, "s"] & \\ T' \circ Q \arrow[u, "\alpha \circ \mathrm{id}_Q"] \arrow[r, "t"] & Q' \circ K^-(F) \end{tikzcd}$$

Lemme 2.5.7. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux catégories triangulées, $\mathcal{N}$ un système nul de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$. Supposons que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$ et $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Soient F et G deux foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ tels que $F(s)$ soit un isomorphisme pour tout $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Alors,*

$$\mathrm{Hom}\,(F, G) \simeq \mathrm{Hom}\,(F \circ I, G \circ I)$$

où I est l'injection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{A}$.

Preuve. Démontrons d'abord l'injectivité. Soit

$$\alpha : F \longrightarrow G$$

tel que pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$, $\alpha(X') = 0$. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$ et $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Comme α est un morphisme de foncteurs, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] & G(X) \\ F(X') \arrow[u, "F(s)"] \arrow[r, "0"] & G(X') \arrow[u, "G(s)"'] \end{tikzcd}$$

commute et comme $F(s)$ est un isomorphisme, $\alpha(X)$ est nul, ce qui établit l'injectivité.

Démontrons à présent la surjectivité. Si

$$\alpha' : F \circ I \longrightarrow G \circ I$$

est un morphisme de foncteurs, construisons un morphisme de foncteurs

$$\alpha : F \longrightarrow G$$

tel que $\alpha \circ \mathrm{id}_I = \alpha'$. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$ et $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X)$, $s \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Comme $F(s)$ est un isomorphisme, définissons

$$\alpha(X) = G(s) \circ \alpha'(X') \circ F(s)^{-1}.$$

Vérifions que $\alpha(X)$ ne dépend pas du choix de s. Supposons qu'il existe $X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$ et $s' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'', X)$, $s' \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Par la proposition 1.2.2 il existe s'' et s''' deux morphismes de $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X''' \arrow[r, "s'''"] \arrow[d, "s''"] & X'' \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

soit commutatif. De plus, il existe $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$ et $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X''')$, $t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "s''' \circ t"] \arrow[d, "s'' \circ t"] & X'' \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

est donc commutatif. Posons $t' = s \circ s'' \circ t \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ et démontrons que

$$G(s) \circ \alpha'(X') \circ F(s)^{-1} = G(t') \circ \alpha'(Y) \circ F(t')^{-1}.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[rrr, "\alpha'(Y)"] \arrow[dr, "F(t')"] \arrow[ddr, "F(s'' \circ t)"'] & & & G(Y) \arrow[dl, "G(t')"'] \arrow[ddl, "G(s'' \circ t)"] \\ & F(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] & G(X) & \\ & F(X') \arrow[u, "F(s)"] \arrow[r, "\alpha'(X')"] & G(X') \arrow[u, "G(s)"'] & \end{tikzcd}$$

Il vient

$$\begin{aligned} & G(t') \circ \alpha'(Y) \circ F(t')^{-1} \\ & \quad = G(s) \circ G(s'' \circ t) \circ \alpha'(Y) \circ (F(s) \circ F(s'' \circ t))^{-1} \\ & \quad = G(s) \circ G(s'' \circ t) \circ \alpha'(Y) \circ F(s'' \circ t)^{-1} \circ F(s)^{-1} \\ & \quad = G(s) \circ \alpha'(X') \circ F(s)^{-1}. \end{aligned}$$

De même,

$$G(s') \circ \alpha'(X'') \circ F(s')^{-1} = G(t') \circ \alpha'(Y) \circ F(t')^{-1}.$$

Ainsi, $\alpha(X)$ ne dépend pas du choix de s.

Finalement, par construction de α, on vérifie directement que si $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$, $\alpha(X') = \alpha'(X')$ et donc, $\alpha \circ \mathrm{id}_I = \alpha'$. $\square$

Proposition 2.5.8. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux catégories quasi-abéliennes et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur additif. Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, si J' est le foncteur défini dans la proposition 2.5.5, et si I est l'injection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{A}$ alors*

$$T = Q' \circ K^-(F) \circ I \circ J' : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A}')$$

est un foncteur dérivé à gauche de F.

Preuve. Construisons le morphisme de foncteurs

$$s : T \circ Q \longrightarrow Q' \circ K^-(F).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} T \circ Q \circ I &\simeq T \circ J \\ &\simeq Q' \circ K^-(F) \circ I \circ J' \circ J \\ &\simeq Q' \circ K^-(F) \circ I, \end{aligned}$$

et par le lemme précédent

$$\mathrm{Hom}\,(T \circ Q, Q' \circ K^-(F)) \simeq \mathrm{Hom}\,(T \circ Q \circ I, Q' \circ K^-(F) \circ I),$$

ce qui assure l'existence du morphisme s. Considérons un couple (T', t) où

$$T' : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A}')$$

$$t : T' \circ Q \longrightarrow Q' \circ K^-(F),$$

et démontrons qu'il existe un unique morphisme de foncteurs $\alpha : T' \longrightarrow T$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} T \circ Q \arrow[dr, "s"] & \\ T' \circ Q \arrow[u, "\alpha \circ \mathrm{id}_Q"] \arrow[r, "t"] & Q' \circ K^-(F) \end{tikzcd}$$

Comme on a le morphisme de foncteurs

$$t \circ \mathrm{id}_I : T' \circ Q \circ I \longrightarrow Q' \circ K^-(F) \circ I,$$

et comme d'une part,

$$T' \circ Q \circ I \simeq T' \circ J$$

et d'autre part,

$$s \circ \mathrm{id}_I : T \circ J \longrightarrow Q' \circ K^-(F) \circ I$$

est un isomorphisme, il existe un morphisme de foncteurs $\alpha : T' \longrightarrow T$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \circ Q \circ I & \\ T' \circ Q \circ I \arrow[u, "\alpha \circ \mathrm{id}_Q \circ \mathrm{id}_I"] \arrow[r, "t \circ \mathrm{id}_I"] & Q' \circ K^-(F) \circ I \arrow[ul, "s \circ \mathrm{id}_I"'] \end{tikzcd}$$

commute. Par le lemme précédent, le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \circ Q & \\ T' \circ Q \arrow[u, "\alpha \circ \mathrm{id}_Q"] \arrow[r, "t"] & Q' \circ K^-(F) \arrow[ul, leftarrow, "s"'] \end{tikzcd}$$

est donc commutatif. Pour conclure, établissons l'unicité de α. Soit $\alpha' : T' \longrightarrow T$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \circ Q \circ I & \\ T' \circ Q \circ I \arrow[u, "\alpha' \circ \mathrm{id}_Q \circ \mathrm{id}_I"] \arrow[r, "t \circ \mathrm{id}_I"] & Q' \circ K^-(F) \circ I \arrow[ul, "s \circ \mathrm{id}_I"'] \end{tikzcd}$$

commute. Comme $s \circ \mathrm{id}_I$ est un isomorphisme $\alpha = \alpha'$. $\square$

CHAPITRE 3

Application aux espaces de Banach

3.1. Algèbre homologique pour les espaces de Banach

Définition 3.1.1. La *catégorie des espaces de Banach* a pour objets les espaces de Banach et pour morphismes entre deux espaces de Banach E et F, les applications linéaires continues, i.e., les applications linéaires u de E dans F pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E \qquad \forall x \in E.$$

On note $\mathcal{B}an$ cette nouvelle catégorie.

Il résulte de la définition précédente que $u : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme dans $\mathcal{B}an$ si et seulement s'il existe des constantes C et C' strictement positives telles que $\forall e \in E$

$$\|u(e)\|_F \leq C \|e\|_E$$

et

$$\|e\|_E \leq C' \|u(e)\|_F .$$

Proposition 3.1.2. *La catégorie $\mathcal{B}an$ est additive.*

Preuve. Il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}an}(E, F)$ posséde une structure naturelle de groupe abélien et que la composition est bi-additive. Il nous reste à établir qu'elle admet des produits finis.

Pour cela, démontrons que si E et F sont deux espaces de Banach, l'espace

$$E \times F = \{(e, f) : e \in E, f \in F\}$$

muni de la norme

$$\|(e, f)\|_{E\times F} = \sup(\|e\|_E , \|f\|_F)$$

est un produit de E et F. Bien sûr, $E \times F$ est un espace de Banach. De plus, si W est un espace de Banach et si $\alpha : W \longrightarrow E$, $\beta : W \longrightarrow F$ sont deux applications linéaires continues, alors l'application

$$\gamma : W \longrightarrow E \times F \qquad w \longmapsto (\alpha(w), \beta(w))$$

est linéaire, continue et rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} & E & \\ W \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & & E \times F \arrow[ul, "p_E"'] \arrow[dl, "p_F"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme γ est la seule application à avoir ces propriétés, on en déduit que $E \times F$ est un produit de E et F. □

Remarque 3.1.3. Sur $E \oplus F$, les normes

$$\|(e, f)\| = \sup(\|e\|_E, \|f\|_F)$$

et

$$\|(e, f)\| = \|e\| + \|f\|$$

sont équivalentes.

Rappelons que si F est un sous-espace linéaire fermé de l'espace de Banach E, alors F muni de la norme induite par celle de E est un espace de Banach. De plus, l'espace quotient E/F muni de la norme quotient définie par

$$\|[e]\|_{E/F} = \inf_{f \in F} \|e + f\|_E$$

est de Banach.

Proposition 3.1.4. *Soient E et F deux espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.*

i) $\ker u \simeq u^{-1}(0)$ *où la norme de $u^{-1}(0)$ est induite par celle de E.*
ii) $\operatorname{coker} u \simeq F/\overline{u(E)}$ *où $F/\overline{u(E)}$ est muni de la norme quotient.*
iii) $\operatorname{im} u \simeq \overline{u(E)}$ *où la norme de $\overline{u(E)}$ est induite par celle de F.*
iv) $\operatorname{coim} u \simeq u(E)$ *où*

$$\|f\|_{u(E)} = \inf_{u(e)=f} \|e\|_E .$$

Preuve. i) Soient $G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}an)$ et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}an}(G, E)$ tels que $u \circ v = 0$. Par conséquent, $v(G) \subset u^{-1}(0)$ et l'application

$$v' : G \longrightarrow u^{-1}(0) \qquad g \longmapsto v(g)$$

est bien définie, linéaire, continue et rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} u^{-1}(0) \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "u"] & F \\ & G \arrow[ul, "v'"] \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme v' est la seule application à jouir de ces propriétés, $(u^{-1}(0), i)$ est un noyau de u.

ii) Soient $G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}an)$ et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}an}(F, G)$ tels que $v \circ u = 0$. Comme $v^{-1}(0)$ est un sous-espace fermé de F, $\overline{u(E)} \subset v^{-1}(0)$. Il existe donc une seule application linéaire continue $v' : F/\overline{u(E)} \longrightarrow G$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "0"'] & F \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"] & F/\overline{u(E)} \arrow[dl, "v'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

commutatif.

iii) est évident vu i) et ii).

iv) Comme le sous-espace $u^{-1}(0)$ est fermé, on a

$$\mathrm{coim}\, u \simeq E/u^{-1}(0).$$

On vérifie facilement que l'application

$$u' : E/u^{-1}(0) \longrightarrow u(E) \qquad [e] \longmapsto u(e)$$

est bijective. Il nous reste à vérifier l'équivalence des normes. Si $e_0 \in E$, il vient

$$\begin{aligned} \|[e_0]\|_{\mathrm{coim}\, u} &= \|[e_0]\|_{E/u^{-1}(0)} \\ &= \inf_{e \in u^{-1}(0)} \|e_0 + e\|_E \\ &= \inf_{u(e)=0} \|e_0 + e\|_E \\ &= \inf_{u(e')=u(e_0)} \|e'\|_E \\ &= \|u(e_0)\|_{u(E)} . \end{aligned}$$

Comme u' est une bijection, cela suffit. □

Corollaire 3.1.5. *Soient E et F deux espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.*

i) *u est un monomorphisme si et seulement si u est injectif.*

ii) *u est un épimorphisme si et seulement si u est d'image dense.*

iii) *u est strict si et seulement si une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

a) *u est relativement ouvert, i.e., il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\inf_{e' \in u^{-1}(0)} \|e + e'\| \leq C \|u(e)\| \qquad \forall e \in E,$$

b) *$u(E)$ est fermé.*

Preuve. i) et ii) sont des conséquences immédiates de la proposition précédente.

iii) Supposons que u soit strict. Par la proposition précédente, le morphisme canonique

$$E/u^{-1}(0) \longrightarrow \overline{u(E)}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach. Par conséquent, $u(E) = \overline{u(E)}$ et les normes

$$\|f\|_{u(E)} = \inf_{u(e)=f} \|e\|_E \quad \text{et} \quad \|f\|_{\overline{u(E)}} = \|f\|_F$$

sont équivalentes. En particulier, il existe $C > 0$ tel que

$$\|u(e)\|_{u(E)} \leq C \|u(e)\|_F .$$

Il en résulte que

$$\inf_{e' \in u^{-1}(0)} \|e + e'\|_E \leq C \|u(e)\|_F$$

et u est relativement ouvert.

La réciproque est immédiate.

L'équivalence des conditions a) et b) résulte d'un théorème célèbre de Banach (cf. [**2**, IV §4 no. 2]). □

Corollaire 3.1.6. *Soient E et F deux espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.*

i) *u est un monomorphisme strict si et seulement si u est injectif et s'il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\|e\|_E \leq C \|u(e)\|_F \qquad \forall e \in E.$$

ii) *u est un épimorphisme strict si et seulement si u est surjectif et s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\inf_{u(e)=f} \|e\|_E \leq C \|f\|_F .$$

Preuve. C'est immédiat. □

Proposition 3.1.7. *La catégorie $\mathcal{B}an$ est quasi-abélienne.*

Preuve. Décomposons la preuve en deux étapes.

i) Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \\ E' \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & F' \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

où u est un épimorphisme strict, et démontrons que u' est un épimorphisme strict. Rappelons que

$$\begin{aligned} E' &= \ker \begin{pmatrix} u & -v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & -v \end{pmatrix}^{-1}(0) \\ &= \{(e, f') : u(e) = v(f')\}, \end{aligned}$$

et que si $i : \ker \begin{pmatrix} u & -v \end{pmatrix} \longrightarrow E \oplus F'$ est l'injection canonique, on a

$$v' = p_E \circ i, \qquad u' = p_{F'} \circ i.$$

L'application u' est surjective. En effet, si $f' \in F'$, comme u est surjectif, il existe $e \in E$ tel que $u(e) = v(f')$. Par conséquent, $(e, f') \in E'$ et

$$u'(e, f') = f'.$$

De plus,

$$u'^{-1}(0) = \{(e, 0) : u(e) = 0\},$$

et pour tout $(e, f') \in E'$, il vient

$$\begin{aligned} \inf_{(e',0) \in u'^{-1}(0)} \|(e, f') + (e', 0)\|_{E'} &= \inf_{e' \in u^{-1}(0)} \|(e + e', f')\|_{E \oplus F'} \\ &\leq C(\inf_{e' \in u^{-1}(0)} \|e + e'\|_E + \|f'\|_{F'}) \\ &\leq C' \|u(e)\|_F + C \|f'\|_{F'} \\ &\leq C' \|v(f)\|_F + C \|f'\|_{F'} \\ &\leq C'' \|f'\|_{F'} . \end{aligned}$$

On en déduit que u' est un épimorphisme strict.

Considérons un carré co-cartésien

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "u'"] & F' \\ E \arrow[u, "v"] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "v'"'] \end{tikzcd}$$

où u est un monomorphisme strict, et démontrons que u' est un monomorphisme strict. Notons $\alpha = \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$ et rappelons que

$$F' = \operatorname{coker} \alpha = (E' \oplus F)/\overline{\alpha(E)},$$

et que si $q : E' \oplus F \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha$ est le morphisme canonique, on a

$$u' = q \circ i_{E'}, \qquad v' = q \circ i_F.$$

Comme u est un monomorphisme strict, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|e\|_E \leq C \|u(e)\|_F \qquad \forall e \in E.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|e\|_E &\leq C \sup(\|v(e)\|_{E'}, \|-u(e)\|_F) \\ &\leq C \|\alpha(e)\|_{E' \oplus F} \qquad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Ainsi, α est un monomorphisme strict et son image est fermée. Par conséquent,

$$F' = (E' \oplus F)/\alpha(E).$$

L'application u' est injective. En effet, soit $e' \in E'$ tel que $u'(e') = 0$. On en déduit que

$$(e', 0) \in \alpha(E),$$

et il existe donc $e \in E$ tel que

$$(e', 0) = (v(e), -u(e)).$$

Comme u est un monomorphisme, $e = 0$ et on obtient $e' = v(e) = 0$.

De plus, pour tout $e' \in E'$, on a

$$\begin{aligned} \|e'\|_{E'} &\leq \|e' + v(e)\|_{E'} + \|v(e)\|_{E'} \\ &\leq \|e' + v(e)\|_{E'} + C \|e\|_E \\ &\leq \|e' + v(e)\|_{E'} + CC' \|u(e)\|_F \\ &\leq (1 + CC') \|(e' + v(e), -u(e)\|_{E' \oplus F} \qquad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $e' \in E'$, on a

$$\begin{aligned} \|e'\|_{E'} &\leq (1 + CC') \inf_{e \in E} \|(e' + v(e), -u(e)\|_{E' \oplus F} \\ &\leq (1 + CC') \inf_{(e'', f) \in \alpha(E)} \|(e' + e'', f)\|_{E' \oplus F} \\ &\leq (1 + CC') \|[(e', 0)]\|_{F'} \\ &\leq (1 + CC') \|u'(e')\|_{F'}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que u' est un monomorphisme strict. $\square$

La catégorie dérivée de $\mathcal{B}an$ sera notée $D(\mathcal{B}an)$. Elle est munie d'une t-structure gauche canonique et les éléments du cœur gauche sont des complexes de la forme

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{u} E_0 \longrightarrow 0$$

(où E_0 est en degré 0) avec u injectif.

3.2. Espaces de Banach injectifs et projectifs

Soit I un ensemble (éventuellement infini). Rappelons que si E est un espace de Banach, les espaces $l_1(I,E)$, $l_\infty(I,E)$ définis respectivement par

$$l_1(I,E) = \{(e_i)_{i\in I} : e_i \in E, \sum_{i\in I} \|e_i\|_E < \infty\},$$

$$l_\infty(I,E) = \{(e_i)_{i\in I} : e_i \in E, \sup_{i\in I} \|e_i\|_E < \infty\},$$

et munis respectivement des normes

$$\|(e_i)_{i\in I}\|_{l_1(I,E)} = \sum_{i\in I} \|e_i\|_E\,,$$

$$\|(e_i)_{i\in I}\|_{l_\infty(I,E)} = \sup_{i\in I} \|e_i\|_E\,,$$

sont des espaces de Banach.

Pour simplifier les notations, on pose

$$l_1(I) = l_1(I,\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad l_\infty(I) = l_\infty(I,\mathbb{C}).$$

Proposition 3.2.1. *i) L'espace $l_1(I)$ est projectif.*

ii) L'espace $l_\infty(I)$ est injectif.

Preuve. i) Soient $u : E \longrightarrow F$ un épimorphisme strict et $v : l_1(I) \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Construisons une application linéaire continue $v' : l_1(I) \longrightarrow E$ telle que $u \circ v' = v$. Soit 1_j la suite définie par

$$1_j = (\delta_{ij})_{i\in I}.$$

Puisque u est un épimorphisme strict, on a

$$\begin{aligned}\inf_{u(e)=v(1_i)} \|e\|_E &\leq C\,\|v(1_i)\|_F \\ &\leq CC'\,\|1_i\|_{l_1(I)} \\ &\leq CC' \\ &< CC'+1.\end{aligned}$$

Donc, il existe $e_i \in E$ tel que

$$u(e_i) = v(1_i),$$

et $\|e_i\|_E < CC'+1$. Soit $(c_i)_{i\in I}$ une suite de $l_1(I)$. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \|c_i e_i\|_E &= \sum_{i\in I} |c_i|\,\|e_i\|_E \\ &\leq (CC'+1)\sum_{i\in I} |c_i| \\ &\leq (CC'+1)\,\|(c_i)_{i\in I}\|_{l_1(I)}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application

$$v' : l_1(I) \longrightarrow E \qquad (c_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} c_i e_i$$

est linéaire et continue.

De plus, il vient

$$\begin{aligned} u \circ v'((c_i)_{i\in I}) &= u(\sum_{i\in I} c_i e_i) \\ &= \sum_{i\in I} c_i u(e_i) \\ &= \sum_{i\in I} c_i v(1_i) \\ &= v(\sum_{i\in I} c_i (\delta_{ji})_{j\in I}) \\ &= v((c_i)_{i\in I}), \end{aligned}$$

et donc, $u \circ v' = v$.

ii) Soient $u : E \longrightarrow F$ un monomorphisme strict et $v : E \longrightarrow l_\infty(I)$ une application linéaire continue. Construisons une application linéaire continue $v' : F \longrightarrow l_\infty(I)$ telle que $v' \circ u = v$. L'application

$$v_i : E \longrightarrow \mathbb{C} \qquad e \longmapsto v(e)_i$$

est linéaire et continue car

$$\begin{aligned} |v(e)_i| &\leq \sup_{i\in I} |v(e)_i| \\ &\leq \|v(e)\|_{l_\infty(I)} \\ &\leq C\,\|e\|_E\,. \end{aligned}$$

Comme u est un monomorphisme strict, par le théorème de Hahn-Banach (cf. [**2**, II §3 no.2]), il existe une application linéaire continue $v'_i : F \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$v'_i \circ u = v_i,$$

et pour laquelle

$$|v'_i(f)| \leq C\,\|f\|_F\,.$$

Par conséquent, l'application linéaire

$$v' : F \longrightarrow l_\infty(I) \qquad f \longmapsto (v'_i(f))_{i\in I}$$

est continue car

$$\begin{aligned} \|v'(f)\|_{l_\infty(I)} &= \sup_{i\in I} |v'_i(f)| \\ &\leq C\,\|f\|_F\,. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} v' \circ u(e) &= (v'_i(u(e)))_{i\in I} \\ &= (v_i(e))_{i\in I} \\ &= (v(e)_i)_{i\in I} \\ &= v(e), \end{aligned}$$

et $v' \circ u = v$. □

Proposition 3.2.2. *La catégorie $\mathcal{B}an$ a assez de projectifs et d'injectifs.*

Preuve. i) Démontrons que $\mathcal{B}an$ a assez de projectifs. Soit E un espace de Banach. Si $B = \{e \in E : \|e\| \leq 1\}$ est la boule unité de E, l'application

$$u : l_1(B) \longrightarrow E \qquad (c_b)_{b\in B} \longmapsto \sum_{b\in B} c_b b$$

est linéaire et continue car

$$\sum_{b\in B} \|c_b b\| \leq \sum_{b\in B} |c_b| = \|(c_b)_{b\in B}\|_{l_1(B)}.$$

Montrons que u est un épimorphisme strict. Pour cela, il suffit d'établir que u est surjectif. C'est bien le cas car pour tout $e \in E \setminus \{0\}$, la suite

$$\|e\| \, 1_{\frac{e}{\|e\|}} \in l_1(B),$$

et on a

$$\begin{aligned} u(\|e\| \, 1_{\frac{e}{\|e\|}}) &= \|e\| \frac{e}{\|e\|} \\ &= e. \end{aligned}$$

Comme $l_1(B)$ est un espace projectif, $\mathcal{B}an$ a assez de projectifs.

ii) Démontrons que $\mathcal{B}an$ a assez d'injectifs.

Rappelons que E' désigne le dual de E, c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires continues muni de la norme

$$\|T\|_{E'} = \sup_{\|e\|\leq 1} |T(e)|.$$

Si $B' = \{T : |T(e)| \leq \|e\|\}$ est la boule unité de E', l'application

$$u : E \longrightarrow l_\infty(B') \qquad e \longmapsto (T(e))_{T\in B'}$$

est linéaire et continue car

$$\|u(e)\|_{l_\infty(B')} = \sup_{T\in B'} |T(e)| \leq \|e\|_E.$$

Or,

$$B^\Delta = \{T : |T(e)| \leq 1 \quad \forall e \in B\} = B',$$

et puisque B est fermé, par le théorème des bipolaires (cf. [**2**, II §6 no. 3]), on a

$$B = B^{\Delta\nabla} = B'^{\nabla},$$

et donc,

$$\begin{aligned}\{e : \|e\| \leq 1\} &= \{e : |T(e)| \leq 1 \quad \forall T \in B'\} \\ &= \{e : \sup_{T\in B'} |T(e)| \leq 1\}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|e\|_E = \sup_{T\in B'} |T(e)| = \|u(e)\|_{l_\infty(B')}.$$

Ainsi, u est un monomorphisme strict. Comme $l_\infty(B')$ est un espace injectif, $\mathcal{B}an$ a assez d'injectifs. □

Proposition 3.2.3. *i) Un espace de Banach P est projectif si et seulement s'il existe un ensemble I tel que P soit facteur direct de $l_1(I)$.*

ii)Un espace de Banach I est injectif si et seulement s'il existe un ensemble J tel que I soit facteur direct de $l_\infty(J)$.

Preuve. i) Vu 2.5.2 la condition est clairement suffisante. Démontrons qu'elle est nécessaire. Par la proposition précédente, il existe un épimorphisme strict

$$u : l_1(J) \longrightarrow P.$$

Par conséquent, la suite

$$0 \longrightarrow \ker u \longrightarrow l_1(I) \xrightarrow{u} P \longrightarrow 0$$

est strictement exacte et comme P est projectif, la proposition 2.5.3 montre que

$$l_1(I) \simeq P \oplus \ker u.$$

ii) s'établit de manière analogue. □

Définition 3.2.4. Soient X et Y deux complexes de $C(\mathcal{B}an)$. On définit le complexe $\mathrm{Hom}\,(X,Y)$ par

$$(\mathrm{Hom}\,(X,Y))^k = \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}an}(X^p, Y^{p+k})$$

et

$$dh^k = d_Y \circ h^k - (-1)^k h^k \circ d_X$$

pour tout $h^k \in (\mathrm{Hom}\,(X,Y))^k$.

Par la proposition 2.5.5, on a une équivalence de catégories

$$J_{\mathcal{P}} : K^-(\mathcal{P}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B}an)$$

de quasi-inverse $J'_{\mathcal{P}}$ et par dualité, on a une équivalence de catégories

$$J_{\mathcal{I}} : K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B}an)$$

de quasi-inverse $J'_{\mathcal{I}}$. On définit alors le foncteur

$$\mathrm{RHom} : D^-(\mathcal{B}an) \times D^+(\mathcal{B}an) \longrightarrow D^+(\mathcal{A}b)$$

par

$$\mathrm{RHom}\,(X,Y) = \mathrm{Hom}\,(J'_{\mathcal{P}}(X), J'_{\mathcal{I}}(Y))$$

pour tout $X \in \mathrm{Ob}(D^-(\mathcal{B}an))$ et pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(D^+(\mathcal{B}an))$.

3.3. Produit tensoriel et Hom interne d'espaces de Banach

Définition 3.3.1. Soient E et F deux espaces de Banach. Notons $E \otimes F$ le produit tensoriel de E et F en tant que $\mathbb{C}$-vectoriels. On sait qu'un élément h de $E \otimes F$ s'écrit comme une somme finie

$$h = \sum_{k \in K} e_k \otimes f_k$$

avec $e_k \in E$ et $f_k \in F$. Cette décomposition n'est bien sûr pas unique. Munissons $E \otimes F$ de la semi-norme

$$p(h) = \inf_{h = \sum_{k\in K} e_k \otimes f_k} (\sum_{k \in K} \|e_k\|_E \, \|f_k\|_F).$$

On définit alors le *produit tensoriel des espaces de Banach* E et F par

$$E \mathbin{\hat{\otimes}} F = E \otimes \widehat{F/p^{-1}}(0).$$

Ainsi, $E \mathbin{\hat{\otimes}} F$ est le séparé complété de $E \otimes F$ (cf. [**2**, II §1 no. 4]).

Remarque 3.3.2. Si l'application $\beta : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire et vérifie

$$\|\beta(e,f)\|_G \leq C \|e\|_E \|f\|_F \qquad \forall e \in E, \forall f \in F,$$

il résulte de la définition précédente qu'il existe une seule application linéaire continue $\alpha : E \mathbin{\hat{\otimes}} F \longrightarrow G$ telle que

$$\alpha(e \mathbin{\hat{\otimes}} f) = \beta(e,f).$$

En effet, par définition du produit tensoriel d'espaces vectoriels complexes, il existe une seule application

$$\beta' : E \otimes F \longrightarrow G$$

telle que $\beta'(e \otimes f) = \beta(e,f)$ pour tout $e \in E$ et pour tout $f \in F$. De plus, si

$$h = \sum_{k \in K} e_k \otimes f_k$$

est un élément de $E \otimes F$, on a

$$\begin{aligned} \|\beta'(h)\| &= \left\| \sum_{k\in K} \beta(e_k, f_k) \right\| \\ &\leq C \sum_{k \in K} \|e_k\| \, \|f_k\| \, . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\beta'(h)\| \leq Cp(h),$$

et β' est continu. Cette dernière relation montre également que

$$\beta'^{-1}(0) \supset p^{-1}(0).$$

Par conséquent, β' se factorise au travers d'un unique

$$\beta'' : E \otimes F/p^{-1}(0) \longrightarrow G.$$

Comme β'' est continu pour la semi-norme quotient induite par p, la construction du complété assure qu'il existe une seule application linéaire continue

$$\alpha : E \mathbin{\hat{\otimes}} F \longrightarrow G$$

rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \mathbin{\hat{\otimes}} F \arrow[dr, "\alpha"] & \\ E \otimes F/p^{-1}(0) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\beta''"] & G \end{tikzcd}$$

commutatif.

Définition 3.3.3. Dans la suite, $L(E,F)$ désignera l'espace vectoriel complexe formé des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme

$$\|u\|_{L(E,F)} = \sup_{\|e\|_E \leq 1} \|u(e)\|_F .$$

C'est bien sûr un espace de Banach.

Proposition 3.3.4. *Si E, F et G sont des espaces de Banach, alors*

$$\operatorname{Hom}(E \mathbin{\hat{\otimes}} F, G) \simeq \operatorname{Hom}(E, L(F,G)).$$

Preuve. Soit

$$\alpha : \operatorname{Hom}(E \mathbin{\hat{\otimes}} F, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(E, L(F,G))$$

le morphisme défini par

$$\alpha(u)(e)(f) = u(e \mathbin{\hat{\otimes}} f)$$

pour tout $u \in \operatorname{Hom}(E \mathbin{\hat{\otimes}} F, G)$, pour tout $e \in E$ et pour tout $f \in F$. Cette définition est licite car d'une part,

$$\alpha(u)(e) \in L(F,G).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \|\alpha(u)(e)(f)\|_G &= \left\|u(e \mathbin{\hat{\otimes}} f)\right\|_G \\ &\leq C \left\|e \mathbin{\hat{\otimes}} f\right\|_{E \hat{\otimes} F} \\ &\leq C \|e\|_E \|f\|_F . \end{aligned}$$

D'autre part, $\alpha(u)$ est continu car

$$\begin{aligned}\|\alpha(u)(e)\|_{L(E,F)} &= \sup_{\|f\|\leq 1} \|\alpha(u)(e)(f)\|_G \\ &\leq C \sup_{\|f\|\leq 1} \|e\|_E \|f\|_F \\ &\leq C \|e\|_E .\end{aligned}$$

Soit $v \in \mathrm{Hom}(E, L(F,G))$. Comme l'application

$$\beta'(v) : E \times F \longrightarrow G \qquad (e,f) \longmapsto v(e)(f)$$

est bilinéaire, et que

$$\|v(e)(f)\| \leq \|v(e)\| \|f\| \leq C \|e\| \|f\| ,$$

il résulte de la remarque 3.3.2 qu'il existe une seule application

$$\beta(v) : E \mathbin{\hat{\otimes}} F \longrightarrow G$$

telle que

$$\begin{aligned}\beta(v)(e \mathbin{\hat{\otimes}} f) &= \beta'(v)(e,f) \\ &= v(e)(f) \qquad \forall e \in E, \forall f \in F.\end{aligned}$$

Démontrons que les applications α et β sont inverses l'une de l'autre.

Soit $u \in \mathrm{Hom}(E \mathbin{\hat{\otimes}} F, G)$. On a

$$\begin{aligned}\beta(\alpha(u))(e \mathbin{\hat{\otimes}} f) &= \alpha(u)(e)(f) \\ &= u(e \mathbin{\hat{\otimes}} f),\end{aligned}$$

et donc, $\beta \circ \alpha(u) = u$.

De même, soit $v \in \mathrm{Hom}(E, L(F,G))$. On a

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(v))(e)(f) &= \beta(v)(e \mathbin{\hat{\otimes}} f) \\ &= v(e)(f),\end{aligned}$$

et donc, $\alpha \circ \beta(v) = v$, d'où la conclusion. □

Proposition 3.3.5. *Pour tout espace de Banach E, on a les isomorphismes d'espaces de Banach suivants :*

i) $l_1(I) \mathbin{\hat{\otimes}} E \simeq l_1(I,E)$,
ii) $L(l_1(I), E) \simeq l_\infty(I,E)$,
iii) $L(E, l_\infty(I)) \simeq l_\infty(I,E')$.

Preuve. Soient $(c_i)_{i\in I} \in l_1(I)$ et $e \in E$. Comme

$$\begin{aligned}\left\|(c_ie)_{i\in I}\right\|_{l_1(I,E)} &= \sum_{i\in I} \left\|c_ie\right\|_E \\ &= (\sum_{i\in I} |c_i|)\left\|e\right\|_E \\ &= \left\|(c_i)_{i\in I}\right\|_{l_1(I)} \left\|e\right\|_E ,\end{aligned}$$

il existe une seule application linéaire continue

$$\alpha : l_1(I) \hat{\otimes} E \longrightarrow l_1(I,E)$$

telle que

$$\alpha((c_i)_{i\in I} \hat{\otimes} e) = (c_ie)_{i\in I}.$$

L'application

$$\begin{aligned}\beta : l_1(I,E) &\longrightarrow l_1(I) \hat{\otimes} E \\ (e_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} 1_i \hat{\otimes} e_i\end{aligned}$$

est linéaire et continue car

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \left\|1_i \hat{\otimes} e_i\right\| &\leq \sum_{i\in I} \left\|1_i\right\|_{l_1(I)} \left\|e_i\right\|_E \\ &\leq \sum_{i\in I} \left\|e_i\right\|_E .\end{aligned}$$

De plus, les applications α et β sont inverses l'une de l'autre car d'une part,

$$\begin{aligned}\beta \circ \alpha((c_i)_{i\in I} \hat{\otimes} e) &= \beta((c_ie)_{i\in I}) \\ &= \sum_{i\in I} 1_i \hat{\otimes} c_ie \\ &= (\sum_{i\in I} c_i 1_i) \hat{\otimes} e \\ &= (c_i)_{i\in I} \hat{\otimes} e,\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta(e_i)_{i\in I} &= \alpha(\sum_{i\in I} 1_i \hat{\otimes} e_i) \\ &= \sum_{i\in I} (e_i 1_i)_{i\in I} \\ &= (e_i)_{i\in I},\end{aligned}$$

ce qui suffit.

ii) On vérifie facilement que les applications

$$\begin{aligned} \alpha : L(l_1(I), E) &\longrightarrow l_\infty(I, E) \\ u &\longmapsto (u(1_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta : l_\infty(I, E) &\longrightarrow L(l_1(I), E) \\ (f_i)_{i\in I} &\longmapsto ((c_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} c_i f_i) \end{aligned}$$

sont linéaires, continues et inverses l'une de l'autre.

iii) On vérifie facilement que les applications

$$\begin{aligned} \alpha : L(E, l_\infty(I)) &\longrightarrow l_\infty(I, E') \\ u &\longmapsto (e \longmapsto u(e)_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta : l_\infty(I, E') &\longrightarrow L(E, l_\infty(I)) \\ (u_i)_{i\in I} &\longmapsto (e \longmapsto (u_i(e))_{i\in I}) \end{aligned}$$

sont linéaires, continues et inverses l'une de l'autre. □

Corollaire 3.3.6. *i) Si P et P' sont deux espaces de Banach projectifs, alors $P \hat{\otimes} P'$ est projectif.*

ii) Si P est un espace de Banach projectif et I un espace de Banach injectif, alors $L(P, I)$ est injectif.

Preuve. i) Par la proposition 3.2.3, il existe des ensembles I et I' et des espaces de Banach K et K' tels que

$$P \oplus K \simeq l_1(I) \qquad \text{et} \qquad P' \oplus K' \simeq l_1(I').$$

Comme par la proposition précédente,

$$l_1(I) \hat{\otimes} l_1(I') \simeq l_1(I, l_1(I')) \simeq l_1(I \times I'),$$

on a

$$(P \oplus K) \hat{\otimes} (P' \oplus K') \simeq l_1(I \times I').$$

On en déduit que $P \hat{\otimes} P'$ est facteur direct de $l_1(I \times I')$, ce qui suffit.

ii) s'établit de manière analogue. □

Définition 3.3.7. Soient X et Y deux complexes de $K^-(\mathcal{B}an)$. On définit le complexe $X \hat{\otimes} Y \in K^-(\mathcal{B}an)$ par

$$(X \hat{\otimes} Y)^k = \bigoplus_{p+q=k} X^p \hat{\otimes} Y^q$$

(la somme est finie vu les hypothèses sur X et Y). La différentielle

$$d^k_{X\hat{\otimes}Y} : (X \mathbin{\hat{\otimes}} Y)^k \longrightarrow (X \mathbin{\hat{\otimes}} Y)^{k+1}$$

est la seule application qui vérifie

$$d^k_{X\hat{\otimes}Y}(x^p \mathbin{\hat{\otimes}} y^q) = d^p_X x^p \mathbin{\hat{\otimes}} y^q - (-1)^p x^p \mathbin{\hat{\otimes}} d^q_Y y^q$$

pour tout $x^p \in X^p$, pour tout $y^q \in Y^q$ tels que $p + q = k$.

Par la proposition 2.5.5, on a une équivalence de catégories

$$J_{\mathcal{P}} : K^-(\mathcal{P}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B}an)$$

de quasi-inverse $J'_{\mathcal{P}}$. On définit alors le foncteur

$$\hat{\otimes}^L : D^-(\mathcal{B}an) \times D^-(\mathcal{B}an) \longrightarrow D^-(\mathcal{B}an)$$

par

$$X \mathbin{\hat{\otimes}^L} Y = J'_{\mathcal{P}}(X) \mathbin{\hat{\otimes}} J'_{\mathcal{P}}(Y)$$

pour tout $X,Y \in \mathrm{Ob}(D^-(\mathcal{B}an))$.

Définition 3.3.8. Soient $X \in \mathrm{Ob}(K^-(\mathcal{B}an))$ et $Y \in \mathrm{Ob}(K^+(\mathcal{B}an))$. On définit le complexe $L(X,Y)$ par

$$(L(X,Y))^k = \prod_p L(X^p, Y^{p+k})$$

(le produit est fini vu les hypothèses sur X et Y). La différentielle est donnée par

$$dh^k = d_Y \circ h^k - (-1)^k h^k \circ d_X$$

pour tout $h^k \in (L(X,Y))^k$.

Par la proposition 2.5.5, on a une équivalence de catégories

$$J_{\mathcal{P}} : K^-(\mathcal{P}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B}an)$$

de quasi-inverse $J'_{\mathcal{P}}$ et par dualité, on a une équivalence de catégories

$$J_{\mathcal{I}} : K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B}an)$$

de quasi-inverse $J'_{\mathcal{I}}$. On définit alors le foncteur

$$RL : D^-(\mathcal{B}an) \times D^+(\mathcal{B}an) \longrightarrow D^+(\mathcal{B}an)$$

par

$$RL(X,Y) = L(J'_{\mathcal{P}}(X), J'_{\mathcal{I}}(Y))$$

pour tout $X \in \mathrm{Ob}(D^-(\mathcal{B}an))$ et pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(D^+(\mathcal{B}an))$.

Proposition 3.3.9. *Si X et Y sont deux complexes de $D^-(\mathcal{B}an)$ et si Z est un complexe de $D^+(\mathcal{B}an)$, alors*

$$\mathrm{RHom}\,(X \mathbin{\hat{\otimes}^L} Y, Z) \simeq \mathrm{RHom}\,(X, RL(Y,Z)).$$

Preuve. Vu le corollaire 3.3.6, $X^p \hat{\otimes} Y^q$ est projectif si X^p et Y^q le sont et $L(Y^p, Z^q)$ est injectif si Y^p est projectif et Z^q injectif. Il suffit donc de démontrer que

$$\mathrm{Hom}\,(X \hat{\otimes} Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}\,(X, L(Y, Z))$$

si X, $Y \in \mathrm{Ob}(K^-(\mathcal{P}))$ et $Z \in \mathrm{Ob}(K^+(\mathcal{I}))$.

Il vient successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}^k(X \hat{\otimes} Y, Z) &\simeq \prod_p \Big(\bigoplus_{r+s=p} X^r \hat{\otimes} Y^s, Z^{p+k}\Big) \\
&\simeq \prod_p \prod_{r+s=p} \mathrm{Hom}\,(X^r \hat{\otimes} Y^s, Z^{p+k}) \\
&\simeq \prod_r \prod_s \mathrm{Hom}\,(X^r, L(Y^s, Z^{r+s+k})) \\
&\simeq \prod_r \mathrm{Hom}\,(X^r, \prod_s L(Y^s, Z^{r+s+k})) \\
&\simeq \prod_r \mathrm{Hom}\,(X^r, (L(Y, Z))^{r+k}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}^k(X, L(Y, Z)).
\end{aligned}$$

Notons α^k la composée de ces isomorphismes. Il reste à démontrer que α^k est compatible aux différentielles. Pour ce faire, explicitons d'abord le morphisme α^k.

Remarquons que se donner un morphisme

$$u^k \in \mathrm{Hom}^k(X \hat{\otimes} Y, Z)$$

revient à se donner la famille de morphismes

$$u_p^k : \bigoplus_{r+s=p} X^r \hat{\otimes} Y^s \longrightarrow Z^{p+k}$$

ou la famille de morphismes

$$u_{r,s}^k : X^r \hat{\otimes} Y^s \longrightarrow Z^{r+s+k}.$$

De même, se donner un morphisme

$$v^k \in \mathrm{Hom}^k(X, L(Y, Z))$$

revient à se donner la famille de morphismes

$$v_r^k : X^r \longrightarrow (L(Y, Z))^{k+r}$$

ou la famille de morphismes

$$v_{r,s}^k : X^r \longrightarrow L(Y^s, Z^{k+r+s}).$$

Par la proposition 3.3.4, le morphisme

$$\alpha^k : \mathrm{Hom}^k(X \hat{\otimes} Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}^k(X, L(Y, Z))$$

est caractérisé par

$$[\alpha^k(u^k)]_{r,s}(x^r)(y^s) = u^k_{r,s}(x^r \hat{\otimes} y^s)$$

pour tout $x^r \in X^r$ et $y^s \in Y^s$. Posons $v^k = \alpha^k(u^k)$. Puisque

$$dv^k = d \circ v^k - (-1)^k v^k \circ d,$$

on a

$$\begin{aligned}[dv^k]_r(x^r) &= d(v^k_r(x^r)) - (-1)^k v^k_{r+1}(dx^r) \\ &= d \circ v^k_r(x^r) - (-1)^{k+r} v^k_r(x^r) \circ d - (-1)^k v^k_{r+1}(dx^r)\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}&[d\alpha^k(u^k)]_{rs}(x^r)(y^s) \\ &\quad = d(v^k_{r,s}(x^r)(y^s)) - (-1)^{k+r} v^k_{r,s+1}(x^r)(dy^s) - (-1)^k v^k_{r+1,s}(dx^r)(y^s) \\ &\quad = d(u^k_{r,s}(x^r \hat{\otimes} y^s)) - (-1)^{k+r} u^k_{r,s+1}(x^r \hat{\otimes} dy^s) - (-1)^k u^k_{r+1,s}(dx^r \hat{\otimes} y^s) \\ &\quad = d(u^k_{r,s}(x^r \hat{\otimes} y^s)) - (-1)^k u^k_{r+s+1}(dx^r \hat{\otimes} y^s + (-1)^r x^r \hat{\otimes} dy^s) \\ &\quad = d(u^k_{r,s}(x^r \hat{\otimes} y^s)) - (-1)^k u^k_{r+s+1}(d(x^r \hat{\otimes} y^s)) \\ &\quad = [du^k]_{r,s}(x^r \hat{\otimes} y^s) \\ &\quad = [\alpha^{k+1}(du^k)]_{r,s}(x^r)(y^s).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\alpha^{k+1}(du^k) = d(\alpha^k(u^k))$, d'où la conclusion. □

Bibliographie

1. A. A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982).
2. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques (Chapitres 1 à 5)*, Eléments de Mathématiques, Masson, Paris, 1981.
3. H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Mathematical Series **19**, Princeton University Press, 1956.
4. M. Kashiwara et P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **292**, Springer, 1990.
5. G. Laumon, *Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés*, Algebraic Geometry (M. Raynaud and T. Shioda, eds.), Lecture Notes in Mathematics **1016**, Springer, 1983, pp. 151–237.
6. S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Text in Mathematics **5**, Springer, 1971.
7. V. P. Palamodov, *Homological methods in the theory of locally convex spaces*, Russian Math. Surveys **26** (1971), 1–64.
8. F. Prosmans, *Introduction fonctionnelle de $EXT(E, F)$*, Mémoire de licence, Université de Liège, juin 1994.
9. D. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, Algebraic K-Theory I (H. Bass, ed.), Lecture Notes in Mathematics **341**, Springer, 1973, pp. 77–139.
10. J.-P. Schneiders, *Topological sheaves*, En préparation.
11. J.-L. Verdier, *Catégories dérivées. Quelques résultats (Etat 0)*, Séminaire de Géométrie Algèbrique du Bois-Marie SGA4$\frac{1}{2}$. Cohomologie étale, Lecture Notes in Mathematics **569**, Springer, 1963, pp. 262–312.

Table des Matières