UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences

INTRODUCTION FONCTIONNELLE DE $\mathrm{Ext}(E, F)$

Année académique 1993–1994

Mémoire présenté par
Fabienne PROSMANS
en vue de l'obtention
du grade de licenciée en
sciences mathématiques

Introduction

Etant donné deux espaces de Fréchet E et F, l'espace linéaire $\mathrm{Ext}(E, F)$ $(= \mathrm{Ext}^1(E, F))$ intervient lorsque l'on étudie le foncteur dérivé à droite du foncteur $L(E, \cdot)$. Ce travail est consacré à une approche fonctionnelle de l'espace $\mathrm{Ext}(E, F)$ et notre objectif est de développer via cette approche quelques résultats connus en algèbre homologique.

Décrivons succinctement les différents chapitres de cette dissertation.

Le premier chapitre est consacré à la définition de $\mathrm{Ext}(E, F)$ ainsi qu'à des rappels indispensables concernant les suites exactes, les limites projectives et la nucléarité. Ensuite, nous introduisons la notion du "splitting" et nous terminons en établissant le lien entre le "splitting" et $\mathrm{Ext}(E, F)$, c'est-à-dire en démontrant que si l'espace E est nucléaire, l'annulation de $\mathrm{Ext}(E, F)$ signifie que pour toute suite topologiquement exacte $0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$, le sous-espace $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$ est complémenté dans G, ce qui fait l'objet du principal résultat de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons brièvement que $\mathrm{Ext}(E, F)$ a été introduit en algèbre homologique pour corriger la non surjectivité de l'application q_c qui intervient dans la suite $0 \to L(E, F) \xrightarrow{i_c} L(E, G) \xrightarrow{q_c} L(E, H)$, si la suite $0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \to 0$ est topologiquement exacte et nous démontrons via l'analyse fonctionnelle un théorème relatif à $\mathrm{Ext}(E, \cdot)$ important en algèbre homologique.

Dans le troisième chapitre, nous montrons que la considération de $\mathrm{Ext}(E, F)$ est utile dans l'étude des opérateurs elliptiques à coefficients constants notamment pour démontrer que de tels opérateurs ne possèdent pas d'inverse linéaire continu à droite. Nous achevons ce travail en établissant un théorème analogue à celui du deuxième chapitre, en considérant $\mathrm{Ext}(\cdot, F)$.

Je remercie très vivement le Professeur J. Schmets qui m'a permis de réaliser ce travail dans son service, ainsi que Madame F. Bastin pour son aide précieuse lors de la rédaction et pour sa très grande disponibilité.

Je tiens également à remercier Madame Dumont qui a encodé le texte de ces notes à ma plus grande satisfaction, ainsi que mes parents qui m'ont permis de réaliser les études dont je rêvais.

F. Prosmans

Chapitre I

Définition et propriétés de $\mathrm{Ext}(E, F)$

Première partie : Définition de $\mathrm{Ext}(E, F)$

I.1 Généralités

Soient E et F deux espaces de Fréchet.

a) Si $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ définit un système de semi-normes sur F (tel que $p_m \leq p_{m+1}$ pour tout m), alors pour tout m, $L_m := \{f \in F : p_m(f) = 0\}$ forme un sous-espace linéaire de F. Par conséquent, $F/L_m = \{[f]_m : f \in F\}$ pour tout m, a un sens.

b) L'application

$$\tilde{p}_m : F/L_m \to \mathbb{R} \quad [f]_m \mapsto p_m(f)$$

définit une norme sur F/L_m.

Preuve. i) *L'application est bien définie.*
Supposons que $[f]_m = [f']_m$ avec $f, f' \in F$, c'est-à-dire $f - f' \in L_m$. Il vient $|p_m(f) - p_m(f')| \leq p_m(f - f') = 0$ par définition de L_m. Donc $p_m(f) = p_m(f')$.

(ii) $\tilde{p}_m$ *définit une norme sur* F/L_m.
On voit tout de suite qu'il s'agit d'une semi-norme. Soit alors $[f]_m \in F/L_m$ tel que $\tilde{p}_m([f]_m) = 0$. Il s'ensuit que $\tilde{p}_m([f]_m) = p_m(f) = 0$. Par conséquent, $f \in L_m$ et $[f]_m = 0$.

■

c) Vu ce qui précède, $F_m := (F/L_m, \tilde{p}_m)$ est un espace normé. De plus, il existe un espace normé complet $(\hat{F}_m, \|\cdot\|_m)$ tel que $F_m \subset \hat{F}_m$ et $\|f\|_m = \tilde{p}_m(f)$ si $f \in F_m$.

d) Considérons l'application

$$\rho_{m+1,m} : F_{m+1} \to F_m \quad [f]_{m+1} \mapsto [f]_m.$$

Cette application i) *a un sens.*
De fait, supposons que $[f]_{m+1} = [f']_{m+1}$ avec $f, f' \in F$. Donc, $f - f' \in L_{m+1} \subset L_m$ car $p_m \leq p_{m+1}$ pour tout m.

ii) *est linéaire.*
iii) *est continue.*
En effet,

$$\begin{array}{rcl}\tilde{p}_m(\rho_{m+1,m}([f]_{m+1})) & = & \tilde{p}_m([f]_m) \\ & = & p_m(f) \\ & \leq & p_{m+1}(f) = \tilde{p}_{m+1}([f]_{m+1}).\end{array}$$

e) De même, on peut considérer

$$\rho_{k,m} : F_k \to F_m \;\; [f]_k \mapsto [f]_m \quad \forall k, m,\; k \geq m.$$

Cette application a un sens, est linéaire et continue. On a encore

$$\rho_{mj} \circ \rho_{km} = \rho_{kj} \quad k > m > j.$$

En effet, soit $[f]_k \in F_k$. On a

$$\begin{array}{rcl}\rho_{mj}(\rho_{km}[f]_k) & = & \rho_{mj}([f]_m) \\ & = & [f]_j \\ & = & \rho_{kj}([f]_k).\end{array}$$

f) Soit l'application

$$\rho_m : F \to F_m \quad e \mapsto [e]_m.$$

On vérifie tout de suite qu'elle est linéaire et continue.

g) A tout espace de Fréchet (F, P), on a donc associé une suite d'espaces de Banach $\hat{F}_m$ et une suite d'opérateurs $\rho_{k,m}$. On désigne alors par $\mathcal{F}$ la suite

$$(\hat{F}_m, \rho_{k,m})_{k \geq m} \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

que l'on appelle “spectre canonique” associé à (F, P). On utilise aussi la notation

$$\mathcal{F} \cdots \to \hat{F}_{m+1} \overset{\rho_{m+1,m}}{\to} \hat{F}_m \to \cdots \to \hat{F}_1$$

I.2 Définition de $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F})$

Soient E et F deux espaces de Fréchet. Fixons un spectre canonique sur $F((\hat{F}_m, \rho_{k,m})_{k \geq m})$. Posons

$$\mathcal{B}(E, \mathcal{F}) := \{(\rho_{k+1,k} B_{k+1} - B_k)_{k \in \mathbb{N}} : B_k \in L(E, \hat{F}_k) \; \forall k\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace linéaire de $\prod_k L(E, \hat{F}_k)$. Dès lors, on peut définir

$$\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F}) = \prod_k L(E, \hat{F}_k) / \mathcal{B}(E, \mathcal{F}).$$

I.3 Définition de $\mathrm{Ext}(E, F)$

Nous allons démontrer qu'en fait, $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F})$ ne dépend que de F et non du système de semi-normes de F.

Soient E et F deux espaces de Fréchet.

Soient $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ et $Q = \{q_m : m \in \mathbb{N}\}$ deux systèmes de semi-normes sur F. On suppose que les systèmes P et Q sont équivalents.

Soient alors

$$\mathcal{F} = (\hat{F}_k, \rho_{k,\ell})$$

le spectre canonique défini à partir de P et

$$\mathcal{F}' = (\hat{F}'_k, \rho'_{k,\ell})$$

le spectre canonique défini à partir de Q.

Définition I.1 Les *spectres canoniques* $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont *équivalents* s'il existe des applications

$$\sigma, \sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$j_k : \hat{F}'_{\sigma'(k)} \to \hat{F}_k \quad \text{et} \quad j'_k : \hat{F}_{\sigma(k)} \to \hat{F}'_k \text{ continues}$$

telles que

$$j_k \circ j'_{\sigma'(k)} = \rho_{\sigma(\sigma'(k)),k} \quad \text{et} \quad j'_k \circ j_{\sigma(k)} = \rho'_{\sigma'(\sigma(k)),k}.$$

Schématiquement,

$$\begin{tikzcd}
\hat{F}_{\sigma(\sigma'(k))} \arrow[rr, "\rho_{\sigma(\sigma'(k)),k}"] \arrow[dr, "j'_{\sigma'(k)}"'] & & \hat{F}_k \\
& \hat{F}'_{\sigma'(k)} \arrow[ur, "j_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque I.2 Si P et Q sont équivalents alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont équivalents.

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\sigma'(k) \in \mathbb{N}$ et une constante C_k tels que

$$p_k \leq C_k q_{\sigma'(k)}.$$

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\sigma(k) \in \mathbb{N}$ et une constante C'_k tels que

$$q_k \leq C'_k p_{\sigma(k)}.$$

Il s'ensuit que

$$L'_{\sigma'(k)} \subset L_k \quad \text{et} \quad L_{\sigma(k)} \subset L'_k.$$

Dès lors, les applications

$$j_k : \hat{F}'_{\sigma'(k)} \to \hat{F}_k \quad x + L'_{\sigma'(k)} \mapsto x + L_k$$

et

$$j'_k : \hat{F}_{\sigma(k)} \to \hat{F}'_k \quad x + L_{\sigma(k)} \mapsto x + L'_k$$

sont bien définies et continues.

On voit de suite que

$$j_k \circ j'_{\sigma'(k)} = \rho_{\sigma(\sigma'(k)),k}$$

et

$$j'_k \circ j_{\sigma(k)} = \rho'_{\sigma'(\sigma(k)),k}.$$

D'où la conclusion.

■

Proposition I.3 *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux spectres canoniques équivalents, alors les espaces* $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F})$ *et* $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F}')$ *sont en bijection linéaire.*

Preuve. a) Première étape

Considérons $(\tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Soit $\mathcal{F}'' := (\hat{F}_{\tau(k)}, \rho_{\tau(k),\tau(\ell)})_{k\geq\ell}$.

Etablissons qu'il existe une bijection linéaire entre $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F})$ et $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{F}'')$. Introduisons l'application suivante :

$$\begin{aligned} Q : \prod_k L(E, \hat{F}_k)/\mathcal{B}(E, \mathcal{F}) \quad &\to \quad \prod_k L(E, \hat{F}_{\tau(k)})/\mathcal{B}(E, \mathcal{F}'') \\ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}) \quad &\mapsto \quad \left(\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} A_\ell \right)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}''). \end{aligned}$$

i) *Q a un sens et est linéaire.*

De fait, soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}, (A'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_k)$ tels que

$$(A_k - A'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F}). \tag{I.3.1}$$

Démontrons que

$$\left(\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} A_\ell - \sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} A'_\ell \right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} (A_\ell - A'_\ell) \right)_{k\in\mathbb{N}}$$

appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F}'')$.

De fait, vu (I.3.1), il existe $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_k)$ tel que

$$A_k - A'_k = \rho_{k+1,k} B_{k+1} - B_k \ , \quad \forall k.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)}(A_\ell - A'_\ell) &= \sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} (\rho_{\ell,\tau(k)} \circ \rho_{\ell+1,\ell} \circ B_{\ell+1} - \rho_{\ell,\tau(k)} \circ B_\ell) \\
&= \sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} (\rho_{\ell+1,\tau(k)} \circ B_{\ell+1} - \rho_{\ell,\tau(k)} \circ B_\ell) \\
&= \rho_{\tau(k+1),\tau(k)} \circ B_{\tau(k+1)} - \rho_{\tau(k),\tau(k)} \circ B_{\tau(k)} \\
&= \rho_{\tau(k+1),\tau(k)} \circ B_{\tau(k+1)} - B_{\tau(k)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)}(A_\ell - A'_\ell) \right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F}'')$$

par définition de $\mathcal{B}(E, \mathcal{F}'')$.

ii) Q *est injectif*.

Supposons que $Q((A_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F})) = 0$. Démontrons que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F})$.

On a

$$Q((A_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F})) = 0$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} A_\ell \right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F}'').$$

Donc, il existe une suite d'opérateurs $(B_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_{\tau(k)})$ tels que

$$\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} A_\ell = \rho_{\tau(k+1),\tau(k)} \circ B_{\tau(k+1)} - B_{\tau(k)} \quad, \forall k \in \mathbb{N} \tag{I.3.2}$$

Posons $\tau(0) := 0$.

Pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\tau(k-1) < \ell < \tau(k)$, posons

$$B_\ell := \rho_{\tau(k),\ell} B_{\tau(k)} - \sum_{j=\ell}^{\tau(k)-1} \rho_{j,\ell} A_j \in L(E, \hat{F}_\ell).$$

Par (I.3.2), cette formule reste correcte pour $\ell = \tau(k-1)$, $k \geq 2$.

Il suffit de démontrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$A_\ell = \rho_{\ell+1,\ell} \circ B_{\ell+1} - B_\ell.$$

De fait, pour $\tau(k-1) \leq \ell < \tau(k)$, $k \geq 2$ ou $0 = \tau(0) < \ell < \tau(1)$, on a

$$
\begin{aligned}
\rho_{\ell+1,\ell} \circ B_{\ell+1} - B_\ell &= \rho_{\ell+1,\ell}\left(\rho_{\tau(k),\ell+1} B_{\tau(k)} - \sum_{j=\ell+1}^{\tau(k)-1} \rho_{j,\ell+1} A_j\right) \\
&\quad -\rho_{\tau(k),\ell} B_{\tau(k)} + \sum_{j=\ell}^{\tau(k)-1} \rho_{j\ell} A_\ell \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}\rho_{\tau(k),\ell+1} B_{\tau(k)} - \sum_{j=\ell+1}^{\tau(k)-1} \rho_{\ell+1,\ell}\rho_{j,\ell+1} A_j \\
&\quad -\rho_{\tau(k),\ell} B_{\tau(k)} + \sum_{j=\ell}^{\tau(k)-1} \rho_{j\ell} A_j \\
&= \rho_{\tau(k),\ell} B_{\tau(k)} - \sum_{j=\ell+1}^{\tau(k)-1} \rho_{j\ell} A_j \\
&\quad -\rho_{\tau(k),\ell} B_{\tau(k)} + \sum_{j=\ell}^{\tau(k)-1} \rho_{j\ell} A_j \\
&= \rho_{\ell\ell} A_\ell \\
&= A_\ell.
\end{aligned}
$$

iii) Q *est surjectif*.
Soit $(A_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_{\tau(k)})$.
Il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_k)$ tel que

$$
Q((A_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) = (A_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}'')
$$

à savoir

$$
A_k := \begin{cases} A_{\tau(\ell)} & \text{s'il existe } \ell \text{ tel que } k = \tau(\ell) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
Q((A_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) &= \left(\sum_{\ell=\tau(k)}^{\tau(k+1)-1} \rho_{\ell,\tau(k)} A_\ell\right)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}'') \\
&= (\rho_{\tau(k),\tau(k)} A_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}'') \\
&= (A_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}'').
\end{aligned}
$$

Au total, on a une bijection linéaire entre $\prod_k L(E,\hat{F}_k)/\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$ et $\prod_k L(E,\hat{F}_{\tau(k)})/\mathcal{B}(E,\mathcal{F}'')$. Donc $\mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}'')$.

b) Deuxième étape

Par hypothèse, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont équivalents. Donc, il existe

$$
\sigma, \sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}
$$

$$j_k : \hat F'_{\sigma'(k)} \to \hat F_k \quad \text{et} \quad j'_k : \hat F_{\sigma(k)} \to \hat F'_k \text{ continus}$$

tels que

$$\begin{aligned} j_k \circ j'_{\sigma'(k)} &= \rho_{\sigma(\sigma'(k)),k} \\ j'_k \circ j_{\sigma(k)} &= \rho'_{\sigma'(\sigma(k)),k}. \end{aligned}$$

Considérons alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{llllllll}
\mathcal{F} & \cdots\to & \hat F_{k+1} & \overset{\rho_{k+1,k}}{\to} & \hat F_k & \to & \hat F_{k-1} & \to\cdots \\
\mathcal{F}_1 & \cdots & & \to & \hat F_{\sigma(\sigma'(1))} & \overset{\rho_{\sigma(\sigma'(1)),1}}{\to} & \hat F_1 & \\
\mathcal{J} & \cdots\to & \hat F'_{\sigma'(\sigma(\sigma'(1)))} & \overset{j_{\sigma(\sigma'(1))}}{\to} & \hat F_{\sigma(\sigma'(1))} & \overset{j'_{\sigma'(1)}}{\to} & \hat F'_{\sigma'(1)} & \overset{j_1}{\to} \hat F_1 \\
\mathcal{F}_2 & \cdots & & \to & \hat F'_{\sigma'(\sigma(\sigma'(1)))} & \overset{\rho'_{\sigma'(\sigma(\sigma'(1))),\sigma'(1)}}{\to} & \hat F'_{\sigma'(1)} & \\
\mathcal{F}' & \cdots\to & \hat F'_{k+1} & \overset{\rho'_{k+1,k}}{\to} & \hat F'_k & \to & \hat F'_{k-1} & \to\cdots
\end{array}$$

En utilisant quatre fois la première étape, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}) &\simeq \mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}_1) \\ &\simeq \mathrm{Ext}(E,\mathcal{J}) \\ &\simeq \mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}_2) \\ &\simeq \mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}'). \end{aligned}$$

■

Grâce à cette propriété, il est licite d'introduire la définition suivante :

Définition I.4 Si E et F sont deux espaces de Fréchet et $\mathcal{F}$ un spectre canonique de F,

$$\mathrm{Ext}(E,F) = \mathrm{Ext}(E,\mathcal{F}).$$

Remarques I.5 *1) Si les espaces de Fréchet E et E_0 sont isomorphes, alors les espaces* $\mathrm{Ext}(E,F)$ *et* $\mathrm{Ext}(E_0,F)$ *sont en bijection linéaire.*

2) Si les espaces de Fréchet F et F_0 sont isomorphes, alors les espaces $\mathrm{Ext}(E,F)$ *et* $\mathrm{Ext}(E,F_0)$ *sont en bijection linéaire.*

Preuve. 1) Soient $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ un système de semi-normes sur F et $\mathcal{F} = (\hat F_k, \rho_{k\ell})$ le spectre canonique défini à partir de P. Si $I : E \to E_0$ désigne un isomorphisme entre E et E_0, démontrons que l'application

$$\begin{aligned} Q \;:\; & \mathrm{Ext}(E,F) \to \mathrm{Ext}(E_0,F) \\ & (T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}) \mapsto (T_k \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E_0,\mathcal{F}) \end{aligned}$$

établit une bijection linéaire entre les espaces $\mathrm{Ext}(E,F)$ et $\mathrm{Ext}(E_0,F)$.

i) *Q a un sens et est linéaire.*

De fait, soient $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E,\hat{F}_k)$ tels que $(T_k - T'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E,\mathcal{F})$. Démontrons que

$$(T_k \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}} - (T'_k \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}} = ((T_k - T'_k) \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$$

appartient à $\mathcal{B}(E_0,\mathcal{F})$. Il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E,\hat{F}_k)$ telle que

$$T_k - T'_k = \rho_{k+1,k}B_{k+1} - B_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il vient

$$((T_k - T'_k) \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}} = (\rho_{k+1,k} \circ B_{k+1} \circ I^{-1} - B_k \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Puisque l'application $B_k \circ I^{-1}$ appartient à $L(E_0,\hat{F}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $((T_k - T'_k) \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E_0,\mathcal{F})$.

ii) *Q est injectif.*

Supposons que $Q((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) = 0$ et démontrons que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$. On a

$$Q((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) = 0$$

c'est-à-dire

$$(T_k \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E_0,\mathcal{F}).$$

Donc, il existe une suite d'opérateurs $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E_0,\hat{F}_k)$ telle que

$$T_k \circ I^{-1} = \rho_{k+1,k} \circ B_{k+1} - B_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$T_k = \rho_{k+1,k} \circ B_{k+1} \circ I - B_k \circ I \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $B_k \circ I$ appartient à $L(E,\hat{F}_k)$, la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$.

iii) *Q est surjectif.*

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E_0,\hat{F}_k)$. La suite $(T_k \circ I)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k L(E,\hat{F}_k)$ et est telle que

$$\begin{aligned} Q((T_k \circ I)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) &= (T_k \circ I \circ I^{-1})_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E_0,\mathcal{F}) \\ &= (T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E_0,\mathcal{F}), \end{aligned}$$

ce qui suffit.

2) Soit $I : F \to F_0$ un isomorphisme entre F et F_0.

Si $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ définit un système de semi-normes sur F_0, alors $P' = \{p_m(I\cdot) : m \in \mathbb{N}\}$ définit un système de semi-normes sur F équivalent à celui de F. Sur F, on considère le spectre défini à partir de P'.

Rappelons l'expression des normes sur les espaces de Banach $\hat{F}_k$ et $\hat{F}_{0k}$: de la même manière que dans le paragraphe I.1, les applications

$$\begin{array}{lcll} \widetilde{p_k} & : & F_0/\ker(p_k) \to \mathbb{R} & [f_0]_{\ker(p_k)} \mapsto p_k(f_0) \\ \widetilde{p_k \circ I} & : & F/\ker(p_k \circ I) \to \mathbb{R} & [f]_{\ker(p_k \circ I)} \mapsto p_k \circ I(f) \end{array}$$

déterminent des normes sur $F_0/\ker(p_k)$ et $F/\ker(p_k \circ I)$ respectivement. Donc, $F_{0k} := (F_0/\ker(p_k), \widetilde{p_k})$ et $F_k := (F/\ker(p_k \circ I), \widetilde{p_k \circ I})$ sont des espaces normés et il existe des espaces normés complets $(\hat{F}_{0k}, \|\cdot\|_k^{F_0})$ et $(\hat{F}_k, \|\cdot\|_k^F)$. Ce sont ces espaces de Banach que nous retrouvons dans les spectres canoniques $\mathcal{F}_0 = (\hat{F}_{0k}, \rho_{k+1,k}^{F_0})$ et $\mathcal{F} = (\hat{F}_k, \rho_{k+1,k}^F)$.

A présent, considérons l'application

$$i_k : F_{0k} \to F_k \quad [f_0]_{\ker(p_k)} \mapsto [I^{-1}(f_0)]_{\ker(p_k \circ I)}.$$

On vérifie tout de suite que i_k est bien défini et est une bijection linéaire. De plus, il vient

$$\begin{aligned} \widetilde{p_k \circ I}(i_k[f_0]_{\ker(p_k)}) &= \widetilde{p_k \circ I}([I^{-1}(f_0)]_{\ker(p_k \circ I)}) \\ &= p_k \circ I(I^{-1}(f_0)) \\ &= p_k(f_0) \\ &= \widetilde{p_k}([f_0]_{\ker(p_k)}) \end{aligned} \tag{I.3.3}$$

Dans ces conditions, le prolongement $\hat{\imath}_k : \hat{F}_{0k} \to \hat{F}_k$ est linéaire et continu.

Etablissons que l'application $\hat{\imath}_k$ est injective. De fait, comme $\hat{F}_{0k}$ est le complété de F_{0k}, pour tout f_0 appartenant à $\hat{F}_{0k}$, il existe une suite $[f_{0m}]_{\ker(p_k)}$ appartenant à F_{0k} telle que $[f_{0m}]_{\ker(p_k)}$ converge vers f_0 dans $\hat{F}_{0k}$.

Puisque $\hat{\imath}_k$ est continu, la suite $\hat{\imath}_k([f_{0m}]_{\ker(p_k)})$ converge vers $\hat{\imath}_k(f_0)$. De plus, vu (I.3.3),

$$\left\|[f_{0m}]_{\ker(p_k)})\right\|_k^{F_0} = \left\|\hat{\imath}_k([f_{0m}]_{\ker(p_k)})\right\|_k^F$$

et la suite $\left\|\hat{\imath}_k([f_{0m}]_{\ker(p_k)})\right\|_k^F$ converge vers $\|\hat{\imath}_k(f_0)\|_k^F$.

Donc, par égalité des limites, on a $\|\hat{\imath}_k(f_0)\|_k^F = \|f_0\|_k^{F_0}$ pour tout f_0 appartenant à $\hat{F}_{0k}$. En particulier, $\hat{\imath}_k$ est injectif.

Démontrons que l'application $\hat{\imath}_k$ est surjective (donc aussi ouverte). De fait, soit $f \in \hat{F}_k$ avec $f \neq 0$. Puisque l'espace F_k est dense dans $\hat{F}_k$, considérons une suite $([f_m]_{\ker(p_k \circ I)})_{m \in \mathbb{N}}$ de F_k qui converge vers f. Comme i_k est surjectif, il existe $[f_{0m}]_{\ker(p_k)}$ appartenant à F_{0k} pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$i_k([f_{0m}]_{\ker(p_k)}) = [f_m]_{\ker(p_k \circ I)} \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$[f_{0m}]_{\ker(p_k)} = i_k^{-1}([f_m]_{\ker(p_k \circ I)}) \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

et, puisque l'application i_k^{-1} est continue de F_k dans F_{0k}, et que la suite $([f_m]_{\ker(p_k \circ I)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\hat{F}_{0k}$, la suite $([f_{0m}]_{\ker(p_k)})_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F_{0k}, donc converge vers g dans $\hat{F}_{0k}$. On en déduit que g est tel que :

$$\begin{aligned}
\hat{\imath}_k(g) &= \lim_{m\to\infty} (i_k[f_{0m}]_{\ker(p_k)})_{m\in\mathbb{N}} \\
&= \lim_{m\to\infty} ([f_m]_{\ker(p_k\circ I)})_{m\in\mathbb{N}} \\
&= f.
\end{aligned}$$

De plus, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F_{0,k} \arrow[r, "i_k"] & F_k \\
F_{0,k+1} \arrow[u, "\rho^{F_0}_{k+1,k}"] \arrow[r, "i_{k+1}"'] & F_{k+1} \arrow[u, "\rho^{F}_{k+1,k}"']
\end{tikzcd}$$

En effet, soit $[f_0]_{\ker(p_{k+1})}$ appartenant à $F_{0,k+1}$. D'une part,

$$\begin{aligned}
\rho^F_{k+1,k} \circ i_{k+1}([f_0]_{\ker(p_{k+1})}) &= \rho^F_{k+1,k}([I^{-1}(f_0)]_{\ker(p_{k+1}\circ I)}) \\
&= [I^{-1}(f_0)]_{\ker(p_k\circ I)}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
i_k \circ \rho^{F_0}_{k+1,k}([f_0]_{\ker(p_{k+1})}) &= i_k([f_0]_{\ker(p_k)}) \\
&= [I^{-1}(f_0)]_{\ker(p_k\circ I)}.
\end{aligned}$$

Etablissons que l'application

$$Q : \mathrm{Ext}(E, F_0) \to \mathrm{Ext}(E, F) \qquad (T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0) \mapsto (\hat{\imath}_k \circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F})$$

établit une bijection linéaire entre les espaces $\mathrm{Ext}(E, F_0)$ et $\mathrm{Ext}(E, F)$.

i) *Q a un sens et est linéaire.*

De fait, soient $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_k)$ tels que $(T_k - T'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)$. Démontrons que

$$(\hat{\imath}_k \circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} - (\hat{\imath}_k \circ T'_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\hat{\imath}_k \circ (T_k - T'_k))_{k\in\mathbb{N}}$$

appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F})$. Il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E, \hat{F}_{0k})$ telle que

$$T_k - T'_k = \rho^{F_0}_{k+1,k} B_{k+1} - B_k \quad , \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
(\hat{\imath}_k \circ (T_k - T'_k))_{k\in\mathbb{N}} &= (\hat{\imath}_k(\rho^{F_0}_{k+1,k} B_{k+1} - B_k))_{k\in\mathbb{N}} \\
&= (\rho^F_{k+1,k} \circ \hat{\imath}_{k+1} \circ B_{k+1} - \hat{\imath}_k \circ B_k)_{k\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Puisque l'application $\hat{\imath}_k \circ B_k$ appartient à $L(E, \hat{F}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\hat{\imath}_k \circ (T_k - T'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F})$.

ii) *Q est injectif*.

Supposons que $Q((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)) = 0$ et démontrons que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)$. On a

$$Q((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)) = 0$$

c'est-à-dire

$$(\hat{\imath}_k \circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F}).$$

Donc, il existe une suite d'opérateurs $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E, \hat{F}_k)$ telle que

$$\hat{\imath}_k \circ T_k = \rho^F_{k+1,k} \circ B_{k+1} - B_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il s'ensuit que

$$T_k = \hat{\imath}_k^{-1} \circ \rho^F_{k+1,k} \circ B_{k+1} - \hat{\imath}_k^{-1} \circ B_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $\rho^F_{k+1,k} \circ i_{k+1} = i_k \circ \rho^{F_0}_{k+1,k}$, on a

$$i_k^{-1} \circ \rho^F_{k+1,k} = \rho^{F_0}_{k+1,k} \circ i_{k+1}^{-1} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$T_k = \rho^{F_0}_{k+1,k} \circ \hat{\imath}_{k+1}^{-1} \circ B_{k+1} - \hat{\imath}_k^{-1} \circ B_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\hat{\imath}_k^{-1} \circ B_k$ appartient à $L(E, \hat{F}_{0k})$, la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)$.

iii) *Q est surjectif*.

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E, \hat{F}_k)$. La suite $(\hat{\imath}_k^{-1} \circ T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k L(E, \hat{F}_{0k})$ et est telle que

$$\begin{aligned} Q((\hat{\imath}_k^{-1} \circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)) &= (\hat{\imath}_k \circ \hat{\imath}_k^{-1} \circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}) \\ &= (T_k)_k + \mathcal{B}(E, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

ce qui suffit.

∎

Deuxième partie : Lien de $\mathrm{Ext}(E, F)$ avec le "splitting"

I.4 Rappels sur les suites exactes, les limites projectives et la nucléarité

I.4.1 Les suites exactes

Définition I.6 *Un complexe d'espaces linéaires* est une suite

$$T_j : E_j \to E_{j+1} \quad (J_0 - 1 < j < J_1;\ J_0, J_1 \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{+\infty\},\ J_0 < J_1)$$

d'opérateurs linéaires entre espaces linéaires qui, pour tout entier j tel que $J_0 < j < J_1$ est un complexe au degré j, c'est-à-dire vérifie $\mathrm{im}(T_{j-1}) \subset \ker(T_j)$. On le note

$$\cdots \to E_{j-1} \xrightarrow{T_{j-1}} E_j \xrightarrow{T_j} E_{j+1} \to \cdots$$

Un tel *complexe* est *exact* au degré j avec $J_0 < j < J_1$ si on a $\mathrm{im}(T_{j-1}) = \ker(T_j)$.

Une *suite exacte d'espaces linéaires* est un complexe d'espaces linéaires qui est exact en tout degré.

Une *suite exacte d'espaces linéaires* est *courte* si elle s'écrit

$$0 \xrightarrow{A} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \xrightarrow{B} 0$$

où "0" représente l'espace linéaire trivial $\{0\}$.

Puisque l'opérateur A est linéaire, son image est réduite à l'espace trivial $\{0\}$ tandis que l'opérateur B associe à tout élément de G, l'élément nul "0".

Dans la suite, nous ne noterons plus ces deux opérateurs.

Remarque I.7 i) Le complexe $0 \to E \xrightarrow{T} F$ est une suite exacte si et seulement si T est injectif.

ii) Le complexe $E \xrightarrow{T} F \to 0$ est une suite exacte si et seulement si T est surjectif.

Preuve. i) $0 \to E \xrightarrow{T} F$ est exact ssi $\mathrm{im}(0) = \ker(T)$
ssi $0 = \ker(T)$
ssi T est injectif.

ii) $E \xrightarrow{T} F \to 0$ est exact ssi $\mathrm{im}(T) = \ker(0)$
ssi $\mathrm{im}(T) = F$
ssi T est surjectif.

■

Définition I.8 Le *complexe* $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ est *topologiquement exact* s'il est exact et si T et S sont des homomorphismes, c'est-à-dire des opérateurs linéaires continus relativement ouverts.

I.4.2 Système projectif et limite projective

Théorème I.9 *Soit E un espace linéaire et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, soient (E_m, P_m) un espace linéaire séparé à semi-normes et $u_m : E \to E_m$ un opérateur linéaire.*

Si 0 est le seul élément de E tel qu'on ait $u_m e = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors il existe un plus faible système de semi-normes P sur E tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, u_m soit continu de (E, P) dans (E_m, P_m), à savoir :

$$P = \left\{ \sup_{(m)} p_m(u_m .) : p_m \in P_m \right\}.$$

Preuve. a) Etablissons que P définit un système de semi-normes sur E. On voit tout de suite que P est un ensemble de semi-normes et est filtrant. De plus, il est séparant.

De fait, soit $e \in E$ tel que $p(e) = 0$ pour tout $p \in P$. Donc, pour tout m, on a $p_m(u_m(e)) = 0$ pour tout $p_m \in P_m$. Il s'ensuit que pour tout m, $u_m(e) = 0$. Donc, $e = 0$ par hypothèse et P est séparant.

b) L'application $u_m : E \to E_m$ est continue pour tout m, car pour tout $p_m \in P_m$, il existe $p \in P$ tel que $p_m(u_m(e)) \leq p(e)$ pour tout $e \in E$ à savoir $p = p_m(u_m .) \in P$.

c) P est le système de semi-normes le plus faible qui rend u_m continu pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

De fait, soit Q un autre système de semi-normes qui est tel que $u_m : (E, Q) \to E_m$ soit continu pour tout m. Donc, pour tout $p_m \in P_m$, il existe $q \in Q$ tel que $p_m(u_m(e)) \leq q(e)$, ce qui suffit.

■

Définition I.10 Dans les conditions du théorème précédent, P est appelé le *système de semi-normes projectif* relatif à $(u_m : E \to E_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Définition I.11 Un *système projectif dénombrable* est une suite

$$(u_{m+1,m} : E_{m+1} \to E_m)_{m \in \mathbb{N}}$$

d'opérateurs linéaires continus entre espaces linéaires à semi-normes. On adopte bien souvent la notation suivante :

$$\cdots \to E_{k+1} \stackrel{u_{k+1,k}}{\to} E_k \stackrel{u_{k,k-1}}{\to} E_{k-1} \to \cdots \to E_1.$$

Définition I.12 Etant donné un système projectif dénombrable

$$(u_{m+1,m} : E_{m+1} \to E_m)_{m \in \mathbb{N}},$$

la limite projective correspondante est l'espace linéaire

$$\left\{ (e_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \prod_{m \in \mathbb{N}} E_m : u_{m+1,m} e_{m+1} = e_m, \quad \forall m \right\}.$$

Il est noté

$$\operatorname*{proj}_{\leftarrow m}(E_m, u_{m+1,m}) \quad \text{ou} \quad \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} E_m$$

et sauf mention explicite du contraire, on le suppose muni de la topologie de $\prod_m E_m$.

Remarque I.13 Chaque semi-norme du type $\sup_{(m)} p_m(u_m\cdot)$ avec $p_m \in P_m$ peut être remplacée par une semi-norme du type $p_m(u_m\cdot)$ avec $p_m \in cs(E_m)$.

Preuve. Soit $p = \sup_{(m)} p_m(u_m\cdot)$ une semi-norme continue sur E. Il existe $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$p \leq \sup_{m_0 \leq m \leq m_1} p_m(u_m\cdot).$$

Raisonnons pour m_0 et m_0+1. Puisque $u_{m_0+1,m_0} : E_{m_0+1} \to E_{m_0}$ est linéaire et continu, il existe $q_{m_0+1} \in cs(E_{m_0+1})$ tel que

$$p_{m_0}(u_{m_0+1,m_0}\cdot) \leq q_{m_0+1}(\cdot) \quad \text{sur} \quad E_{m_0+1}.$$

De plus, il existe $p'_{m_0+1} \in cs(E_{m_0+1})$ tel que

$$p'_{m_0+1} \geq \sup\{p_{m_0+1}, q_{m_0+1}\}$$

car le système de semi-normes sur E_{m_0+1} est filtrant.

Rappelons que $u_{m_0} = u_{m_0+1,m_0} \circ u_{m_0+1}$ sur E. On en déduit que

$$p_{m_0}(u_{m_0}\cdot) \leq q_{m_0+1}(u_{m_0+1}\cdot) \leq p'_{m_0+1}(u_{m_0+1}\cdot)$$

et

$$p_{m_0+1}(u_{m_0+1}\cdot) \leq p'_{m_0+1}(u_{m_0+1}),$$

ce qui suffit.

■

Nous pouvons alors établir le résultat suivant.

Proposition I.14 *Si F est un espace de Fréchet et $(\hat{F}_m, \rho_{k,m})_{k\geq m}$, $m \in \mathbb{N}$, le spectre canonique associé à F (défini comme dans la première partie), alors F est isomorphe à* $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$ *où le système projectif dénombrable est déterminé par la suite*

$$(\rho_{m+1,m} : F_{m+1} \to F_m)_{m\in\mathbb{N}}.$$

Preuve. a) Considérons l'application

$$T : F \to \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} F_m \quad f \mapsto ([f]_{L_m})_m.$$

Cette application : i) *a un sens* car pour tout $f \in F$,

$$Tf \in \prod_m F_m \quad \text{et} \quad \rho_{m+1,m}[f]_{L_{m+1}} = [f]_{L_m}.$$

ii) *est linéaire et injective.* En effet, soit $f \in F$ tel que $Tf = ([f]_{L_m})_m = 0$. Donc $f \in L_m$, $\forall m$, c'est-à-dire, $p_m(f) = 0$, $\forall m$ et $f = 0$.

iii) *est telle que* $\operatorname{im}(T)$ *est dense dans* $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} F_m$. De fait, soient $(f_m)_m \in \operatorname{proj}_{\leftarrow m} F_m$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Par la remarque précédente, il suffit de trouver $f \in F$ tel que

$$p_n\left[s_n(Tf - (f_m)_m)\right] = p_n(\rho_n f - f_n) \leq \varepsilon$$

où p_n est une semi-norme sur F_n et s_n désigne la projection canonique de $\prod_m F_m$ sur F_n.

Comme ρ_n est surjectif, il existe $f \in F$ tel que $\rho_n f = f_n$ et alors, on obtient

$$p_n(\rho_n f - f_n) = 0.$$

iv) *est continue.* De fait, si $\tilde{p}_n$ est une semi-norme sur F_n, on a

$$\tilde{p}_n(\rho_n f) = \tilde{p}_n([f]_{L_n}) = p_n(f), \quad \forall f \in F$$

où p_n est une semi-norme sur F.

v) *est relativement ouverte.* Si on considère une semi-norme p_m sur F, pour tout $f \in F$, il vient

$$\begin{aligned} \inf_{\ell \in \ker(T)} p_m(f + \ell) &= p_m(f) \qquad \text{(I.4.1)} \\ &= \tilde{p}_m([f]_{L_m}) \\ &= \tilde{p}_m(\rho_m f) \end{aligned}$$

avec $\tilde{p}_m$ une semi-norme de F_m.

L'égalité en (I.4.1) provient du fait que T est injectif.

On en déduit que le prolongement

$$T : F \to \operatorname{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$$

est une application linéaire continue relativement ouverte entre deux espaces de Fréchet. Il s'ensuit que $\operatorname{im}(T)$ est fermé. Or, $\operatorname{im}(T)$ est dense dans $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} F_m$ et $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} F_m$ est dense dans $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$.

Donc $\operatorname{im}(T)$ est dense dans $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$ et $\operatorname{im}(T)$ est fermé. Par conséquent, T est surjectif. Au total, T établit une bijection entre F et $\operatorname{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$, ce qui suffit.

■

I.4.3 La nucléarité

Rappelons les définitions suivantes.

Définition I.15 Soient E un espace linéaire, p et p' deux semi-normes de E. On dit que p est *nucléaire* par rapport à p' s'il existe des suites $c_m \in \mathbb{C}$, $e_m \in E$, $e'_m \in E'$ telles que

$$p(e - \sum_{m=1}^{N} c_m \langle e, e'_m \rangle e_m) \to 0 \text{ si } N \to +\infty$$

pour tout $e \in E$, avec

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| &\leq C_1 \\ |\langle e, e'_m \rangle| &\leq C_2 p'(e) \ , \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

et

$$p(e_m) \leq C_3.$$

L'*espace* E muni du système de semi-normes P est *nucléaire* si à tout $p \in P$ correspond $p' \in P$ tel que p soit nucléaire par rapport à p'.

Définition I.16 Soient E et F deux espaces linéaires à semi-normes séparés avec F espace de Fréchet. L'*opérateur* $S \in \mathcal{L}(E, F)$ est *nucléaire* si

1) il existe $p \in cs(E)$ et $e'_m \in E'$ ($m \in \mathbb{N}$) tels que

$$\sup_m |\langle e, e'_m \rangle| \leq p(e) \quad , \quad \forall e \in E.$$

2) il existe

i) un sous-ensemble B borné, absolument convexe et fermé de F;

ii) une suite $f_m \in F$ ($m \in \mathbb{N}$), un nombre R strictement positif tels que $f_m \in RB$ pour tout m;

iii) une suite $\lambda_m \in \mathbb{C}$ ($m \in \mathbb{N}$) telle que $\sum_m |\lambda_m| < \infty$ tels que pour tout $e \in E$,

$$Se = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m \ , \quad \text{dans } F.$$

Rappelons également le resultat suivant (cf. [13]).

Théorème I.17 *Si A est une partie absolument convexe et non vide de l'espace linéaire E, on a*

$$\rangle A \langle = \bigcup_{m=1}^{\infty} mA = \bigcup_{r>0} rA$$

et la fonction $p_A : \rangle A \langle \to \mathbb{R}$ définie par

$$p_A(e) = \inf\{r > 0 : e \in rA\}$$

est une semi-norme sur $\rangle A \langle$ telle que

$$b_{p_A}(< 1) \subset A \subset b_{p_A}(1).$$

De plus, si A est fermé, alors $A = b_{p_A}(1)$.

Ce théorème peut s'appliquer au sous-ensemble B qui intervient dans la définition d'un opérateur nucléaire car il est borné, absolument convexe et fermé. Donc,

$$E_B := \rangle B \langle = \bigcup_{r>0} rB$$

et la fonction $p_B :\rangle B\langle \rightarrow R$ définie par

$$p_B(e) = \inf\{r > 0 : e \in rB\}$$

est une semi-norme sur E_B telle que

$$B = b_{p_B}(1). \tag{I.4.2}$$

De plus, l'espace (E_B, p_B) est de Banach.

Voici une application très utile.

Remarque I.18 Dans la définition d'un opérateur nucléaire, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m$$

converge dans F pour tout $e \in E$.

Cette série converge aussi dans l'espace (E_B, p_B). En effet,

$$\begin{aligned} p_B\left(\sum_{m=p}^{q} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m\right) &\leq \sum_{m=p}^{q} |\lambda_m| \, |\langle e, e'_m \rangle| \, p_B(f_m) \\ &\leq p(e) R \sum_{m=p}^{q} |\lambda_m| \end{aligned}$$

car d'une part, $\sup_m |\langle e, e'_m \rangle| \leq p(e)$ pour tout $e \in E$ et d'autre part, f_m appartient à RB et $B = b_{p_B}(1)$.

Puisque $\sum_{m=p}^{q} |\lambda_m|$ est un tronçon de Cauchy d'une série convergente et que l'espace (E_B, p_B) est de Banach, on en déduit que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m$ converge dans E_B.

Proposition I.19 *Tout opérateur linéaire et nucléaire de E dans F est continu.*

Preuve. Reprenons les notations de la définition d'un opérateur nucléaire. Puisque B est un sous-ensemble borné et fermé, pour toute semi-norme q continue sur F, il existe une constante C_q telle que

$$B \subset C_q b_q \quad \text{et} \quad q \leq C_q p_B$$

car $B = b_{p_B}(1)$ vu (I.4.2). On en déduit que

$$\begin{aligned} q(Se) &\leq C_q p_B(Se) \\ &\leq C_q p_B\left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m\right) && \text{(I.4.3)} \\ &\leq C_q \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m| \, |\langle e, e'_m \rangle| \, p_B(f_m) \\ &\leq C_q R R_0 p(e). && \text{(I.4.4)} \end{aligned}$$

L'inégalité en (I.4.3) provient du fait que la série converge dans E_B tandis que l'inégalité en (I.4.4) résulte de la définition d'un opérateur nucléaire.

■

Proposition I.20 *Si E et F sont deux espaces de Fréchet tels que E est nucléaire et F de Banach, alors tout opérateur $T \in L(E,F)$ est nucléaire.*

Preuve. Notons $\|.\|_F$ la norme de F. Comme T est continu, il existe $p \in cs(E)$ tel que $\|T(e)\|_F \leq p(e)$ pour tout $e \in E$. Par la définition de la nucléarité de E, il existe $q \in cs(E)$ tel que p soit nucléaire par rapport à q, c'est-à-dire qu'il existe des suites $e'_m \in E'$, $\lambda_m \in \mathbb{C}$ et $e_m \in E$ telles que

$$|\langle e, e'_m \rangle| \leq C_1 q(e) \ , \quad \forall m, \ \forall e \in E \tag{I.4.5}$$

$$\begin{aligned} \sum_m |\lambda_m| &< \infty \\ p(e_m) &\leq C_2 \ , \quad \forall m \end{aligned}$$

et

$$p\left(e - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle e_m\right) \to 0 \text{ si } M \to +\infty, \quad \forall e \in E.$$

Donc, vu (I.4.5), il existe $p' \in cs(E)$ et $f'_m \in E'$ $(m \in \mathbb{N})$ tels que

$$\sup_m |\langle e, f'_m \rangle| \leq p'(e) \ , \quad \forall e \in E,$$

à savoir $p' := C_1 q$ et $f'_m := e'_m$. De plus, $B := b_{\|.\|}(1)$, $f_m := T(e_m)$ et $R := C_2$ satisfont au second point de la définition d'un opérateur nucléaire.

En effet, $\|Te_m\|_F \leq p(e_m) \leq C_2$ pour tout m et donc, $Te_m \in C_2 B$.

Pour conclure, il suffit d'établir que

$$\left\| Te - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m \right\| \to 0 \text{ si } M \to +\infty.$$

Il vient

$$\begin{aligned} &\left\| Te - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle f_m \right\| \\ &= \left\| T\left(e - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle e_m\right) \right\| \\ &\leq p\left(e - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle e_m\right) \to 0 \text{ si } M \to +\infty. \end{aligned}$$

■

La proposition suivante va se révéler essentielle dans toute la suite du travail.

Proposition I.21 *Si G et H sont deux espaces de Banach et E est un espace nucléaire, si q est un opérateur linéaire continu surjectif de G dans H, alors pour tout opérateur T appartenant à $L(E,H)$, il existe un opérateur S appartenant à $L(E,G)$ tel que $q \circ S = T$. Schématiquement,*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "q"] & H \arrow[r] & 0 \\
& E \arrow[ul, "S"] \arrow[u, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve. Soit T un opérateur linéaire continu de E dans H. Puisque E est nucléaire, par la proposition I.20, T est nucléaire. Par conséquent,

1) il existe $p \in cs(E)$ et $e'_m \in E'$ $(m \in \mathbb{N})$ tels que

$$\sup_m |\langle e, e'_m \rangle| \leq p(e) \quad , \quad \forall e \in E.$$

2) il existe
i) un sous-ensemble B borné, absolument convexe fermé de H,
ii) une suite $h_m \in H$, $(m \in \mathbb{N})$, un nombre R strictement positif tels que $h_m \in RB$, pour tout m,
iii) une suite $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $(m \in \mathbb{N})$ telle que $\sum_m |\lambda_m| < \infty$,
tels que

$$Te = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle \, h_m \ \text{ dans } H.$$

De plus, comme q est surjectif, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe g_m appartenant à G tel que $q(g_m) = h_m$.

Considérons l'opérateur S défini par

$$Se = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle \, g_m \quad , \quad \forall e \in E.$$

On a $q \circ S = T$, car

$$\begin{aligned}
q \circ S(e) &= q\left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle \, g_m\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle \, q(g_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e, e'_m \rangle \, h_m \\
&= T(e) \quad , \quad \forall e \in E.
\end{aligned}$$

■

I.5 Définition du “splitting”

Définition I.22 Un sous-espace linéaire L de l'espace linéaire F est un *sous-espace complémenté* de F s'il existe un projecteur linéaire continu $P : F \to F$ tel que $\mathrm{im}(P) = L$.

Remarque I.23 Dans la définition précédente, la condition $\mathrm{im}(P) = L$ peut être remplacée par $\ker(P) = L$. En effet, il suffit de considérer $P_0 := \mathrm{id}_F - P$ car P_0 est un projecteur et $\ker(P_0) = \mathrm{im}(P)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \ker(P_0) &= \{f \in F : P_0(f) = 0\} \\ &= \{f \in F : f = P(f)\}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathrm{im}(P) \subset \ker(P_0)$. En effet, soit $g \in \mathrm{im}(P)$. Il existe $e \in F$ tel que $g = P(e)$. Par conséquent,

$$P(g) = P^2(e) = P(e) = g.$$

L'autre inclusion est immédiate.

Définition I.24 Soit

$$0 \to E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{q} G \to 0$$

une suite topologiquement exacte. Cette suite “splits” (se divise) si $L := \mathrm{im}(i) = \ker(q)$ est un sous-espace complémenté de F.

Remarque I.25 Toutes les suites topologiquement exactes ne jouissent pas de cette propriété. En effet, si c_0 désigne l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ qui convergent vers 0 et ℓ_∞ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{K}$, alors la suite

$$0 \to c_0 \xrightarrow{\mathrm{id}} \ell_\infty \xrightarrow{q} \ell_\infty / c_0 \to 0$$

est topologiquement exacte. Mais cette suite ne “splits” pas car $c_0 = \mathrm{im}(\mathrm{id}) = \ker(q)$ n'est pas complémenté dans ℓ_∞. (cf. [6]).

Proposition I.26 *Si*

$$0 \to E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{q} G \to 0$$

est une suite topologiquement exacte, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) $L := \mathrm{im}(i) = \ker(q)$ *est un sous-espace complémenté de* F.

ii) *Il existe* $R \in L(G, F)$ *tel que* $q \circ R = \mathrm{id}_G$.

iii) *Il existe* $T \in L(F, E)$ *tel que* $T \circ i = \mathrm{id}_E$.

Preuve. ii) $\Rightarrow$ i). Par hypothèse, il existe $R \in L(G, F)$ tel que $q \circ R = \mathrm{id}_G$. Par conséquent, $R \circ q \circ R \circ q = R \circ q$. Donc $P := R \circ q$ est un projecteur linéaire continu car R et q sont linéaires et continus.

De plus, R est injectif. En effet, soit $g \in G$ tel que $Rg = 0$. On a $q \circ R(g) = g = 0$ car q est linéaire. Puisque $\ker(P) = \{f \in F : R \circ q(f) = 0\}$, on en déduit que $\ker(P) = \ker(q) = L$.

iii) $\Rightarrow$ i). Comme il existe $T \in L(F, E)$ tel que $T \circ i = \mathrm{id}_E$, on a $i \circ T \circ i \circ T = i \circ T$. Donc, $i \circ T$ est un projecteur linéaire continu car T et i sont linéaires et continus.

De plus, T est surjectif. De fait, si on considère $e \in E$, établissons qu'il existe $f \in F$ tel que $e = T(f)$. Comme $e = T \circ i(e)$, $f = i(e) \in F$ convient. Puisque $\mathrm{im}(P) = \{i \circ T(f) : f \in F\}$, on en déduit que $\mathrm{im}(P) = \mathrm{im}(i) = L$.

i) $\Rightarrow$ ii). On sait qu'il existe $P : F \to F$ linéaire continu tel que $\ker(P) = L$. Considérons l'application

$$S : F/\ker(q) \to G \quad [f] \mapsto q(f).$$

Tout d'abord, S est injectif : soit $[f] \in F/\ker(q)$ tel que $S([f]) = q(f) = 0$. Donc, $f \in \ker(q)$. Ensuite, S est surjectif : soit $g \in G$. Puisque q est surjectif, il existe $f \in F$ tel que $q(f) = S([f]) = g$. Il en résulte que S est bijectif et S^{-1} existe.

Etablissons que S est continu. Puisque q est continu, pour tout $g \in cs(G)$, il existe $p \in cs(F)$ tel que

$$g(q(f)) \leq p(f) \ \text{ pour tout } \ f \in F.$$

Dès lors, pour tout $g \in cs(G)$ et pour tout $\ell \in \ker(q)$, il vient

$$\begin{aligned} g(S[f]) &= g(q(f)) \\ &= g(q(f + \ell)) \\ &\leq p(f + \ell) \ , \quad \forall f \in F. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $g \in cs(G)$ et pour tout $f \in F$, on a

$$g(S[f]) \leq \inf_{\ell \in \ker(q)} p(f + \ell) = \tilde{p}([f]).$$

Considérons l'application

$$S_0 : F/\ker(P) \to F \quad [f] \mapsto P(f).$$

De la même manière que pour S, S_0 est continu.

L'application $R := S_0 \circ S^{-1}$ appartient à $L(G, F)$ car S_0 et S sont linéaires et continus. Démontrons que R convient.

Si $g \in G$, il vient

$$\begin{aligned} q(Rg) &= (q \circ S_0 \circ S^{-1})(g) \\ &= q(S_0(S^{-1}g)). \end{aligned}$$

Comme q est surjectif, il existe $f_0 \in F$ tel que $g = q(f_0)$. Il en résulte que $S([f_0]) = q(f_0) = g = S(S^{-1}(g))$, c'est-à-dire que $[f_0] = S^{-1}(g)$. Maintenant, on obtient

$$q(Rg) = q(S_0[f_0]) = q(P(f_0)) = q(P(f_0) - f_0) + q(f_0) \underset{*}{=} q(f_0) = g.$$

L'égalité en (*) résulte du fait que $P(f_0) - f_0 \in \ker(P) = \ker(q)$. De fait,

$$P(P(f_0) - f_0) = P^2(f_0) - P(f_0) = 0.$$

i) $\Rightarrow$ iii). On sait qu'il existe $P : F \to F$ linéaire continu tel que $\mathrm{im}(P) = L$. Considérons l'application

$$\hat{\imath} : E \to \mathrm{im}(i) = L \quad e \mapsto i(e).$$

On voit tout de suite que $\hat{\imath}$ est bijectif.

Considérons à présent l'application

$$P_0 : F \to \mathrm{im}(P) = L \quad f \mapsto P(f).$$

L'application $T := \hat{\imath}^{-1} \circ P_0 \in L(F, E)$ car $\hat{\imath}$ et P_0 sont linéaires et continus. Démontrons que T convient. Si $e \in E$, il vient

$$\begin{aligned} (T \circ i)(e) &= (\hat{\imath}^{-1} \circ P_0 \circ i)(e) \\ &= \hat{\imath}^{-1}(P_0(i(e))) \\ &= \hat{\imath}^{-1}(P(i(e))) \\ &= \hat{\imath}^{-1}(i(e)) \qquad \text{(I.5.1)} \\ &= \hat{\imath}^{-1}(\hat{\imath}(e)) \\ &= e. \end{aligned}$$

L'égalité (I.5.1) résulte du fait que $i(e) \in \mathrm{im}(i) = \mathrm{im}(P)$.

■

I.6 Lien avec le "splitting"

Dans ce paragraphe, nous voulons établir un théorème qui relie le splitting des suites exactes et l'annulation de $\mathrm{Ext}(E, F)$. Pour ce faire, plusieurs résultats auxiliaires sont nécessaires. Rappelons tout d'abord le théorème de Hahn-Banach.

Théorème de Hahn-Banach. *Soient q une semi-norme sur l'espace linéaire E et L un sous-espace linéaire de E. Pour toute fonctionnelle linéaire ℓ' sur L pour laquelle il existe une constante C strictement positive telle que*

$$|\langle \cdot, \ell' \rangle| \leq Cq(\cdot) \;\; \textit{sur} \;\; L,$$

il existe une fonctionnelle linéaire e' sur E qui prolonge ℓ' (c'est-à-dire que $e'|_L = \ell'$) et telle que

$$|\langle \cdot, e' \rangle| \leq Cq(\cdot) \;\; \textit{sur} \;\; E.$$

Voici un résultat important relatif à l'annulation de Ext.

Proposition I.27 *Soient E et F deux espaces de Fréchet. Si E est nucléaire et si* $\mathrm{Ext}(E,F)=0$*, alors*

i) *pour tout sous-espace fermé E_0 de E, on a* $\mathrm{Ext}(E_0,F)=0$*;*

ii) *pour tout sous-espace fermé F' de F, on a* $\mathrm{Ext}(E,F/F')=0$.

Preuve. Si $(\hat{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ détermine le spectre canonique associé à F (défini comme dans la première partie), on a

$$F \simeq \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m.$$

Supposons que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$) définit un système de semi-normes sur E (resp. sur F).

i) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Pi L(E_0,\hat{F}_k)$. L'espace E_0 est nucléaire car c'est un sous-espace linéaire de E nucléaire. Par la proposition I.20, on en déduit que A_k est nucléaire pour tout $k\in\mathbb{N}$. Par conséquent,

1. il existe $n_k\in\mathbb{N}$ et $a_j\in E'_0$ ($j\in\mathbb{N}$) tels que
$$\sup_j |\langle x,a_j\rangle| \le p_{n_k}(x) \quad , \quad \forall x\in E_0.$$

2. il existe
   a) un sous-ensemble B borné, absolument convexe et fermé de $\hat{F}_k$,
   b) une suite $y_j\in\hat{F}_k$ ($j\in\mathbb{N}$), $R>0$ tels que $y_j\in RB$ pour tout j,
   c) une suite $\lambda_j\in\mathbb{C}$ ($j\in\mathbb{N}$) telle que $\sum_j|\lambda_j|<\infty$,

   tels que pour tout $x\in E_0$,
$$A_kx=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\,\langle x,a_j\rangle\,y_j \quad \text{dans } \hat{F}_k.$$

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $b_j\in E'$ tel que $b_j|_{E_0}=a_j$ et

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |\langle x,b_j\rangle| \le p_{n_k}(x) \quad , \quad \forall x\in E.$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, posons $A'_k(x):=\sum_j\lambda_jb_j(x)y_j$. On a $A'_k\in L(E,\hat{F}_k)$ et comme $\mathrm{Ext}(E,F)=0$, $(A'_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$. Dès lors, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}=(A'_k|_{E_0})_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}(E_0,\mathcal{F})$. D'où la conclusion.

ii) Posons $F_0:=F/F'$.
Soit $q:F\to F_0$ l'application quotient. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, posons

$$r_k(q(x))=\inf\{p'_k(y):q(y)=q(x)\}.$$

Dans ces conditions, r_k définit une semi-norme sur F_0. De fait,

1. si $c \neq 0$, il vient

$$\begin{aligned}
r_k(cq(x)) &= \inf\{p'_k(y) : q(y) = q(cx)\} \\
&= \inf\{p'_k(y) : q(y) = cq(x)\} \\
&= \inf\{p'_k(cy') : q(cy') = cq(x)\}, y' = \frac{y}{c} \\
&= \inf\{|c|\, p'_k(y') : q(y') = q(x)\} \\
&= |c| \inf\{p'_k(y') : q(y') = q(x)\} \\
&= |c|\, r_k(q(x)).
\end{aligned}$$

2. si $c = 0$, on a

$$\begin{aligned}
r_k(cq(x)) &= r_k(0) \\
&= \inf\{p'_k(y) : q(y) = 0\} \\
&\leq p'(0) = 0
\end{aligned}$$

   et

$$|c|\, r_k(q(x)) = 0.$$

3. $r_k(q(x) + q(x')) = \inf\{p'_k(y) : q(y) = q(x) + q(x')\}$.

   Soient $y_1 \in F$ tel que $q(y_1) = q(x)$ et $y_2 \in F_2$ tel que $q(y_2) = q(x')$.

   Donc, $y_1 + y_2$ est tel que

$$q(y_1 + y_2) = q(y_1) + q(y_2) = q(x) + q(x') \quad \text{pour tout } y_1, y_2$$

   tels que $q(y_1) = q(x)$ et $q(y_2) = q(x')$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
r_k(q(x) + q(x')) &\leq \inf\{p'_k(y_1) : q(y_1) = q(x)\} + \inf\{p'_k(y_2) : q(y_2) = q(x')\} \\
&= r_k(q(x)) + r_k(q(x')).
\end{aligned}$$

De plus, l'ensemble de ces semi-normes est séparant et filtrant car $(p'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ détermine un système de semi-normes sur F. Au total, $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit un système de semi-normes sur F_0. De la même manière que dans le paragraphe I.1, l'application

$$\tilde{r}_m : F_0/\ker r_m \to \mathbb{R} : [f_0]_{\ker r_m} \mapsto r_m(f_0)$$

définit une norme sur $F_0/\ker r_m$.

Donc $F_{0m} := (F_0/\ker r_m, \tilde{r}_m)$ est un espace normé. De plus, il existe un espace normé complet $(\hat{F}_{0m}, \|.\|_{\hat{F}_{om}})$ tel que $F_{0m} \subset \hat{F}_{0m}$ et $\|f\|_{\hat{F}_{0m}} = \tilde{r}_m(f)$ si $f \in F_{0m}$.

Remarquons que pour tout $f \in F$, on a

$$\inf_{\ell\in\ker(q)} p'_k(f + \ell) = r_k(q(f)).$$

Fixons $f \in F$. Soit $g \in F$ tel que $f - g \in \ker(q)$. Il vient

$$\inf_{\ell\in\ker(q)} p'_k(f + \ell) \leq p'_k(g)$$

et donc
$$\inf_{\ell\in\ker(q)} p'_k(f+\ell) \leq \inf_{\substack{g\\ q(g)=q(f)}} p'_k(g) = r_k(q(f)).$$

De plus, considérons $\ell \in \ker(q)$. On a bien sûr $q(\ell+f) = q(f)$. Il s'ensuit que
$$\inf_{\substack{g\\ q(g)=q(f)}} p'_k(g) \leq p'_k(\ell+f)$$
et
$$\inf_{\substack{g\\ q(g)=q(f)}} p'_k(g) = r_k(q(f)) \leq \inf_{\ell\in\ker(q)} p'_k(f+\ell),$$
ce qui suffit.

Posons $L_k := \ker p'_k$ et considérons l'application
$$q_k : F/L_k \to F_0/\ker r_k \quad [x]_{L_k} \mapsto [q(x)]_{\ker(r_k)}.$$

1. *q_k est bien défini et linéaire.* Soient x et $x' \in F$ tels que $x - x' \in L_k$. On a
$$r_k(q(x) - q(x')) = r_k(q(x-x')) \leq p'_k(x-x') = 0.$$
Par conséquent, $q(x) - q(x') \in \ker r_k$.

2. *q_k est continu.* De fait, pour tout $[x]_{L_k} \in F/L_k$, on a
$$\begin{aligned}\tilde{r}_k(q_k([x]_{L_k})) &= \tilde{r}_k([q(x)]_{\ker r_k})\\ &= r_k(q(x)) \leq p'_k(x) = \tilde{p}'_k([x]_{L_k}).\end{aligned}$$

3. *q_k est relativement ouvert.* Etablissons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\inf_{h\in\ker(q_k)} \tilde{p}'_k([f]_{L_k} + h) \leq C\tilde{r}_k(q(f) + \ker(r_k))$$
pour tout $f \in F$. Procédons par étapes.

a) Remarquons que pour tout $f \in F$, il existe $f_0 \in F$ tel que $q(f_0) = q(f)$ et $p'_k(f_0) \leq 2r_k(q(f))$. Rappelons que
$$r_k(q(f)) = \inf_{\ell\in\ker(q)} p'_k(f+\ell) < (1+\varepsilon)r_k(q(f)) \quad , \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Par conséquent, il existe $\ell_0 \in \ker(q)$ tel que
$$p'_k(f+\ell_0) < (1+\varepsilon)r_k(q(f)).$$

Donc, $f_0 := f + \ell_0$ et $\varepsilon = 1$ conviennent.

b) Or,

$$\ker(q_k) = \{f_0 + \ker(p'_k) : q(f_0) \in \ker(r_k)\}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\inf_{h \in \ker(q_k)} \tilde{p}'_k([f]_{\ker(p'_k)} + h) &= \inf_{f_0 \in F : r_k q(f_0) = 0} \tilde{p}'_k([f + f_0]_{\ker(p'_k)}) \\
&= \inf_{f_0 \in F : r_k q(f_0) = 0} p'_k(f + f_0).
\end{aligned}$$

c) On peut en déduire que

$$\begin{aligned}
\inf_{h \in \ker(q_k)} \tilde{p}'_k([f]_{\ker(p'_k)} + h) &= \inf_{\substack{h \in F \\ r_k q(h) = 0}} p'_k(f + h) \\
&\leq p'_k(f + f_0 - f) \\
&= p'_k(f_0) \\
&\leq 2 r_k(q(f)) \\
&= 2 \tilde{r}_k(q(f) + \ker(r_k)).
\end{aligned}$$

4. q_k *est surjectif*. Soit $[y] = y + \ker r_k \in F_0 / \ker r_k$. Puisque $y \in F_0$, il existe $x \in F$ tel que $q(x) = y$ car q est surjectif. Dans ces conditions, $[x]_{L_k} = x + L_k$ vérifie $q_k([x]_{L_k}) = [y]_{\ker(r_k)}$. De fait,

$$\begin{aligned}
q_k([x]_{L_k}) &= q(x) + \ker(r_k) \\
&= y + \ker(r_k) \\
&= [y]_{\ker(r_k)}.
\end{aligned}$$

En résumé, l'application

$$q_k : F/L_k \rightarrow F_0 / \ker(r_k)$$

est continue, linéaire, surjective et relativement ouverte.

De plus, $q(L_k) \subset \ker(r_k)$. De fait, si $x \in L_k$, démontrons que $r_k(q(x)) = 0$. On a

$$r_k(q(x)) = \inf\{p'_k(y) : q(y) = q(x)\} \leq p'_k(x) = 0.$$

Par conséquent, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho_k^F"'] & F_0 \arrow[d, "\rho_k^{F_0}"] \\
F/L_k \arrow[r, "q_k"'] & F_0/\ker(r_k)
\end{tikzcd}$$

Nous savons que le prolongement

$$\hat{q}_k : \widehat{F/L_k} \to \widehat{F_0/\ker r_k}$$

est linéaire et continu.

Etablissons que cette application $\hat{q}_k$ est surjective.

Soient $\varepsilon > 0$ et $[y] \in \widehat{F_0/\ker r_k}$ avec $[y] \neq 0$. Puisque l'espace $F_0/\ker r_k$ est dense dans $\widehat{F_0/\ker r_k}$, considérons une suite $([y_m])_{m\in\mathbb{N}}$ de $F_0/\ker r_k$ qui converge vers $[y]$.

A présent, choisissons une sous-suite $([y_{\ell(m)}])$ telle que

$$\tilde{r}_k([y_{\ell(1)}]) \leq (1+\varepsilon)\,\|[y]\|_{\hat{F}_{0k}} \tag{I.6.1}$$

et

$$\tilde{r}_k([y_{\ell(m+1)}] - [y_{\ell(m)}]) < 2^{-m+1}\,\|[y]\|_{\hat{F}_{0k}}\,\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}. \tag{I.6.2}$$

Rappelons que pour tout ε strictement positif et pour tout $[y]$ appartenant à $F_0/\ker r_k$, il existe $[x]$ appartenant à F/L_k tel que $q_k([x]) = [y]$ et $\tilde{p}'_k([x]) \leq (1+\varepsilon)\tilde{r}_k([y])$.

On en déduit que pour tout entier m strictement positif, il existe $[x_m]$ appartenant à F/L_k tel que

$$q_k([x_m]) = [y_{\ell(m+1)} - y_{\ell(m)}]$$

et

$$\tilde{p}'_k([x_m]) \leq (1+\varepsilon)\tilde{r}_k([y_{\ell(m+1)}] - [y_{\ell(m)}]) \leq 2^{-m+1}\,\|[y]\|_{\hat{F}_{0k}}\,\varepsilon^2$$

vu l'inégalité (I.6.2).

Par conséquent,

$$\sum_{j=p}^{q} \tilde{p}'_k([x_j]) \leq \|[y]\|_{\hat{F}_{0k}}\,\varepsilon^2 \sum_{j=p}^{q} 2^{-j+1}$$

et puisque $\sum_{j=p}^{q} 2^{-j+1}$ est un tronçon de Cauchy d'une série convergente,la série $[z] := \sum_{p=1}^{\infty}[x_p]$ converge dans $\widehat{F/L_k}$. On a aussi

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{p}'_k([x_\ell]) \leq \|[y]\|_{\hat{F}_{0k}}\,\varepsilon^2.$$

A présent, choisissons $[x_0]$ appartenant à F/L_k tel que

$$q_k([x_0]) = [y_{\ell(1)}]$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{p}'_k([x_0]) &\leq (1+\varepsilon)\tilde{r}_k([y_{\ell(1)}])\\ &\leq (1+\varepsilon)^2\,\|[y]\|_{\hat{F}_{0k}}\end{aligned}$$

vu l'inégalité (I.6.1).

Comme

$$[x_0] + [z] = \lim_{s\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{s} [x_\ell],$$

il vient

$$\begin{aligned}
\hat{q}_k([x_0]+[z]) &= \lim_{s\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{s} q_k([x_\ell]) \\
&= \lim_{s\to+\infty} ([y_{\ell(1)}] + [y_{\ell(2)}] - [y_{\ell(1)}] + \cdots + [y_{\ell(s+1)}] - [y_{\ell(s)}]) \\
&= \lim_{s\to+\infty} [y_{\ell(s+1)}] \\
&= [y].
\end{aligned}$$

Donc, l'application $\hat{q}_k$ est surjective et par conséquent ouverte.

Rappelons que $\hat{F}_{0k} := \widehat{F_0/\ker r_k}$. Par la proposition I.14, on a

$$F_0 \simeq \underset{\leftarrow m}{\operatorname{proj}} \hat{F}_{0m}.$$

Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E, \hat{F}_{0k})$. Il suffit d'établir que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)$ où $\mathcal{F}_0$ est le spectre canonique associé à F_0 (comme dans la première partie).

Puisque l'espace E est nucléaire et que l'application $\hat{q}_k$ est surjective, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application $\tilde{A}_k$ appartenant à $L(E, \hat{F}_k)$ telle que $\hat{q}_k \circ \tilde{A}_k = A_k$.

Comme $(\tilde{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k L(E, \hat{F}_k)$ et $\operatorname{Ext}(E, F) = 0$, $(\tilde{A}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, \mathcal{F})$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(\tilde{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E, \hat{F}_k)$ telle que

$$\tilde{A}_k = \rho^F_{k+1,k} \circ \tilde{B}_{k+1} - \tilde{B}_k.$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, "\rho^F_{k+1}"] \arrow[drr, "\rho^F_k"] \arrow[ddd, "q"] & & \\
& \hat{F}_{k+1} \arrow[r, "\rho^F_{k+1,k}"] \arrow[d, "\hat{q}_{k+1}"] & \hat{F}_k \arrow[d, "\hat{q}_k"] \\
& \hat{F}_{0,k+1} \arrow[r, "\rho^{F_0}_{k+1,k}"'] & \hat{F}_{0,k} \\
F_0 \arrow[ur, "\rho^{F_0}_{k+1}"] \arrow[urr, "\rho^{F_0}_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

On voit tout de suite que $\hat{q}_k \circ \rho^F_{k+1,k} = \rho^{F_0}_{k+1,k} \circ \hat{q}_{k+1}$ sur $\rho^F_{k+1}(F)$. Mais, on voudrait cette égalité sur $\hat{F}_{k+1}$.

Puisque l'application

$$\rho^F_{k+1} : F \to F_{k+1} \quad f \mapsto [f]_{L_{k+1}},$$

est surjective, $\rho^F_{k+1}(F) = F_{k+1}$. Puisque le complété de F_{k+1} est $\hat{F}_{k+1}$, le complété de $\rho^F_{k+1}(F)$ est $\hat{F}_{k+1}$ et, par conséquent, on a

$$\hat{q}_k \circ \rho^F_{k+1,k} = \rho^{F_0}_{k+1,k} \circ \hat{q}_{k+1} \ \text{ sur } \ \hat{F}_{k+1}.$$

Posons

$$B_k := \hat{q}_k \circ \tilde{B}_k \in L(E, \hat{F}_{0k}).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} A_k &= \hat{q}_k \circ \tilde{A}_k \\ &= \hat{q}_k \circ \rho^F_{k+1,k} \circ \tilde{B}_{k+1} - \hat{q}_k \circ \tilde{B}_k \\ &= \rho^{F_0}_{k+1,k} \circ \hat{q}_{k+1} \circ \tilde{B}_{k+1} - \hat{q}_k \circ \tilde{B}_k \\ &= \rho^{F_0}_{k+1,k} B_{k+1} - B_k. \end{aligned}$$

Au total, la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E, \mathcal{F}_0)$, ce qui suffit.

■

Définition I.28 Un spectre d'espaces de Banach $(\hat{F}_k, \rho_{k+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ (pas nécessairement le spectre canonique de la première partie) est un *système fondamental d'espaces de Banach pour l'espace de Fréchet F* si

i) F est isomorphe à $\mathrm{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$;

ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > k$ tel que $\rho_k F$ soit dense dans $\rho_{\ell,k}\hat{F}_\ell$.

Le spectre est dit *réduit* si $\hat{F}_k = \overline{\rho_k F}^{\hat{F}_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme I.29 *Soit F un espace de Fréchet et $\mathcal{F} = (\hat{F}_k, \rho_{k+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ un système fondamental d'espaces de Banach pour l'espace F. Considérons la suite :*

$$0 \to F \xrightarrow{i} \prod_k \hat{F}_k \xrightarrow{q} \prod_k \hat{F}_k \to 0 \qquad \text{(I.6.3)}$$

avec
1) $i(x) := (\rho_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ *où* $\rho_k : F \to \hat{F}_k$ *est la projection canonique et*
2) $q((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) := (\rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Dans ces conditions, la suite (I.6.3) est topologiquement exacte.

Preuve. D'une part, i est injectif car il s'agit de l'opérateur identité. D'autre part,

$$\begin{aligned} \ker(q) &= \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k \hat{F}_k : \rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k = 0, \ \forall k\} \\ &= F \qquad \text{(I.6.4)} \\ &= i(F). \end{aligned}$$

L'égalité en (I.6.4) provient du fait que F est isomorphe à $\mathrm{proj}_{\leftarrow m} \hat{F}_m$. Il nous reste donc à démontrer que q est surjectif. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

Première étape. Supposons que le spectre est réduit, c'est-à-dire que $\hat{F}_k = \overline{\rho_k F}^{\hat{F}_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\hat{F}_k = \overline{\rho_k F}^{\hat{F}_k} = \overline{\rho_{k+1,k} \circ \rho_{k+1}(F)}^{\hat{F}_k} \subset \overline{\rho_{k+1,k}(\hat{F}_{k+1})}^{\hat{F}_k}.$$

Puisque l'autre inclusion est évidente, $\mathrm{im}(\rho_{k+1,k})$ est dense dans $\hat{F}_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En multipliant la norme $\|.\|_{\hat{F}_k}$ de $\hat{F}_k$ par un certain facteur, nous pouvons assurer que $\|\rho_{k+1,k}\|_{\hat{F}_k} \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $\rho_{k+1,k}$ est un opérateur linéaire, continu. Dès lors,

$$\|\rho_{jk} x\|_{\hat{F}_k} \leq \|\rho_{jk}\| \, \|x\|_{\hat{F}_j} \leq \|x\|_{\hat{F}_j} \quad , \quad \forall j > k, \ \forall x \in \hat{F}_j.$$

Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k \hat{F}_k$. Il suffit de trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k \hat{F}_k$ telle que $q(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Déterminons une autre suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k \hat{F}_k$ par récurrence :
$v_1 := 0 \in \hat{F}_1$. Si v_k appartient à $\hat{F}_k$, il existe v_{k+1} appartenant à $\hat{F}_{k+1}$ tel que

$$\|y_k + v_k - \rho_{k+1,k} v_{k+1}\|_{\hat{F}_k} \leq 2^{-k},$$

car $\mathrm{im}\,\rho_{k+1,k}$ est dense dans $\hat{F}_k$. Si on pose

$$u_k := y_k + v_k - \rho_{k+1,k} v_{k+1} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

on a $\|u_k\|_{\hat{F}_k} \leq 2^{-k}$. Dès lors,

$$x_k := v_k - \sum_{j=k}^{+\infty} \rho_{jk} u_j \quad , \quad \forall k$$

convient. Tout d'abord, $x_k \in \hat{F}_k$ pour tout k, car la série $\sum_{j=k}^{+\infty} \rho_{jk} u_j$ converge dans $\hat{F}_k$. En effet,

$$\|\rho_{jk} u_j\|_{\hat{F}_k} \leq \|u_j\|_{\hat{F}_j} \leq 2^{-j}.$$

Donc,

$$\sum_{j=p}^{q} \|\rho_{jk} u_j\|_{\hat{F}_k} \leq \sum_{j=p}^{q} 2^{-j}$$

et $\sum_{j=p}^{q} 2^{-j}$ est un tronçon de Cauchy d'une série convergente. Puisque $\hat{F}_k$ est un espace de Banach, on conclut que la série $\sum_{j=k}^{+\infty} \rho_{jk} u_j$ converge dans $\hat{F}_k$. De plus,

$$\begin{aligned}
&\rho_{k+1,k} x_{k+1} - x_k \\
&= \rho_{k+1,k} v_{k+1} - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \rho_{k+1,k} \rho_{j,k+1} u_j - v_k + \sum_{j=k}^{+\infty} \rho_{jk} u_j \\
&= \rho_{k+1,k} v_{k+1} - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \rho_{j,k} u_j - v_k + \sum_{j=k}^{+\infty} \rho_{jk} u_j \\
&= \rho_{k+1,k} v_{k+1} - v_k + u_k \\
&= y_k,
\end{aligned}$$

ce qui suffit.

Deuxième étape : Supposons que $\rho_k F$ est dense dans $\rho_{k+1,k}\hat{F}_{k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$G_k := \overline{\rho_{k+1,k}(\hat{F}_{k+1})}^{\hat{F}_k}.$$

Comme $\rho_k F = \rho_{k+1,k}\rho_{k+1}F \subset \rho_{k+1,k}\hat{F}_{k+1}$, on a

$$\rho_k F \subset \rho_{k+1,k}\hat{F}_{k+1} \subset G_k.$$

Donc, $\rho_k F$ est dense dans G_k car $\rho_k F$ est dense dans $\rho_{k+1,k}\hat{F}_{k+1}$ et $\rho_{k+1,k}\hat{F}_{k+1}$ est dense dans G_k.

De plus, par une démonstration analogue à celle de la proposition I.14, on a $F = \operatorname{proj}_{\leftarrow m} G_m$ (les opérateurs $\rho'_{k+1,k} : G_{k+1} \to G_k$ sont la restriction à G_{k+1} des opérateurs $\rho_{k+1,k}$).

En appliquant la première étape, l'application

$$q|_{\prod_k G_k} : \prod_k G_k \to \prod_k G_k$$

est surjective et donc $\prod_k G_k \subset \operatorname{im}(q)$. Si $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\prod_k \hat{F}_k$, établissons que cette suite appartient à $\operatorname{im}(q)$. Or,

$$(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\rho_{k+1,k}y_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} - ((\rho_{k+1,k}y_{k+1} - y_k)_{k\in\mathbb{N}}),$$

où le premier terme

$$(\rho_{k+1,k}y_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k G_k \subset \operatorname{im}(q)$$

et le second terme

$$((\rho_{k+1,k}y_{k+1} - y_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in \operatorname{im}(q)$$

par définition de q, ce qui suffit.

Troisième étape : Cas général : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > k$, tel que $\rho_k F$ soit dense dans $\rho_{\ell k}\hat{F}_\ell$. Par conséquent, nous pouvons déterminer une suite strictement croissante $(k(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ telle que $k(1) := 1$ et $\rho_{k(\nu)}F$ soit dense dans $\rho_{k(\nu+1),k(\nu)}\hat{F}_{k(\nu+1)}$. A présent, nous pouvons appliquer la deuxième étape à $(\hat{F}_{k(\nu)}, \rho_{k(\nu+1),k(\nu)})$: pour toute suite $(\eta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\prod_\nu \hat{F}_{k(\nu)}$, il existe une suite $(\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\prod_\nu \hat{F}_{k(\nu)}$ telle que

$$\eta_\nu = \rho_{k(\nu+1),k(\nu)}\xi_{\nu+1} - \xi_\nu \quad , \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \tag{I.6.5}$$

Fixons $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k \hat{F}_k$. Si nous posons

$$\eta_\nu := y_{k(\nu)} + \sum_{j=k(\nu)+1}^{k(\nu+1)-1} \rho_{jk(\nu)}y_j \in \hat{F}_{k(\nu)}; \tag{I.6.6}$$

nous pouvons trouver une suite $(\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k \hat{F}_k$ qui vérifie la condition (I.6.5). Si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k := \begin{cases} \xi_\nu \ \text{ si } \ k = k(\nu) \\ \rho_{k(\nu+1),k}\xi_{\nu+1} - \sum_{j=k}^{k(\nu+1)-1} \rho_{jk} y_j \ \text{ si } k(\nu) < k < k(\nu+1), \end{cases}$$

alors, démontrons que $\rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k = y_k$ et q est surjectif.

Différents cas sont à considérer :

cas 1 : $k = k(\nu)$

cas 1.a : $k + 1 = k(\nu + 1)$.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k &= \rho_{k(\nu+1),k(\nu)}\xi_{\nu+1} - \xi_\nu \\ &= \eta_\nu \quad \text{vu } (I.6.5) \\ &= y_{k(\nu)} \ \text{ vu } (I.6.6) \\ &= y_k. \end{aligned}$$

cas 1.b : $k + 1 < k(\nu + 1)$.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k &= \rho_{k+1,k}\left(\rho_{k(\nu+1),k+1}\xi_{\nu+1} - \sum_{j=k+1}^{k(\nu+1)-1} \rho_{j,k+1}y_j\right) - \xi_\nu \\ &= \rho_{k(\nu+1),k(\nu)}\xi_{\nu+1} - \sum_{j=k(\nu)+1}^{k(\nu+1)-1} \rho_{j,k(\nu)}y_j - \xi_\nu \\ &= \eta_\nu - \sum_{j=k(\nu)+1}^{k(\nu+1)-1} \rho_{j,k(\nu)}y_j \ \text{ vu } (I.6.5) \\ &= y_{k(\nu)} \ \text{ vu } (I.6.6) \\ &= y_k. \end{aligned}$$

cas 2 : $k(\nu) < k < k(\nu + 1)$

cas 2.a : $k + 1 = k(\nu + 1)$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k &= \rho_{k+1,k}\xi_{\nu+1} - \rho_{k(\nu+1),k}\xi_{\nu+1} + \sum_{j=k}^{k(\nu+1)-1} \rho_{jk}y_j \\ &= \rho_{kk}y_k \\ &= y_k. \end{aligned}$$

cas 2.b : $k + 1 < k(\nu + 1)$

Dans ces conditions, on a $k(\nu) < k < k+1 < k(\nu+1)$ et

$$\begin{aligned}
&\rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k \\
&= \rho_{k+1,k}\rho_{k(\nu+1),k+1}\xi_{\nu+1} - \sum_{j=k+1}^{k(\nu+1)-1} \rho_{k+1,k}\rho_{j,k+1}y_j - \rho_{k(\nu+1),k}\xi_{\nu+1} + \sum_{j=k}^{k(\nu+1)-1} \rho_{jk}y_j \\
&= \rho_{k(\nu+1),k}\xi_{\nu+1} - \sum_{j=k+1}^{k(\nu+1)-1} \rho_{jk}y_j - \rho_{k(\nu+1),k}\xi_{\nu+1} + \sum_{j=k}^{k(\nu+1)-1} \rho_{jk}y_j \\
&= \rho_{kk}y_k \\
&= y_k.
\end{aligned}$$

■

Rappelons les définitions suivantes (cf. [13]).

Définition I.30 Soient E un espace localement convexe séparé et E' son dual topologique.

a) Les semi-normes
$$\sup\{|\langle \cdot, e'\rangle| : e' \in A'\},$$
A' partie finie de E' constituent un système de semi-normes P_a sur E. L'*espace faible* E_a est l'espace (E, P_a).

b) Les semi-normes
$$\sup\{|\langle e, \cdot\rangle| : e \in A\},$$
A partie finie de E constituent un système de semi-normes P_s sur E'. L'*espace fort* E'_s est l'espace (E', P_s).

c) Le *polaire d'un sous-espace linéaire* L de E est
$$L^{\triangle} = \{e' \in E' : \langle L, e'\rangle = \{0\}\}.$$

d) L'*antipolaire d'un sous-espace linéaire* M de E' est
$$M^{\triangledown} = \{e \in E : \langle e, M\rangle = \{0\}\}.$$

Remarque I.31 Si A et B sont deux sous-espaces linéaires de E tels que $A \subset B$, alors $B^{\triangle} \subset A^{\triangle}$.

Rappelons également les résultats suivants.

Théorème I.32 *Soit E un espace localement convexe séparé.*

a) *Si L est un sous-espace linéaire de E, alors $L^{\triangle}$ est un sous-espace linéaire fermé de E'_s et $L^{\triangle\triangledown}$ est l'adhérence de L dans E.*

b) *Si M est un sous-espace linéaire de E', alors $M^{\triangledown}$ est un sous-espace linéaire fermé de E_a et $M^{\triangledown\triangle}$ est l'adhérence de M dans E'_s.*

Proposition I.33 *Soient E et F deux espaces localement convexes et H un sous-espace dense de E. Si T est un opérateur linéaire continu de E dans F et si la restriction de T à H est un homomorphisme de H dans F, alors H est un homomorphisme.*

Proposition I.34 *Soient E et F deux espaces localement convexes et T une application linéaire continue de E dans F. Cette application T est un homomorphisme si et seulement si*

a) *$T^*(F')$ est fermé dans E'_s;*

b) *pour tout équicontinu M_1 de E', il existe un équicontinu M_2 de F' tel que $T^*(F') \cap M_1 \subset T^*(M_2)$.*

Nous pouvons alors en déduire les deux résultats suivants.

Lemme I.35 *Si E et F sont deux espaces linéaires et $T \in L(E, F)$, alors*

$$\overline{T^*(F')}^{E'_s} = (\ker(T))^{\triangle}.$$

Preuve. Nous savons que

$$(\ker(T))^{\triangle} = \{e' \in E' : \langle e, e' \rangle = 0, \ \forall e \in \ker(T)\}$$

et que

$$\begin{aligned} T^*(F') &= \{T^* f' : f' \in F'\} \\ &= \{f' \circ T : f' \in F'\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $T^*(F')$ est inclus dans $(\ker(T))^{\triangle}$. En effet, si $f' \in F'$, $e \in E$ et vérifie $Te = 0$, alors

$$\langle e, f' \circ T \rangle = f'(Te) = 0.$$

Puisque $(\ker(T))^{\triangle}$ est un fermé de E'_s, $\overline{T^*(F')}^{E'_s}$ est inclus dans $(\ker(T))^{\triangle}$.

A présent, établissons l'autre inclusion. Vu la remarque I.31, et le théorème I.32, il suffit de démontrer que $(T^*(F'))^{\triangledown}$ est inclus dans $\ker(T)$.

Soit g appartenantà E tel que

$$\langle g, f' \circ T \rangle = 0 \ \ , \quad \forall f' \in F',$$

c'est-à-dire

$$\langle Tg, f' \rangle = 0 \ \ , \quad \forall f' \in F',$$

et donc g appartient à $\ker(T)$.

■

Lemme I.36 *Soient E et F deux espaces linéaires et G un sous-espace linéaire dense dans E. Si T est un opérateur linéaire continu de E dans F et si T_G désigne la restriction de T à G, alors T_G est un homomorphisme si et seulement si T est un homomorphisme et* $\ker(T)$ *est l'adhérence de* $\ker(T_G)$ *dans E.*

Preuve. Soient les applications

$$T^* : F' \to E' \quad f' \mapsto \langle T.,f'\rangle = f' \circ T$$

et T_G^* la restriction de T^* à G. Si l'application i désigne l'injection canonique de G dans E, alors l'application

$$R : E' \to G' \quad e' \mapsto e' \circ i$$

est injective (vu la densité de G) et surjective (par le théorème de Hahn-Banach). Par conséquent, les applications T_G et $T \circ i$ sont égales.

La condition est nécessaire. Vu la proposition I.33, T est un homomorphisme. Pour démontrer que $\ker(T)$ est l'adhérence de $\ker(T_G)$ dans E, nous allons procéder en plusieurs étapes.

i) Puisque $(T^*F')^{\nabla_{E,E'}} = \{e \in E : \langle e, f' \circ T\rangle = 0,\ \forall f' \in F'\}$, on a

$$(T^*F')^{\nabla_{E,E'}} = \ker(T).$$

ii) Si $f' \in F'$, alors $f' \circ T_G = f' \circ T \circ i = R(f' \circ T)$. Par conséquent,

$$R(T^*F') = (T_G^*F')$$

et

$$(T^*F')^{\nabla_{E,E'}} = (R^{-1}(T_G^*F'))^{\nabla_{E,E'}}$$

car R est bijectif.

iii) Etablissons que

$$(T_G^*F') = R\left((\ker(T_G))^{\triangle_{E,E'}}\right).$$

D'une part, comme T_G est un homomorphisme,

$$\begin{aligned} T_G^*(F') &= \overline{T_G^*(F')}^{G'_s} \\ &= (\ker(T_G))^{\triangle_{G,G'}} \quad \text{(vu le lemme I.35).} \end{aligned}$$

D'autre part, puisque

$$(\ker(T_G))^{\triangle_{G,G'}} = \{g' \in G : \langle g, g'\rangle = 0,\ \forall g \in \ker(T_G)\},$$

on a

$$R((\ker(T_G))^{\triangle_{E,E'}}) = \{R(e') : e' \in E' \ \text{ et } \ \langle g, e'\rangle = 0,\ \forall g \in \ker(T_G)\}.$$

De plus, $R((\ker(T_G))^{\triangle_{E,E'}}) = (\ker(T_G))^{\triangle_{G,G'}}$ car R est une bijection, ce qui suffit.

iv) Vu ce qui précède,

$$\begin{aligned} \ker(T) &= (T^*F')^{\nabla_{E,E'}} \\ &= (R^{-1}(T_G^*F'))^{\nabla_{E,E'}} \\ &= (\ker(T_G))^{\triangle_{E,E'},\nabla_{E,E'}} \\ &= \overline{\ker T_G}^{E}. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition nécessaire est démontrée.

La condition est suffisante. Bien sûr, l'application T_G est continue. Par la proposition I.34, il suffit de démontrer que $T_G^*(F')$ est fermé dans G'_s et que, pour tout équicontinu M_1 de G', il existe un équicontinu M_2 de F' tel que $T_G^* F' \cap M_1 \subset T_G^* M_2$.

Tout d'abord, comme nous l'avons établi dans la condition nécessaire, $T_G^*(F') = R(T^* F')$, donc

$$\begin{aligned} R(T^*F') &= R((\ker(T))^{\triangle_{E,E'}}) \ \text{ (car } T \text{ est un homomorphisme)} \\ &= R\left(\left(\overline{\ker(T\circ i)}^E\right)^{\triangle_{E,E'}}\right) \\ &= \{e'\circ i : \langle e, e'\rangle = 0,\ \forall e \in \overline{\ker(T_G)}^E\} \\ &= \{e'\circ i : \langle e, e'\circ i\rangle = 0,\ \forall e \in \ker(T_G)\} \\ &= (\ker(T_G))^{\triangle_{G,G'}}. \end{aligned}$$

De plus, soit M_1 un équicontinu de G'. Il existe donc une semi-norme continue p sur E telle que

$$M_1 \subset \{g' \in G' : |\langle g, g'\rangle| \leq p(g),\ \forall g \in G\}.$$

A présent, appliquons la proposition I.34 à l'opérateur T. Si

$$\mathcal{M}_1 = \{e' \in E' : |\langle e, e'\rangle| \leq p(e),\ \forall e \in E\},$$

il existe une semi-norme continue q sur E telle que

$$\mathcal{M}_1 \cap T^*F' \subset \{f'\circ T : |\langle f, f'\rangle| \leq q(f),\ \forall f \in F\} = T^* M_2$$

avec

$$M_2 = \{f' \in F' : |\langle f, f'\rangle| \leq q(f) \quad , \quad \forall f \in F\}.$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} R^{-1}M_1 &\subset R^{-1}\{g' \in G' : |\langle g, g'\rangle| \leq p(g),\ \forall g \in G\} \\ &\subset \{e' \in E' : |\langle e, e'\rangle| \leq p(e),\ \forall e \in E\} = \mathcal{M}_1, \end{aligned} \tag{I.6.7}$$

l'inclusion (I.6.7) résultant du théorème de Hahn-Banach.

On en déduit que si $f' \in F'$ et $T_G^* f' = f'\circ T_G$ appartient à M_1, alors

$$R^{-1}(f'\circ T_G) = R^{-1}(f'\circ T\circ i) = f'\circ T = T^* f' \in \mathcal{M}_1.$$

Par conséquent, $T^* f' \in T^* M_2$. De plus, comme

$$T_G^* f' = f'\circ T_G = R(R^{-1}(f'\circ T_G)) = R(T^* f'),$$

$T_G^* f'$ appartient à $R(T^* M_2)$.

La conclusion s'ensuit aussitôt car

$$R(T^*M_2) = \{f'\circ T\circ i : f' \in M_2\} = T_G^*(M_2).$$

■

La proposition suivante est essentielle dans la démonstration du theorème reliant Ext et le splitting.

Lemme I.37 *Soient*

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \to 0$$

une suite topologiquement exacte entre espaces de Fréchet et $P^G := \{p_k^G : k \in \mathbb{N}\}$ *un système de semi-normes sur* G*. Si pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, nous posons*

$$p_k^F(x) := p_k^G(ix) \quad , \qquad \forall x \in F$$

et

$$p_k^H(y) := \inf\{p_k^G(x) : x \in G,\ q(x) = y\}, \qquad \forall y \in H,$$

alors $P^F := \{p_k^F : k \in \mathbb{N}\}$ *et* $P^H := \{p_k^H : k \in \mathbb{N}\}$ *sont des systèmes de semi-normes sur* F *et* H *respectivement, ces systèmes définissant les topologies de* F *et* H*.*

Si les suites $(\hat{F}_k, \rho_{k+1,k}^F)$*,* $(\hat{G}_k, \rho_{k+1,k}^G)$ *et* $(\hat{H}_k, \rho_{k+1,k}^H)$ *désignent les spectres canoniques associés à ces systèmes de semi-normes (ils sont définis comme dans la première partie), alors les lignes du diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{q} & H & \to & 0 \\
 & & \downarrow \rho_{k+1}^F & \hookrightarrow & \downarrow \rho_{k+1}^G & \hookrightarrow & \downarrow \rho_{k+1}^H & & \\
0 & \to & \hat{F}_{k+1} & \xrightarrow{i_{k+1}} & \hat{G}_{k+1} & \xrightarrow{q_{k+1}} & \hat{H}_{k+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \rho_{k+1,k}^F & \hookrightarrow & \downarrow \rho_{k+1,k}^G & \hookrightarrow & \downarrow \rho_{k+1,k}^H & & \\
0 & \to & \hat{F}_k & \xrightarrow{i_k} & \hat{G}_k & \xrightarrow{q_k} & \hat{H}_k & \to & 0
\end{array} \tag{I.6.8}$$

sont topologiquement exactes pour tout $k \in \mathbb{N}$*. (Les applications* i_k *et* q_k *sont à définir).*

Preuve. On voit tout de suite que P^F définit un système de semi-normes sur F, car l'application i est linéaire et P^G est un système de semi-normes sur G.

Par une démonstration analogue à celle de la proposition I.27, nous en déduisons que P^H définit un système de semi-normes.

Rappelons l'expression des normes sur les espaces de Banach $\hat{F}_k$, $\hat{G}_k$ et $\hat{H}_k$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous posons $N_k := \ker p_k^F$, $M_k := \ker p_k^G$ et $Q_k := \ker p_k^H$ et de la même manière que dans le paragraphe I.1, les applications

$$\begin{array}{ll}
\widetilde{p_k^F} : F/N_k \to \mathbb{R} & [f]_{N_k} \mapsto p_k^F(f) \\
\widetilde{p_k^G} : G/M_k \to \mathbb{R} & [g]_{M_k} \mapsto p_k^G(g) \\
\widetilde{p_k^H} : H/Q_k \to \mathbb{R} & [h]_{Q_k} \mapsto p_k^H(h)
\end{array}$$

déterminent des normes sur F/N_k, G/M_k et H/Q_k respectivement.

Donc,

$$F_k := (F/N_k, \widetilde{p_k^F}), G_k := (G/M_k, \widetilde{p_k^G}), H_k := (H/Q_k, \widetilde{p_k^H})$$

sont des espaces normés et il existe des espaces normés complets

$$(\hat{F}_k, \|.\|_k^F), (\hat{G}_k, \|.\|_k^G), (\hat{H}_k, \|.\|_k^H).$$

Ce sont ces espaces de Banach que nous retrouvons dans les spectres canoniques $(\hat{F}_k, \rho^F_{k+1,k})$, $(\hat{G}_k, \rho^G_{k+1,k})$ et $(\hat{H}_k, \rho^H_{k+1,k})$.

A présent, considérons l'application :

$$\tilde{\imath}_k : F_k \to G_k \quad [x]_{N_k} \mapsto [i(x)]_{M_k}.$$

Tout d'abord, $\tilde{\imath}_k$ est bien défini. En effet, si x et $x' \in F$ tels que $x - x' \in N_k$, on a $p^F_k(x - x') = 0$. Or, par définition de p^F_k, on a

$$p^F_k(x - x') = p^G_k(i(x - x')) = p^G_k(i(x) - i(x')).$$

Donc, $p^G_k(i(x) - i(x')) = 0$ et $i(x) - i(x')$ appartient à M_k.

Il est clair que i_k est linéaire.

De plus, il vient

$$\begin{aligned} \widetilde{p^G_k}(\tilde{\imath}_k([x]_{N_k})) = \widetilde{p^G_k}([i(x)]_{M_k}) &= p^G_k(i(x)) \\ &= p^F_k(x) \\ &= \widetilde{p^F_k}([x]_{N_k}) \end{aligned} \tag{I.6.9}$$

Par conséquent, l'application $\tilde{\imath}_k$ est une isométrie.

Dans ces conditions, le prolongement $i_k : \hat{F}_k \to \hat{G}_k$ de $\tilde{\imath}_k$ est linéaire et continu.

Etablissons que l'application i_k est injective. De fait, comme $\hat{F}_k$ est le complété de F_k, pour tout z appartenant à $\hat{F}_k$, il existe une suite $[x_m]_{N_k}$ appartenant à F_k telle que $[x_m]_{N_k}$ converge vers z dans $\hat{F}_k$. Puisque i_k est continu, la suite $i_k([x_m]_{N_k})$ converge vers $i_k(z)$.

De plus, vu (I.6.9),

$$\|[x_m]_{N_k}\|^F_k = \|i_k([x_m]_{N_k})\|^G_k$$

et la suite $\|i_k([x_m]_{N_k})\|^G_k$ converge vers $\|i_k(z)\|^G_k$. Donc, par égalité des limites, on a $\|i_k(z)\|^G_k = \|z\|^F_k$, pour tout z appartenant à $\hat{F}_k$. En particulier, i_k est injectif.

Enfin, l'application i_k est relativement ouverte, car

$$\inf_{\ell \in \ker(i_k)} \|x + \ell\|^F_k = \|x\|^F_k = \|i_k(x)\|^G_k \tag{I.6.10}$$

pour tout $x \in \hat{F}_k$. L'égalité en (I.6.10) provient du fait que i_k est injectif.

Introduisons l'application

$$\tilde{q}_k : G_k \to H_k \quad [x]_{M_k} \mapsto [q(x)]_{Q_k}.$$

En recourant à la démonstration de la propriété I.27, cette application a un sens, est linéaire, continue, relativement ouverte et surjective et son prolongement $q_k : \hat{G}_k \to \hat{H}_k$ est surjectif et relativement ouvert.

Vu les définitions de $\tilde{\imath}_k$ et $\tilde{q}_k$, on voit tout de suite que le diagramme (I.6.8) commute.

Pour conclure, il nous reste à établir que $\ker(q_k) = \mathrm{im}(i_k)$.

D'une part, si x appartient à $\mathrm{im}(i_k)$, il existe z appartenant à $\hat{F}_k$, tel que $i_k(z) = x$. Puisque $\hat{F}_k$ est le complété de F_k, il existe une suite $[z_m]_{N_k}$ de F_k qui converge vers z. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} q_k(x) &= q_k(i_k(z)) \\ &= \lim_{k \to \infty} q_k(i_k([z_m]_{N_k})) \\ &= \lim_{k \to \infty} q_k([i(z_m)]_{M_k}) \\ &= \lim_{k \to \infty} ([q(i(z_m))]_{Q_k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$. Donc, x appartient à $\ker(q_k)$, ce qui démontre la première inclusion.

D'autre part, en ce qui concerne l'autre inclusion, nous allons procéder en deux étapes.

i) *Première étape* : Soit x un élément de G tel que $[x]_{M_k}$ appartient à $\rho_k(G)$ $(= G_k)$ et à $\ker(q_k)$. Etablissons que $[x]_{M_k}$ appartient à $i_k(\hat{F}_k)$. Comme

$$q_k([x]_{M_k}) = [q(x)]_{Q_k} = [0]_{Q_k} = Q_k,$$

par définition de l'application q_k et de l'ensemble Q_k, $q(x)$ appartient à $\ker(p_k^H)$. Il s'ensuit que

$$\inf_{\alpha \in G} \{p_k^G(\alpha - x) : q(\alpha) = 0\} = 0.$$

Il existe donc une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\ker(q)$ telle que $p_k^G(\alpha_m - x)$ converge vers 0. Puisque les sous-espaces $\ker(q)$ et $\mathrm{im}(i)$ coïncident, il existe une suite β_m appartenant à F telle que $\alpha_m = i(\beta_m)$ pour tout m, ce qui implique que la suite $p_k^G(i(\beta_m) - x)$ converge vers 0. Par conséquent, comme

$$\begin{aligned} \widetilde{p_k^G}([i(\beta_m) - x]_{M_k}) &= \widetilde{p_k^G}([i(\beta_m)]_{M_k} - [x]_{M_k}) \\ &= \widetilde{p_k^G}(\tilde{i}_k([\beta_m]_{N_k}) - [x]_{M_k}) \to 0 \text{ si } m \to \infty; \end{aligned}$$

la suite $\tilde{i}_k([\beta_m]_{N_k}) - [x]_{M_k}$ converge vers 0 dans G_k et $[x]_{M_k}$ appartient à $\overline{\tilde{i}_k(F_k)} = i_k(\hat{F}_k)$.

ii) *Deuxième étape* : Considérons un élément x de $\ker(q_k)$ $(\subset \hat{G}_k)$. Puisque l'application $\tilde{q}_k$ est une application linéaire continue relativement ouverte, il s'agit d'un homomorphisme. Par le théorème précédent, l'application q_k est un homomorphisme et

$$\overline{\ker(\tilde{q}_k)}^{\hat{G}_k} = \ker(q_k).$$

Comme x appartient à $\ker(q_k)$, il existe une suite $[x_m]_{M_k}$ de $\ker(\tilde{q}_k)$ telle que $[x_m]_{M_k}$ converge vers x.

Le sous-espace $\ker(\tilde{q}_k)$ étant inclus dans l'espace G_k, nous pouvons appliquer la première partie et la suite $[x_m]_{M_k}$ appartient à $i_k(\hat{F}_k)$.

Il s'ensuit que x apartient à $i_k(\hat{F}_k)$, car il s'agit d'un sous-espace fermé de $\hat{G}_k$.

■

Après tous ces préparatifs, nous sommes enfin en mesure de démontrer le théorème annoncé au début de cette section.

Théorème I.38 *Si E, F, H sont trois espaces de Fréchet, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout espace G de Fréchet, pour toute suite topologiquement exacte*

$$0 \to F \to G \xrightarrow{q} H \to 0$$

et pour toute application φ appartenant à $L(E, H)$, il existe une application ψ appartenant à $L(E, G)$ telle que $q \circ \psi = \varphi$.

(ii) *Pour tout espace G de Fréchet, toute suite topologiquement exacte*

$$0 \to F \to G \to E \to 0$$

"splits".

(iii) *Pour tout espace G de Fréchet, pour toute suite topologiquement exacte*

$$0 \to H \xrightarrow{i} G \to E \to 0$$

et pour toute application φ appartenant à $L(H, F)$, il existe une application ψ appartenant à $L(G, F)$ telle que $\varphi = \psi \circ i$.

L'assertion (i) *implique que* $\mathrm{Ext}(E, F) = 0$.
La réciproque est vraie si l'espace E est nucléaire.

Preuve. Rappelons que la suite topologiquement exacte

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$$

"splits" si elle satisfait à l'une des conditions suivantes :
(a) $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$ est un sous-espace complémenté de F.
(b) il existe $\psi \in L(E, G)$ tel que $q \circ \psi = \mathrm{id}_E$.
(c) il existe $\varphi \in L(G, F)$ tel que $\varphi \circ i = \mathrm{id}_F$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Par hypothèse, pour toute suite topologiquement exacte

$$0 \to F \to G \xrightarrow{q} H \to 0$$

et pour tout $\varphi \in L(E, H)$, il existe $\psi \in L(E, G)$ tel que $q \circ \psi = \varphi$.

Considérons le cas où $H := E$ et $\varphi := \mathrm{id}_E$. Donc il existe une application $\psi \in L(E, G)$ telle que $q \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et la suite $0 \to F \to G \to E \to 0$ "splits" vu (b). Schématiquement, on a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] & G \arrow[rr, "q"] & & E \arrow[r] & 0 \\
& & & E \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_E"'] & &
\end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Considérons une suite topologiquement exacte

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \to 0$$

et une application φ appartenant à $L(E, H)$. Etablissons qu'il existe une application ψ appartenant à $L(E, G)$ telle que $q \circ \psi = \varphi$.

Soit $\tilde{G} := \{(x, y) \in G \times E : q(x) = \varphi(y)\}$ et Π_1, Π_2 les projections dans les espaces G et E respectivement. L'application suivante :

$$j : F \to \tilde{G} \quad x \mapsto (ix, 0)$$

a un sens. En effet, si x appartient à F, alors $(ix, 0)$ est un élément de $\tilde{G}$ car, comme $\ker(q) = \mathrm{im}(i)$, on a $q(i(x)) = 0 = \varphi(0)$.

Dans ces conditions, la suite

$$0 \to F \xrightarrow{j} \tilde{G} \xrightarrow{\Pi_2} E \to 0 \tag{I.6.11}$$

est topologiquement exacte.

En effet, on voit tout de suite que l'application j est linéaire, continue, relativement ouverte et injective car i a les mêmes propriétés.

De plus, l'application Π_2 est bien sûr linéaire, continue et elle est surjective. De fait, si $y \in E$, alors $\varphi(y) \in H$. Puisque q est surjectif, il existe un élément x de G tel que $q(x) = \varphi(y)$. Par conséquent, $(x, y) \in \tilde{G}$ et $\Pi_2(x, y) = y$.

On en déduit que Π_2 est relativement ouvert.

Il reste à établir que $\mathrm{im}(j) = \ker(\Pi_2)$.

Si y appartient à $\mathrm{im}(j)$, il existe x appartenant à F tel que $y = j(x)$. Il vient

$$\Pi_2(y) = \Pi_2(j(x)) = \Pi_2(i(x), 0) = 0.$$

Démontrons l'autre inclusion. Soit $(x, y) \in \tilde{G}$ tel que $\Pi_2(x, y) = y = 0$. Comme φ est linéaire, $q(x) = \varphi(y) = 0$ et x appartient à $\ker(q) = \mathrm{im}(i)$. Par conséquent, $(x, 0) = (x, y)$ appartient à $\mathrm{im}(j)$.

Par hypothèse, comme la suite

$$0 \to F \xrightarrow{j} \tilde{G} \xrightarrow{\Pi_2} E \to 0$$

est topologiquement exacte, elle "splits". Il existe donc (vu (b)) une application r appartenant à $L(E, \tilde{G})$ telle que $\Pi_2 \circ r = \mathrm{id}_E$.

Etablissons que l'application $\psi := \Pi_1 \circ r$ convient. Il s'agit bien sûr d'une application linéaire continue de E dans G telle que, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} q \circ \psi(x) &= q \circ \Pi_1 \circ r(x) \\ &= q(\Pi_1 \circ r(x)) \\ &= \varphi(\Pi_2 \circ r(x)) \\ &= \varphi(x), \end{aligned}$$

ce qui suffit.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Par hypothèse, pour toute suite topologiquement exacte

$$0 \to H \xrightarrow{i} G \to E \to 0$$

et pour tout $\varphi \in L(H,F)$, il existe $\psi \in L(G,F)$ tel que $\varphi = \psi \circ i$. Considérons le cas où $H := F$ et $\varphi := \mathrm{id}_F$. Donc il existe une application $\psi \in L(G,F)$ telle que $\psi \circ i = \mathrm{id}_F$ et la suite $0 \to F \to G \to E \to 0$ "splits", vu (c). Schématiquement, on a :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & E \arrow[r] & 0 \\ & & F & & \end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Considérons une suite topologiquement exacte

$$0 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$$

et une application φ appartenant à $L(H,F)$. Etablissons qu'il existe une application ψ appartenant à $L(G,F)$ telle que $\varphi = \psi \circ i$.

Soit
$$P := \{(\varphi(x), i(x)) : x \in H\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace fermé de $F \times G$. De fait, soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $\varphi(x_m)$ converge vers x_0 dans F et $i(x_m)$ converge vers y_0 dans G.

Démontrons que (x_0, y_0) appartient à P. Comme $\mathrm{im}(i)$ est un sous-espace fermé de G, il existe un élément x_0' de H tel que $i(x_m)$ converge vers $i(x_0')$ dans G et, par unicité de la limite, on a $y_0 = i(x_0')$. Puisque l'application $i^{-1} : \mathrm{im}(i) \to H$ est continue, la suite x_m converge vers x_0' dans H. Par conséquent, la suite $\varphi(x_m)$ converge vers $\varphi(x_0')$ car l'application φ est continue et par unicité de la limite, on a $x_0 = \varphi(x_0')$. Au total, $(x_0, y_0) = (\varphi(x_0'), i(x_0'))$, avec x_0' appartenant à H, ce qui suffit.

On en déduit que l'espace $\tilde{G} := (F \times G)/P$ est un espace de Fréchet.

Considérons l'application

$$j : F \to \tilde{G} \quad x \mapsto [(x,0)]_P.$$

Elle est linéaire et injective. En effet, soit $x \in F$ tel que $(x,0) \in P$. Etablissons que $x = 0$. Puisque $(x,0)$ est un élément de P, il existe h appartenant à H tel que $(x,0) = (\varphi(h), i(h))$. Comme l'application i est injective, on en déduit que $h = 0$ et $\varphi(h) = 0$ car φ est linéaire et $x = 0$.

De plus, j est continu. En effet, si q_0 est une semi-norme continue sur F et p_0 une semi-norme continue sur G, alors pour tout x appartenant à F, il vient

$$\begin{aligned} \inf_{h\in P}(q_0+p_0)((x,0)+h) &= \inf_{h=(h_1,h_2)\in P}(q_0(x+h_1)+p_0(h_2)) \\ &= \inf_{h\in H}(q_0(x+\varphi(h))+p_0(i(h))) \\ &\le q_0(x)+p_0(0) = q_0(x). \end{aligned}$$

Ensuite, considérons les applications suivantes :

$$\tilde{\jmath} : G \to \tilde{G} \quad z \mapsto [(0,-z)]_P$$

et

$$\ell : \tilde{G} \to E \quad [(x,y)]_P \mapsto q(y).$$

De la même manière que pour j, l'application $\tilde{\jmath}$ est continue.

A présent, examinons les propriétés de l'application ℓ.

1) *Elle a un sens.* De fait, soient $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ tels que $[(x,y)]_P = [(x',y')]_P$. On en déduit que $(x - x',\ y - y')$ est un élément de P. Par conséquent, $y - y'$ appartient à $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$ et $q(y) = q(y')$.

2) *Elle est surjective.* Si z appartient à E, établissons qu'il existe un élément $[(x,y)]_P$ de $\tilde{G}$ tel que $q(y) = z$. Puisque q est surjectif, il existe y appartenant à G tel que $q(y) = z$. Par conséquent, l'élément $[(0,y)]_P$ appartenant à $\tilde{G}$ convient car $\ell([(0,y)]_P) = q(y) = z$.

3) *Elle est continue.* Soit p une semi-norme continue sur E. Puisque l'application q est continue, il existe une semi-norme continue q_1 sur G telle que $p(q(y)) \leq q_1(y)$ pour tout $y \in G$. Or, $p(q(y + i(h))) = p(q(y))$ pour tout $h \in H$, car $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$. Pour tout élément $[(x,y)]_P$ de $\tilde{G}$, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} p(\ell([(x,y)]_P)) & = & p(q(y)) \\ & = & p(q(y + i(h))) \\ & \leq & q_1(y + i(h)) \\ & \leq & q_1(y + i(h)) + q_0(x + \varphi(h)), \quad \forall h \in H \end{array}$$

si q_0 est une semi-norme continue sur F. Par conséquent,

$$p(\ell([x,y]_P)) \leq \inf_{h \in H} (q_0(x + \varphi(h)) + q_1(y + i(h))).$$

4) Vu ces trois propriétés, ℓ *est relativement ouvert.*

5) $\mathrm{im}(j) = \ker(\ell)$. L'inclusion $\subset$ est claire car si $x \in F$, on a

$$\ell(j(x)) = \ell([(x,0)]_P) = q(0) = 0$$

car q est linéaire.

Inversement, si $[(x,y)]_P$ appartient à $\ker(\ell)$, établissons qu'il existe f appartenant à F tel que $j(f) = [(x,y)]_P$. Puisque $[(x,y)]_P \in \ker(\ell)$, $q(y) = 0$ et il existe donc $h \in H$ tel que $y = i(h)$, car $\ker(q) = \mathrm{im}(i)$. Dès lors, l'élément $f = x - \varphi(h)$ appartenant à F convient. En effet, comme $j(f) = [(f,0)]_P$, pour démontrer que $j(f) = [(x,y)]_P$, il suffit de prouver que $(x,y) - (f,0)$ appartient à P. Or,

$$\begin{array}{rcl} (x,y) - (f,0) & = & (x, i(h)) - (x - \varphi(h), 0) \\ & = & (\varphi(h), i(h)), \end{array}$$

d'où la conclusion.

Vu ce qui précède, la suite

$$0 \to F \xrightarrow{j} \tilde{G} \xrightarrow{\ell} E \to 0$$

est topologiquement exacte. Par hypothèse, elle “splits” et il existe donc une application S appartenant à $L(\tilde{G}, F)$ telle que

$$S \circ j = \mathrm{id}_F. \tag{I.6.12}$$

Nous avons donc obtenu le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{q} & E & \rightarrow & 0 \\
 & & \varphi\downarrow & & \downarrow\tilde{\jmath} & & & & \\
0 & \rightarrow & F & \underset{S}{\overset{j}{\rightleftarrows}} & \tilde{G} & \xrightarrow{\ell} & E & \rightarrow & 0
\end{array}$$

Pour conclure cette implication, démontrons que $\psi := S \circ \tilde{\jmath} \in L(G, F)$ convient, c'est-à-dire que $\psi \circ i = \varphi$. Si $h \in H$, on a

$$\psi \circ i(h) = S(\tilde{\jmath}(i(h))) = S([(0, -i(h))]_P).$$

Comme $\varphi(h)$ appartient à F, $S \circ j(\varphi(h)) = \varphi(h)$, vu (I.6.12) et $S \circ j(\varphi(h)) = S([\varphi(h), 0)]_P)$ par définition de j. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\psi \circ i(h) = \varphi(h) \quad & \text{si} \quad [(0, -i(h))]_P = [(\varphi(h), 0)]_P, \\
& \text{si} \quad (\varphi(h), 0) - (0, -i(h)) \in P, \\
& \text{si} \quad (\varphi(h), i(h)) \in P,
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

A ce stade, nous avons établi l'équivalence entre les trois assertions.

A présent, nous allons démontrer que l'assertion (i) implique que $\mathrm{Ext}(E, F) = 0$. De fait, vu le lemme I.29, si $\mathcal{F} = (\hat{F}_k, \rho_{k+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est le spectre canonique associé à F, la suite suivante est topologiquement exacte :

$$0 \to F \to \prod_k \hat{F}_k \xrightarrow{q} \prod_k \hat{F}_k \to 0$$

avec $q((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(E, \hat{F}_k)$ et A appartenant à $L(E, \prod_k \hat{F}_k)$ tels que $Ax = (A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$.

Par hypothèse (assertion (i) appliquée à la suite précédente), il existe un élément B de $L(E, \prod_k \hat{F}_k)$ tel que

$$q \circ B = A. \tag{I.6.13}$$

Si $s_j : \prod_k \hat{F}_k \to \hat{F}_j$ désigne la j-ème projection canonique, nous posons

$$B_k := s_k \circ B \in L(E, \hat{F}_k).$$

Par conséquent,

$$s_k \circ A = A_k = \rho_{k+1}B_{k+1} - B_k \ , \quad \text{pourtout entier } k.$$

En effet, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} Ax &= (A_k x)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= (\rho_{k+1,k} s_{k+1} B(x) - s_k B(x))_{k\in\mathbb{N}}\,, \quad \text{vu (I.6.13)} \\ &= (\rho_{k+1,k} B_{k+1}(x) - B_k(x))_{k\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E,\mathcal{F})$, donc $\prod_k L(E,\hat{F}_k)$ est inclus dans $\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$. L'autre inclusion étant évidente, la conclusion s'ensuit aussitôt.

A ce stade, il nous reste à démontrer que si E est nucléaire et si $\mathrm{Ext}(E,F) = 0$, alors l'assertion (i) est vérifiée. Considérons une suite topologiquement exacte

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \to 0$$

et une application φ appartenant à $L(E,H)$. Si on se donne un système de semi-normes de G, en reprenant les notations du lemme I.37, les lignes du diagramme suivant sont topologiquement exactes.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{q} & H & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \rho_k^F & \hookrightarrow & \downarrow \rho_k^G & \hookrightarrow & \downarrow \rho_k^H & & \\ 0 & \rightarrow & \hat{F}_k & \xrightarrow{i_k} & \hat{G}_k & \xrightarrow{q_k} & \hat{H}_k & \rightarrow & 0 \end{array}$$

(Les applications i_k et q_k ($k \in \mathbb{N}$) sont définies comme dans ce lemme).

Posons $\varphi_k := \rho_k^H \circ \varphi$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette application appartient à $L(E,\hat{H}_k)$, pour tout k.

Puisque E est nucléaire et q_k est surjectif, il existe une application $\psi_k \in L(E,\hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ \psi_k = \varphi_k$. Par conséquent, nous avons le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\psi_{k+1}"] \arrow[drr, "\varphi_{k+1}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}_E"'] & & \\
& \hat{G}_{k+1} \arrow[r, "q_{k+1}"] \arrow[d, "\rho^G_{k+1,k}"'] \arrow[dr, phantom, "\hookrightarrow"] & \hat{H}_{k+1} \arrow[d, "\rho^H_{k+1,k}"] \\
& \hat{G}_k \arrow[r, "q_k"', "\hookrightarrow"] & \hat{H}_k \\
E \arrow[ur, "\psi_k"] \arrow[urr, "\varphi_k"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Dans ces conditions, il vient successivement :

$$
\begin{aligned}
q_k \circ (\rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k) &= q_k \circ \rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - q_k \circ \psi_k \\
&= \rho^H_{k+1,k} \circ q_{k+1} \circ \psi_{k+1} - q_k \circ \psi_k \\
&= \rho^H_{k+1,k} \circ \varphi_{k+1} - \varphi_k \\
&= \rho^H_{k+1,k} \circ \rho^H_{k+1} \circ \varphi - \varphi_k \\
&= \rho^H_k \varphi - \varphi_k \\
&= \varphi_k - \varphi_k \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\mathrm{im}(\rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k) \subset \ker(q_k) = i_k(\hat{F}_k).$$

Puisque l'application $i^B_k : \hat{F}_k \to i_k(\hat{F}_k)$ est une bijection linéaire continue, nous notons j_k son inverse. On a donc

$$j_k \circ (\rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k) \in L(E, \hat{F}_k).$$

Comme $\mathrm{Ext}(E, F) = 0$, les espaces $L(E, \hat{F}_k)$ et $\mathcal{B}(E, \mathcal{F})$ coïncident et il existe une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\prod_k L(E, \hat{F}_k)$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$j_k \circ (\rho^G_{k+1,k} \psi_{k+1} - \psi_k) = \rho^F_{k+1,k} b_{k+1} - b_k.$$

Il s'ensuit que

$$i_k \circ j_k \circ (\rho^G_{k+1,k} \psi_{k+1} - \psi_k) = i_k \circ \rho^F_{k+1,k} \circ b_{k+1} - i_k \circ b_k$$

donc

$$\rho^G_{k+1,k} \psi_{k+1} - \psi_k = \rho^G_{k+1,k} \circ i_{k+1} \circ b_{k+1} - i_k \circ b_k,$$

vu le lemme I.37.

Donc, il en résulte que

$$\rho^G_{k+1,k}(\psi_{k+1} - i_{k+1} \circ b_{k+1}) = \psi_k - i_k \circ b_k$$

et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi_{k+1} - i_{k+1} \circ b_{k+1}"'] & E \arrow[d, "\psi_k - i_k \circ b_k"] \\
\hat{G}_{k+1} \arrow[r, "\rho^G_{k+1,k}"'] & \hat{G}_k
\end{tikzcd}$$

Comme $G = \operatorname{proj}_{\leftarrow m} \hat{G}_m$,si nous posons $A_k := \psi_k - i_k \circ b_k$, alors il existe une et une seule application ψ appartenant à $L(E, G)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi"'] & E \arrow[d, "A_k"] \\
G \arrow[r, "\rho^G_k"'] & \hat{G}_k
\end{tikzcd}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\rho^G_k \circ \psi = A_k$.

Pour démontrer que $q \circ \psi = \varphi$, il suffit d'établir que $\rho^H_k \circ (q \circ \psi) = \rho^H_k \circ \varphi$, pour tout entier k. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\rho^H_k \circ (q \circ \psi) &= q_k \circ \rho^G_k \circ \psi \\
&= q_k(\psi_k - i_k \circ b_k) \\
&= q_k \circ \psi_k - q_k \circ i_k \circ b_k \\
&= q_k \circ \psi_k \\
&= \varphi_k \\
&= \rho^H_k \circ \varphi,
\end{aligned}$$

ce qui suffit.

■

Chapitre II

Introduction de Ext via l'algèbre homologique

Dans le premier chapitre, nous avons introduit Ext via l'analyse fonctionnelle. En fait, Ext provient de l'algèbre homologique et ici, nous nous limitons à montrer la raison pour laquelle Ext a été introduit dans ce domaine.

Supposons que $\mathcal{F}$ désigne la catégorie des espaces de Fréchet dont les morphismes sont les opérateurs linéaires continus et $\mathcal{L}$ la catégorie des espaces linéaires dont les morphismes sont les opérateurs linéaires. Si E est un espace de Fréchet, considérons l'opérateur

$$L(E,\cdot) : \mathcal{F} \to \mathcal{L} \qquad F \mapsto L(E,F)$$

pour lequel la transformation des morphismes est la suivante : si T appartient à $L(F,G)$ (T est un morphisme de $\mathcal{F}$), il s'agit de trouver un opérateur linéaire, c'est-à-dire un morphisme de $\mathcal{L}$ entre les espaces linéaires $L(E,F)$ et $L(E,G)$ et la loi qui à l'opérateur $S \in L(E,F)$ associe l'opérateur $T \circ S \in L(E,G)$ convient.

Soient E, F, G des espaces de Fréchet et

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \to 0$$

une suite topologiquement exacte. Si E est un espace de Fréchet, appliquons l'opérateur $L(E,\cdot)$ à cette suite. On obtient

$$0 \to L(E,F) \xrightarrow{i_c} L(E,G) \xrightarrow{q_c} L(E,H) \qquad (*)$$

avec

$$i_c : L(E,F) \to L(E,G) \qquad S \mapsto i \circ S$$

et

$$q_c : L(E,G) \to L(E,H) \qquad R \mapsto q \circ R.$$

a) i_c est injectif. En effet, si S appartient à $L(E,F)$ et $i_c(S) = i \circ S = 0$, alors $S = 0$ car i est injectif.

b) $\mathrm{im}(i_c) = \ker(q_c)$. D'une part, si T appartient à $\mathrm{im}(i_c)$, il existe un opérateur S appartenant à $L(E,F)$ tel que $i_c(S) = T$. Par conséquent, $q_c(T) = q \circ i \circ S = 0$ car $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$. D'autre part, supposons que $R \in \ker(q_c)$. L'application

$$i_1 : F \to \mathrm{im}(i) \qquad f \mapsto i(f)$$

est une bijection linéaire continue. Puisque $q_c(R) = q \circ R = 0$, R appartient à $L(E, \ker(q))$ et $i_1^{-1} \circ R$ appartient à $L(E, F)$. Dans ces conditions, on a

$$i_c(i_1^{-1} \circ R) = i \circ i_1^{-1} \circ R = R$$

et R appartient à $\mathrm{im}(i_c)$.

c) Par contre, l'application q_c n'est pas toujours surjective et la suite (*) n'est pas exacte.

Cette "non surjectivité" entraîne l'introduction de Ext. En effet, on peut démontrer l'existence de "$\mathrm{Ext}^n(E, \cdot)$" telle que la suite

$$0 \to L(E,F) \to L(E,G) \to L(E,H) \to \mathrm{Ext}^1(E,F) \to \mathrm{Ext}^1(E,G) \to \mathrm{Ext}^1(E,H) \to \mathrm{Ext}^2(E,F) \to \ldots$$

soit exacte.

Revenons aux notions d'analyse fonctionnelle.

Définition II.1 L'*espace E de Fréchet* est *injectif* si pour tout espace F de Fréchet, pour tout sous-espace fermé F_0 de F et pour tout opérateur T linéaire continu de F_0 dans E, il existe un opérateur linéaire continu de F dans E qui prolonge T.

L'existence de $\mathrm{Ext}^n(E, \cdot)$ est obtenue grâce au fait qu'il y a assez d'espaces de Fréchet injectifs.

Exemple. L'ensemble des suites bornées $\ell^\infty(I)$ (où I désigne l'ensemble des indices) est un espace de Fréchet injectif.

Preuve. Rappelons que ℓ^∞ est un espace de Banach. Soient F un espace de Fréchet, F_0 un sous-espace fermé de F et T est un opérateur linéaire continu de F_0 dans ℓ^∞. Etablissons qu'il existe un opérateur linéaire continu de F dans ℓ^∞ qui prolonge T. Pour tout $i \in I$, si p_i désigne la projection sur la i-ème composante, l'opérateur $p_i \circ T$ appartient à $L(F_0, \mathbb{C}) = F_0'$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une application e_i' appartenant à F' telle que $e_i'|_{F_0} = p_i \circ T$. De plus, pour tout $f_0 \in F_0$, on a

$$\sup_{i \in I} |p_i \circ T(f_0)| = \|T(f_0)\|_{\ell^\infty} .$$

Puisque T est continu, il existe une constante C strictement positive et une semi-norme q continue sur F telles que

$$\|T(f_0)\|_{\ell^\infty} = \sup_{i \in I} |p_i \circ T(f_0)| \leq C(q(f_0)) , \quad \forall f_0 \in F_0.$$

Par conséquent, pour tout $i \in I$, pour tout $f_0 \in F_0$, on a

$$|p_i \circ T(f_0)| = |\langle f_0, p_i \circ T \rangle| \leq Cq(f_0).$$

Par le théorème de Hahn-Banach, on a donc $|\langle f, e'_i \rangle| \leq Cq(f)$, pour tout $i \in I$ et pour tout $f \in F$. Il s'ensuit que l'application

$$T_1 : F \to \ell^\infty \qquad f \mapsto (\langle f, e'_i \rangle)_{i \in I}$$

convient car vu ce qui précède, T_1 est continu et $(\langle f, e'_i \rangle)_{i\in I}$ définit une suite bornée.

■

A présent établissons quelques remarques prouvant l'importance de ces espaces injectifs.

Proposition II.2 *Soient E et G deux espaces de Fréchet et F un espace injectif. Si la suite*

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$$

est topologiquement exacte, alors elle "splits" et $\mathrm{Ext}(E, F) = 0$.

Preuve. Puisque l'application

$$\tilde{\imath} : F \to \mathrm{im}(i) \qquad x \mapsto i(x)$$

est un isomorphisme, l'application $\tilde{\imath}^{-1} : \mathrm{im}(i) \to F$ est linéaire et continue et comme l'espace F est injectif, il existe une application linéaire continue I de G dans F qui prolonge $\tilde{\imath}^{-1}$. On vérifie immédiatement que $P := i \circ I$ est un projecteur linéaire continu de G dont l'image est $im(i)$. Par le théorème I.38, on en déduit que $\mathrm{Ext}(E, F) = 0$.

■

A présent, établissons via l'approche fonctionnelle de Ext, un théorème important en algèbre homologique et qui nous sera indispensable pour démontrer qu'un opérateur elliptique ne possède pas d'inverse à droite (cf. Chapitre 3).

Théorème II.3 *Soient E, F, G, H des espaces de Fréchet. Si H est nucléaire et si la suite*

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$$

est topologiquement exacte, alors la suite

$$0 \to L(H, F) \xrightarrow{i^*} L(H, G) \xrightarrow{q^*} L(H, E) \xrightarrow{j_0} \mathrm{Ext}(H, F) \xrightarrow{i'} \mathrm{Ext}(H, G) \xrightarrow{q'} \mathrm{Ext}(H, E) \to 0$$

avec

$$\begin{array}{ll} i^* : L(H, F) \to L(H, G) & S \mapsto i \circ S \\ q^* : L(H, G) \to L(H, E) & R \mapsto q \circ R \end{array}$$

est exacte. Les applications j_0, i' et q' sont à déterminer.

Preuve. Vu le lemme I.37, les lignes du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \overset{i}{\to} & G & \overset{q}{\to} & E & \to & 0 \\
 & & \downarrow \rho^F_{k+1} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^G_{k+1} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^E_{k+1} & & \\
0 & \to & \hat{F}_{k+1} & \overset{i_{k+1}}{\to} & \hat{G}_{k+1} & \overset{q_{k+1}}{\to} & \hat{E}_{k+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \rho^F_{k+1,k} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^G_{k+1,k} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^E_{k+1,k} & & \\
0 & \to & \hat{F}_k & \overset{i_k}{\to} & \hat{G}_k & \overset{q_k}{\to} & \hat{E}_k & \to & 0
\end{array}$$

sont topologiquement exactes. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \to & G & \to & E & \to & 0 \\
 & & i_F \downarrow & & i_G \downarrow & & i_E \downarrow & & \\
0 & \to & \prod\limits_k \hat{F}_k & \to & \prod\limits_k \hat{G}_k & \to & \prod\limits_k \hat{E}_k & \to & 0 \\
 & & q_F \downarrow & & q_G \downarrow & & q_E \downarrow & & \\
0 & \to & \prod\limits_k \hat{F}_k & \to & \prod\limits_k \hat{G}_k & \to & \prod\limits_k \hat{E}_k & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

avec

$$i_F : F \to \prod_k \hat{F}_k \qquad x \mapsto (\rho^F_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$$

et

$$q_F : \prod_k \hat{F}_k \to \prod_k \hat{F}_k \qquad x \mapsto (\rho^F_{k+1,k} x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Les applications i_G, i_E, q_G, q_E sont définies de manière analogue.

Etablissons que les espaces $\prod_k L(H, \hat{F}_k)$ et $L(H, \prod_k \hat{F}_k)$ sont en bijection linéaire. Considérons l'application

$$T : \prod_k L(H, \hat{F}_k) \to L\left(H, \prod_k \hat{F}_k\right) \qquad (T_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (h \in H \mapsto (T_k h)_{k\in\mathbb{N}}).$$

On voit tout de suite que cette application est bien définie et linéaire. De plus, elle est injective. En effet, si $T((T_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 0$ avec $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(H, \hat{F}_k)$, alors $(T_k h)_{k\in\mathbb{N}} = 0$ pour tout $h \in H$ et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} = 0$.

Enfin, l'application T est surjective. De fait, soit S appartenant à $L(H, \prod_k \hat{F}_k)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit p_k la projection canonique de $\prod_k \hat{F}_k$ sur $\hat{F}_k$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $p_k \circ S \in L(H, \hat{F}_k)$ et $(p_k \circ S)(h) = (Sh)_k$ pour tout $h \in H$, ce qui suffit.

De la même manière, les espaces $\prod_k L(H, \hat{E}_k), L(H, \prod_k \hat{E}_k)$ d'une part et les espaces $\prod_k L(H, \hat{G}_k), L(H, \prod_k \hat{G}_k)$ d'autre part, sont en bijection linéaire.

Dans ces conditions, nous pouvons considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & L(H,F) & \xrightarrow{i^*} & L(H,G) & \xrightarrow{q^*} & L(H,E) & & \\
 & & \downarrow \rho_F & & \downarrow \rho_G & & \downarrow \rho_E & & \\
 & & \prod_k L(H,\hat{F}_k) & \xrightarrow{\prod_k i_k^*} & \prod_k L(H,\hat{G}_k) & \xrightarrow{\prod_k q_k^*} & \prod_k L(H,\hat{E}_k) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \tau_F & & \downarrow \tau_G & & \downarrow \tau_E & & \\
 & & \prod_k L(H,\hat{F}_k) & \xrightarrow{\prod_k i_k^*} & \prod_k L(H,\hat{G}_k) & \xrightarrow{\prod_k q_k^*} & \prod_k L(H,\hat{E}_k) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \sigma_F & & \downarrow \sigma_G & & \downarrow \sigma_E & & \\
 & & \mathrm{Ext}(H,F) & \xrightarrow{i'} & \mathrm{Ext}(H,G) & \xrightarrow{q'} & \mathrm{Ext}(H,E) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

avec

$$\begin{aligned}
i_k^* : L(H,\hat{F}_k) \rightarrow L(H,\hat{G}_k) \qquad & f \mapsto i_k \circ f \\
q_k^* : L(H,\hat{G}_k) \rightarrow L(H,\hat{E}_k) \qquad & f \mapsto q_k \circ f \\
\rho_F : L(H,F) \rightarrow \prod_k L(H,\hat{F}_k) \qquad & f \mapsto (\rho_k^F \circ f)_{k\in\mathbb{N}} \\
\tau_F : \prod_k L(H,\hat{F}_k) \rightarrow \prod_k L(H,\hat{F}_k) \qquad & (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\rho_{k+1,k}^F f_{k+1} - f_k)_{k\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

et

$$\sigma_F : \prod_k L(H,\hat{F}_k) \rightarrow \mathrm{Ext}(H,F) \qquad (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto f_k + \mathcal{B}(H,\mathcal{F})$$

où $\mathcal{F}$ désigne le spectre canonique associé à F comme dans la première partie du premier Chapitre. Les applications $\tau_E, \tau_G, \rho_E, \rho_G, \sigma_E, \sigma_G$ sont définies de manière analogue.

Comme nous venons de le vérifier ci-dessus,

a) i^* est injectif et

b) $\mathrm{im}(i^*) = \ker(q^*)$.

A présent, définissons l'application j_0. Considérons une application φ appartenant à $L(H, E)$. Posons $\varphi_k := \rho_k^E \circ \varphi$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette application appartient à $L(H, \hat{E}_k)$ et puisque H est nucléaire et que q_k est surjectif, il existe une application $\psi_k \in L(H, \hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ \psi_k = \varphi_k$. Schématiquement, on a :

$$\begin{tikzcd}
 & & & H \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, "\psi_k"'] \arrow[dd, "\varphi_k"'] & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] & G \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "\rho_k^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{F}_k \arrow[r] & \hat{G}_k \arrow[r, "q_k"] & \hat{E}_k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\rho_{k+1,k}^G \psi_{k+1} - \psi_k$ appartient à $L(H, \hat{G}_k)$ et

$$\begin{aligned}
q_k^*(\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k) &= q_k \circ \rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - q_k \circ \psi_k \\
&= \rho_{k+1,k}^E \circ q_{k+1} \circ \psi_{k+1} - q_k \circ \psi_k \\
&= \rho_{k+1,k}^E \circ \varphi_{k+1} - \varphi_k \\
&= \rho_{k+1,k}^E \circ \rho_{k+1}^E \circ \varphi - \rho_k^E \circ \varphi \\
&= \rho_k^E \circ \varphi - \rho_k^E \circ \varphi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\ker(q_k^*) = \mathrm{im}(i_k^*)$, l'application $\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k$ appartient à $\mathrm{im}(i_k^*)$. Puisque l'application i_k est injective, l'application

$$\tilde{\imath}_k : \hat{F}_k \to \mathrm{im}(i_k) \qquad f \mapsto i_k(f)$$

est une bijection linéaire continue. Si j_k est son inverse, alors l'application

$$j_k^* : L(H, \mathrm{im}(i_k)) \to L(H, \hat{F}_k) \qquad S \mapsto j_k \circ S$$

est l'inverse de l'application $\tilde{\imath}_k^* : L(H, \hat{F}_k) \to L(H, \mathrm{im}(i_k))$.

En effet, d'une part, si T appartient à $L(H, \hat{F}_k)$,

$$(j_k^* \circ i_k^*)(T) = j_k \circ i_k \circ T = T$$

et d'autre part, si S appartient à $L(H, \mathrm{im}(i_k))$,

$$(i_k^* \circ j_k^*)(S) = i_k \circ j_k \circ S = S.$$

Or, l'application $\rho_{k+1,k}^G \psi_{k+1} - \psi_k$ appartient à $\mathrm{im}(i_k^*)$.

Par conséquent, $j_k^*(\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k)$ appartient à $L(H, \hat{F}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$(j_k^*(\rho_{k+1,k}^G \psi_{k+1} - \psi_k))_{k \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F})$$

appartient donc à $\mathrm{Ext}(H,\mathcal{F})$. Dans ces conditions, nous définissons l'application j_0 par

$$j_0 : L(H,E) \to \mathrm{Ext}(H,F) \qquad \varphi \mapsto (j_k^*(\rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k))_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}).$$

Cette application est bien définie. En effet, supposons que $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\prod_k L(H,\hat{G}_k)$ et vérifient $q_k \circ \psi_k = \varphi = q_k \circ \psi'_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $q_k \circ (\psi_k - \psi'_k) = q_k^*(\psi_k - \psi'_k) = 0$ et $\psi_k - \psi'_k$ appartient à $\ker(q_k^*) = \mathrm{im}(i_k^*)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'application $j_k^*(\psi_k - \psi'_k)$ appartient donc à $L(H,\hat{F}_k)$ et par définition de $\mathcal{B}(H,\mathcal{F})$, on a

$$(\rho^F_{k+1,k} \circ j^*_{k+1}(\psi_{k+1} - \psi'_{k+1}) - j_k^*(\psi_k - \psi'_k))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(H,\mathcal{F}),$$

et

$$(\rho^F_{k+1,k}\circ j_{k+1}\circ\psi_{k+1} - j_k\circ\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}) = (\rho^F_{k+1,k}\circ j_{k+1}\circ\psi'_{k+1} - j_k\circ\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}). \; (**)$$

Puisque les applications $i_k \circ \rho^F_{k+1,k}$ et $\rho^G_{k+1,k} \circ i_{k+1}$ coïncident, on a

$$j_k \circ i_k \circ \rho^F_{k+1,k} \circ j_{k+1} = j_k \circ \rho^G_{k+1,k} \circ i_{k+1} \circ j_{k+1},$$

c'est-à-dire $\rho^F_{k+1,k} \circ j_{k+1} = j_k \circ \rho^G_{k+1,k}$. La relation (**) devient alors

$$(j_k \circ \rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - j_k \circ \psi_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}) = (j_k \circ \rho^G_{k+1,k} \circ \psi'_{k+1} - j_k \circ \psi'_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}).$$

On en déduit que

$$(j_k^*(\rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k))_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}) = (j_k^*(\rho^G_{k+1,k} \circ \psi'_{k+1} - \psi'_k))_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F})$$

et j_0 est bien défini.

c) $\ker j_0 = \mathrm{im}\, q^*$. Etablissons d'abord l'inclusion $\supset$.

Si ψ appartient à $L(H,G)$, démontrons que $j_0(q^*(\psi)) = 0$.

Si nous posons $\varphi := q \circ \psi \in L(H,E)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k := \rho^E_k \circ \varphi$, alors $\varphi_k = \rho^E_k \circ q \circ \psi = q_k \circ \rho^G_k \circ \psi$ appartient à $L(H,\hat{E}_k)$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application ψ'_k appartenant à $L(H,\hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ \psi'_k = \varphi_k$, car H est nucléaire et q_k est surjectif. Comme $\varphi_k = q_k \circ \rho^G_k \circ \psi$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi'_k = \rho^G_k \circ \psi$ convient et on a

$$\rho^G_{k+1,k}(\psi'_{k+1}) - \psi'_k = \rho^G_{k+1,k} \circ \rho^G_{k+1} \circ \psi - \rho^G_k \circ \psi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il s'ensuit que $j_k^*(\rho^G_{k+1,k}\psi'_{k+1} - \psi'_k) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par définition de j_0, on a $j_0(q \circ \psi) = 0 + \mathcal{B}(H,\mathcal{F})$, ce qui suffit.

Etablissons ensuite l'inclusion $\subset$. Considérons une application φ appartenant à $\ker(j_0)$ et posons $\varphi_k := \rho^E_k \circ \varphi$.

On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application ψ_k appartenant à $L(H,\hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ \psi_k = \varphi_k$ et telle que

$$(j_k^*(\rho^G_{k+1,k}\psi_{k+1} - \psi_k))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(H,\mathcal{F}),$$

car φ appartient à $\ker(j_0)$. Par définition de $\mathcal{B}(H,\mathcal{F})$, il existe une suite $(\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(H,\hat{F}_k)$ telle que

$$j_k^*(\rho^G_{k+1,k}\circ\psi_{k+1}-\psi_k)=\rho^F_{k+1,k}\circ\psi'_{k+1}-\psi'_k\ ,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

On a successivement, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} i_k\circ j_k\circ(\rho^G_{k+1,k}\circ\psi_{k+1}-\psi_k) & = & i_k\circ\rho^F_{k+1,k}\circ\psi'_{k+1}-i_k\circ\psi'_k \\ & = & \rho^G_{k+1,k}\circ i_{k+1}\circ\psi'_{k+1}-i_k\circ\psi'_k \end{array}$$

et donc

$$\rho^G_{k+1,k}(\psi_{k+1}-i_{k+1}\circ\psi'_{k+1})=\psi_k-i_k\circ\psi'_k.$$

Par conséquent, il existe une application τ appartenant à $L(H,G)$ telle que $\rho^G_k\circ\tau=\psi_k-i_k\circ\psi'_k$. On a alors $q\circ\tau=\varphi$ car pour tout $k\in\mathbb{N}$, il vient

$$\begin{array}{rcl} \rho^E_k\circ\varphi & = & \varphi_k \\ & = & q_k\circ\psi_k \\ & = & q_k\circ\psi_k-q_k\circ i_k\circ\psi'_k \\ & = & q_k\circ\rho^G_k\circ\tau \\ & = & \rho^E_k\circ q\circ\tau, \end{array}$$

ce qui suffit.

Définissons les applications i' et q'. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ désignent les spectres associés à E et G respectivement (ils sont définis de la même manière que dans la première partie du premier Chapitre), posons

$$\begin{array}{rcl} i' & : & \mathrm{Ext}(H,F)\to\mathrm{Ext}(H,G):(f_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(H,\mathcal{F})\mapsto(i_k\circ f_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(H,\mathcal{G}) \\ q' & : & \mathrm{Ext}(H,G)\to\mathrm{Ext}(H,E):(g_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(H,\mathcal{G})\mapsto(q_k\circ g_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(H,\mathcal{E}). \end{array}$$

L'application q' est bien définie. En effet, si les suites $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(g'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\prod_k L(H,\hat{G}_k)$ et sont telles que $(g_k-g'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(H,\mathcal{G})$, alors il existe une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(H,\hat{G}_k)$ telle que $g_k-g'_k=\rho^G_{k+1,k}\circ h_{k+1}-h_k$, pour tout $k\in\mathbb{N}$. On en déduit alors que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} q_k\circ g_k-q_k\circ g'_k & = & q_k\circ\rho^G_{k+1,k}\circ h_{k+1}-q_k\circ h_k \\ & = & \rho^E_{k+1,k}\circ(q_{k+1}\circ h_{k+1})-q_k\circ h_k, \end{array}$$

ce qui entraîne que $(q_k\circ g_k-q_k\circ g'_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}(H,\mathcal{E})$.

De la même manière, on peut démontrer que l'application i' est bien définie.

d) q' est surjectif.

En effet, si $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\prod_k L(H,\hat{E}_k)$, alors $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(H,\mathcal{E})$ appartient à $\mathrm{Ext}(H,E)$.

Comme H est nucléaire et q_k surjectif, et comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_k \in L(H, \hat{E}_k)$, il existe une application g_k appartenant à $L(H, \hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ g_k = h_k$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} q'((g_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G})) &= (q_k \circ g_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{E}) \\ &= (h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{E}). \end{aligned}$$

e) $\operatorname{im}(i') = \ker(q')$. Démontrons d'abord l'inclusion $\subset$.

Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\prod_k L(H, \hat{F}_k)$, on a

$$i'((f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F})) = (i_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G})$$

et donc

$$\begin{aligned} q'(i'((f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F}))) &= (q_k \circ i_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{E}) \\ &= \mathcal{B}(H,\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Démontrons à présent l'autre inclusion.

Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\prod_k L(H, \hat{G}_k)$. Supposons que

$$\begin{aligned} q'((g_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G})) &= (q_k \circ g_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{E}) \\ &= \mathcal{B}(H,\mathcal{E}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(q_k \circ g_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(H,\mathcal{E})$. Par définition de $\mathcal{B}(H,\mathcal{E})$, il existe une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(H, \hat{E}_k)$ telle que $q_k \circ g_k = \rho^E_{k+1,k} \circ h_{k+1} - h_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque H est nucléaire et q_k surjectif, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application ψ_k appartenant à $L(H, \hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ \psi_k = h_k$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} q_k \circ g_k &= \rho^E_{k+1,k} \circ h_{k+1} - h_k \\ &= \rho^E_{k+1,k} \circ q_{k+1} \circ \psi_{k+1} - q_k \circ \psi_k \\ &= q_k \circ \rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - q_k \circ \psi_k \\ &= q_k \circ (\rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k)\ , \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

L'application

$$f_k := g_k - \rho^G_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} + \psi_k$$

appartient donc à $\ker(q_k) = \operatorname{im}(i_k)$. On en déduit que la suite $(j_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k L(H, \hat{F}_k)$ et

$$\begin{aligned} i'((j_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{F})) &= (i_k \circ j_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G}) \\ &= (f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G}) \\ &= (g_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G}), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $(g_k - f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^G_{k+1,k}\psi_{k+1} - \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ coïncident et appartiennent à $\mathcal{B}(H,\mathcal{G})$. Par conséquent, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H,\mathcal{G})$ appartient à $\operatorname{im}(i')$, ce qui suffit.

f) $\mathrm{im}(j_0) = \ker(i')$. Considérons une application φ appartenant à $L(H, E)$ et posons $\varphi_k := \rho_k^E \circ \varphi$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme l'espace H est nucléaire, et q_k surjectif, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application ψ_k appartenant à $L(H, \hat{G}_k)$ telle que $q_k \circ \psi_k = \varphi_k$ et donc,

$$j_0(\varphi) = (j_k^*(\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k))_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F}).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} i'(j_0(\varphi)) &= \left(i_k \circ j_k \circ \left(\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{G}) \\ &= (\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{G}) \\ &= 0 + \mathcal{B}(H, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

car la suite $(\rho_{k+1,k}^G \circ \psi_{k+1} - \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(H, \mathcal{G})$.

Démontrons à présent l'inclusion $\supset$. Considérons une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(H, \hat{F}_k)$ telle que

$$\begin{aligned} i'((f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F})) &= (i_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{G}) \\ &= 0 + \mathcal{B}(H, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Puisque la suite $(i_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(H, \mathcal{G})$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(H, \hat{G}_k)$ telle que

$$i_k \circ f_k = \rho_{k+1,k}^G \varphi_{k+1} - \varphi_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si nous posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_k := q_k \circ \varphi_k \in L(H, \hat{E}_k)$, on a successivement :

$$\begin{aligned} \rho_{k+1,k}^E \chi_{k+1} - \chi_k &= \rho_{k+1,k}^E \circ q_{k+1} \circ \varphi_{k+1} - q_k \circ \varphi_k \\ &= q_k \circ \rho_{k+1,k}^G \circ \varphi_{k+1} - q_k \circ \varphi_k \\ &= q_k \circ (\rho_{k+1,k}^G \circ \varphi_{k+1} - \varphi_k) \\ &= q_k \circ i_k \circ f_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\rho_{k+1,k}^E \chi_{k+1} - \chi_k = 0$. Si on définit une application χ appartenant à $L(H, E)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k^E \chi = \chi_k$, alors

$$\begin{aligned} j_0(\chi) &= (j_k^*(\rho_{k+1,k}^G \circ \varphi_{k+1} - \varphi_k))_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F}) \\ &= (j_k^*(i_k \circ f_k))_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F}) \\ &= (j_k \circ i_k \circ f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F}) \\ &= (f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, \mathcal{F})$ appartient à $\mathrm{im}(j_0)$.

Vu les points a), b), c), d), e), f), la conclusion s'ensuit aussitôt.

■

Chapitre III

Quelques Applications

III.1 L'opérateur elliptique

Lemme III.1 *Si ω désigne l'ensemble des suites numériques et si H est un espace de Fréchet tel que* $\mathrm{Ext}(\omega, H) = 0$*, alors $H/\ker(p)$ est un espace de Banach pour toute semi-norme continue p sur H.*

Preuve. Comme ω est un espace nucléaire, par la proposition I.27, pour tout sous-espace fermé L de H, $\mathrm{Ext}(\omega, H/L) = 0$. Puisque p est une semi-norme continue, $\ker(p)$ est un sous-espace fermé de H et $H/\ker(p)$ est un espace de Fréchet. Il suffit donc de démontrer que si H est un espace de Fréchet muni d'une norme continue tel que $\mathrm{Ext}(\omega, H) = 0$, alors H est un espace de Banach.

Soit $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N}\}$ un système fondamental de normes continues sur H tel que $\|\cdot\|_k \leq \|\cdot\|_{k+1}$, pour tout k. Par conséquent, l'espace $H_k := (H, \|\cdot\|_k)$ est un espace normé.

Nous désignons par $\hat{H}_k$ son complété et par $\rho_{k\ell} : H_k \to H_\ell$ $(k \geq \ell)$, l'extension de l'application identité. Dans ces conditions, par le lemme I.29, la suite

$$0 \to H \to \prod_k \hat{H}_k \xrightarrow{q} \prod_k \hat{H}_k \to 0$$

avec $q((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est topologiquement exacte.

Par l'absurde, supposons que H n'est pas un espace de Banach.

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_{k1}\hat{H}_k \subset H$, on a $\rho_{k1}\hat{H}_k = H$, par définition de l'espace $\hat{H}_1$. Comme l'espace $\ker(\rho_{k1})$ est fermé dans $\hat{H}_k$, par le théorème du graphe fermé, l'application $\tilde{\rho}_{k1} : \hat{H}_k/\ker\rho_{k1} \to H$ définit un isomorphisme entre les espaces H et $\hat{H}_k/\ker\rho_{k1}$. Ce dernier étant de Banach, on obtient une contradiction. Dès lors, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un élément a_k de $\hat{H}_k$ tel que $\rho_{k1}a_k \notin H$.

A présent, considérons l'application

$$A : \omega \to \prod_k \hat{H}_k \quad (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\xi_k a_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Il s'agit bien sûr d'une application linéaire continue. Comme $\mathrm{Ext}(\omega, H) = 0$, il existe une application B appartenant à $L(\omega, \prod_k \hat{H}_k)$ telle que $q \circ B = A$.

Si nous posons pour tout $j \in \mathbb{N}$, $e_j := (\delta_{kj})_{k\in\mathbb{N}}$ et $B(e_j) := (b_{1j}, b_{2j}, \ldots)$, il vient successivement

$$\begin{array}{rcl} A(e_j) & = & (\delta_{jk} a_k)_{k\in\mathbb{N}} \\ & = & (q \circ B)(e_j) \\ & = & q(b_{1j}, b_{2j}, \ldots,) \\ & = & (\rho_{k+1,k} b_{k+1,j} - b_{kj})_{k\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Il s'ensuit que

i) $\rho_{k+1,k} b_{k+1,j} - b_{kj} = 0$ si $k \neq j$.

ii) $\rho_{j+1,j} b_{j+1,j} - b_{jj} = a_j$.

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $j_k \in \mathbb{N}$ tel que $b_{kj} = 0$ pour tout $j \geq j_k$. De fait, l'application B étant continue, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un sous-ensemble fini F_k de $\mathbb{N}$ tel que

$$\|(B\alpha)\|_{\hat{H}_k} \leq C_k \sum_{\ell \in F_k} |\alpha_\ell| \,, \quad \text{pour toute suite } \alpha = (\alpha_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \text{ de } \omega.$$

En particulier, on a

$$\|b_{kj}\|_{\hat{H}_k} \leq C_k \sum_{\ell \in F_k} |\delta_{j\ell}| \ \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Si nous posons $j_k := (\max F_k) + 1$ et si j est supérieur ou égal à j_k, on a $\|b_{kj}\|_{\hat{H}_k} = 0$, ce qui implique que $b_{kj} = 0$, pour tout $j \geq j_k$.

iv) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe b_j appartenant à H tel que $\rho_k b_j = b_{kj}$, pout tout $k > j$. En effet, vu i), pour tout $j \in \mathbb{N}$, et $k > j$, on a $\rho_{k+1,k} b_{k+1,j} = b_{kj}$. On en déduit que

$$b_j := (\rho_{2,1} b_{2,j}, \rho_{3,2} b_{3,j}, \ldots, \rho_{j+1,j} b_{j+1,j}, b_{j+1,j}, b_{j+2,j}, \ldots)$$

appartient à $\mathrm{proj}_{\leftarrow k} \hat{H}_k$ qui est isomorphe à H, ce qui suffit.

v) Par récurrence sur k, démontrons que si $k < j$, alors $\rho_{j,j-k} b_{jj} = b_{j-k,j}$. Bien sûr, la formule est correcte pour $k = 1$. Pour conclure, il suffit de prouver que si elle est vraie pour ℓ, elle l'est encore pour $\ell + 1$. Si nous supposons que $\ell + 1 < j$, il vient

$$\begin{array}{rcl} b_{j-(\ell+1),j} & = & \rho_{j-\ell,j-(\ell+1)} b_{j-\ell,j} \\ & = & \rho_{j-\ell,j-(\ell+1)} \rho_{j,j-\ell} b_{jj} \\ & = & \rho_{j,j-(\ell+1)} b_{jj}. \end{array}$$

En réécrivant la formule pour $k := j - 1$, on a

$$\rho_{j1} b_{jj} = b_{1j} \,, \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, pour $j \geq j_1$, on a

$$\begin{aligned}
\rho_{j1} a_j &= \rho_{j1} \rho_{j+1,j} b_{j+1,j} - \rho_{j1} b_{jj} \\
&= \rho_{j1} \rho_{j+1,j} b_{j+1,j} - b_{1j} \\
&= \rho_{j1} \rho_{j+1,j} \rho_{j+1} b_j \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Or, b_j appartient à H. D'où la contradiction, car $\rho_{j1} a_j$ n'appartient pas à H.

■

Proposition III.2 *Si E est un espace de Fréchet et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, F_k est un espace de Banach, alors*

$$\operatorname{Ext}(E, \prod_k F_k) = 0.$$

Preuve. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'espace $G_j := \prod_{1 \leq k \leq j} F_j$ est de Banach et si $\|\cdot\|_j$ désigne une norme sur F_j, alors l'application

$$p_j : \prod_k F_k \to \mathbb{R} : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{j} \|x_k\|_k$$

définit un système de semi-normes sur $\prod_k F_k$. On vérifie aisément que

$$\ker(p_j) = \prod_{k \leq j} \{0\} \times \prod_{k > j} F_k.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les espaces $\prod_k F_k / \ker(p_j)$ et G_j sont isomorphes. En effet, la projection canonique $s_j : \prod_k F_k \to G_j$ est linéaire continue et surjective et

$$\ker(s_j) = \prod_{k \leq j} \{0\} \times \prod_{k > j} F_k = \ker(p_j).$$

Par conséquent, l'application

$$\tilde{s}_j : \prod_k F_k / \ker p_j \to G_j \qquad [(x_k)_{k \in \mathbb{N}}]_{\ker(p_j)} \mapsto s_j((x_k)_{k \in \mathbb{N}})$$

est une bijection linéaire continue.

Si les applications $s_{k+1,k} : G_{k+1} \to G_k$ désignent les projections canoniques, on vérifie aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\prod_j F_j / \ker(p_{k+1}) \arrow[r, "\rho_{k+1,k}"] & \prod_j F_j / \ker(p_k) \\
G_{k+1} \arrow[u, "\tilde{s}_{k+1}^{-1}"] \arrow[r, "s_{k+1,k}"'] & G_k \arrow[u, "\tilde{s}_k^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Si nous posons

$$\mathcal{B}(E,\mathcal{F}) = \{(s_{k+1,k}B_{k+1} - B_k)_{k\in\mathbb{N}} : B_k \in L(E,G_k),\ \forall k\},$$

avec $\mathcal{F} = (G_k, s_{k+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, et

$$\mathcal{B}(E,\mathcal{F}') = \{(\rho_{k+1,k}B_{k+1} - B_k)_{k\in\mathbb{N}} : B_k \in L(E,\prod_j F_j/\ker(p_k))\ ,\forall k\}$$

avec $\mathcal{F}' = (\prod_j F_j/\ker(p_k), \rho_{k+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, alors les espaces

$$\prod_k L(E,G_k)/\mathcal{B}(E,\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \prod_k L(E,\prod_j F_j/\ker(p_k))/\mathcal{B}(E,\mathcal{F}') \quad (= \mathrm{Ext}(E,\prod_k F_k))$$

sont isomorphes. En effet, l'application

$$\begin{array}{rcl} I : \prod_k L(E,G_k)/\mathcal{B}(E,\mathcal{F}) & \to & \prod_k L(E,\prod_j F_j/\ker(p_k))/\mathcal{B}(E,\mathcal{F}') \\ (T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}) & \mapsto & (\tilde{s}_k^{-1}\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F}') \end{array}$$

est un isomorphisme.

i) *I a un sens et est linéaire.*

De fait, soient $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_k L(E,G_k)$ tels que $(T_k - T'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E,\mathcal{F})$. Démontrons que

$$(\tilde{s}_k^{-1}\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} - (\tilde{s}_k^{-1}\circ T'_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\tilde{s}_k^{-1}\circ (T_k - T'_k))_{k\in\mathbb{N}}$$

appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{F}')$. Il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E,G_k)$ telle que

$$T_k - T'_k = s_{k+1,k}B_{k+1} - B_k \ , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il vient

$$\begin{array}{rcl} (\tilde{s}_k^{-1}\circ (T_k - T'_k))_{k\in\mathbb{N}} & = & (\tilde{s}_k^{-1}(s_{k+1,k}\circ B_{k+1} - B_k))_{k\in\mathbb{N}} \\ & = & (\tilde{s}_k^{-1}\circ s_{k+1,k}\circ B_{k+1} - \tilde{s}_k^{-1}\circ B_k)_{k\in\mathbb{N}} \\ & = & (\rho_{k+1,k}\circ \tilde{s}_{k+1}^{-1}\circ B_{k+1} - \tilde{s}_k^{-1}\circ B_k)_{k\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Puisque l'application $\tilde{s}_k^{-1}\circ B_k$ appartient à $L(E,\prod_j F_j/\ker(p_k))$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite $(\tilde{s}_k^{-1}\circ(T_k - T'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{F}')$.

ii) *I est injectif.*

Supposons que $I((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) = 0$ et démontrons que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$. On a

$$I((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{F})) = 0$$

c'est-à-dire

$$(\tilde{s}_k^{-1}\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E,\mathcal{F}').$$

Donc, il existe une suite d'opérateurs $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E,\prod_j F_j/\ker(p_k))$ telle que

$$\tilde{s}_k^{-1}\circ T_k=\rho_{k+1,k}\circ B_{k+1}-B_k \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Il s'ensuit que

$$T_k=\tilde{s}_k\circ\rho_{k+1,k}\circ B_{k+1}-\tilde{s}_k\circ B_k \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Comme $\tilde{s}_k^{-1}\circ s_{k+1,k}=\rho_{k+1,k}\circ\tilde{s}_{k+1}^{-1}$, on a

$$s_{k+1,k}\circ\tilde{s}_{k+1}=\tilde{s}_k\circ\rho_{k+1,k} \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$T_k=s_{k+1,k}\circ\tilde{s}_{k+1}\circ B_{k+1}-\tilde{s}_k\circ B_k \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

et, puisque pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'application $\tilde{s}_k\circ B_k$ appartient à $L(E,G_k)$, la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{F})$.

iii) *I est surjectif.*

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\prod_k L(E,\prod_j F_j/\ker(p_k))$. La suite $(\tilde{s}_k\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k L(E,G_k)$ et est telle que

$$\begin{aligned} I((\tilde{s}_k\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(E,\mathcal{F})) &= (\tilde{s}_k^{-1}\circ\tilde{s}_k\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(E,\mathcal{F}')\\ &= (T_k)_{k\in\mathbb{N}}+\mathcal{B}(E,\mathcal{F}'), \end{aligned}$$

ce qui suffit.

Si les applications

$$p_{nk}:\prod_{j=1}^n F_j\to F_k$$

et

$$j_{nk}:F_k\to\prod_{j=1}^n F_j$$

sont respectivement les surjections et les injections canoniques, on voit tout de suite que

$$s_{n+1,n}\circ j_{n+1,k}=\begin{cases} j_{nk} & \text{si} \quad k\leq n\\ 0 & \text{si} \quad k=n+1\end{cases}$$

et

$$\sum_{k=1}^n j_{nk}\circ p_{nk}=\mathrm{id}_{\prod_{k=1}^n F_k}.$$

Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\prod_k L(E,G_k)$ et établissons qu'il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(E,G_k)$ telle que

$$A_k=s_{k+1,k}\circ B_{k+1}-B_k \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq j$, l'application

$$A_{kj} := p_{kj} \circ A_k$$

appartient à $L(E, F_j)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $B_{jj} = 0$ et

$$B_{vj} = \sum_{k=1}^{v-1} A_{kj} \quad , \quad \text{si } v \geq j+1.$$

Dans ces conditions, la suite

$$(B_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{j=1}^{k} j_{kj} \circ B_{kj}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

appartient à $\prod_k L(E, G_k)$ et il vient

$$\begin{aligned}
s_{k+1,k}B_{k+1} - B_k &= s_{k+1,k} \circ \left(\sum_{j=1}^{k+1} j_{k+1,j} \circ B_{k+1,j}\right) - \sum_{j=1}^{k} j_{kj} \circ B_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} j_{kj} \circ B_{k+1,j} - \sum_{j=1}^{k} j_{kj} \circ B_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} j_{kj} \circ (B_{k+1,j} - B_{kj}) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} j_{kj} \circ p_{kj} \circ A_k \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k+1} j_{kj} \circ p_{kj}\right) \circ A_k \\
&= A_k.
\end{aligned}$$

■

Proposition III.3 *Si $\mathcal{F} = (\hat{F}_k, \rho_{k+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental d'espaces de Banach pour l'espace de Fréchet F et si E est un espace nucléaire, alors les espaces* $\mathrm{Ext}(E, F)$ *et* $\prod_k L(E; \hat{F}_k)/\mathcal{B}(E, \mathcal{F})$ *sont en bijection linéaire.*

Preuve. Par le lemme I.29, la suite

$$0 \to F \xrightarrow{i} \prod_k \hat{F}_k \xrightarrow{q} \prod_k \hat{F}_k \to 0$$

avec $q((f_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\rho_{k+1,k}x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est topologiquement exacte et, par le théorème II.3, si E est un espace nucléaire, la suite

$$\begin{aligned}
0 \to L(E, F) \xrightarrow{i^*} L\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) \xrightarrow{q^*} L\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) \xrightarrow{j_0} \mathrm{Ext}^1(E, F) \\
\xrightarrow{i'} \mathrm{Ext}^1\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) \xrightarrow{q'} \mathrm{Ext}^1\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) \to 0
\end{aligned}$$

est exacte.

Puisque $\mathrm{Ext}(E, \prod_k \hat{F}_k) = 0$, l'application j_0 est surjective et l'application

$$\tilde{j}_0 : L\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) / \ker(j_0) \to \mathrm{Ext}^1(E, F) \quad [\varphi]_{\ker(j_0)} \mapsto j_0(\varphi)$$

est une bijection linéaire. Comme

$$\begin{aligned}
\ker(j_0) &= \mathrm{im}(q^*) \\
&= \left\{ q^*(S) : S \in L\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) \right\} \\
&= \left\{ q \circ S : S \in L\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right) \right\} \\
&= \left\{ (\rho_{k+1,k}(Se)_{k+1} - (Se)_k)_{k \in \mathbb{N}} : S \in L\left(E, \prod_k \hat{F}_k\right), e \in E \right\} \\
&= \mathcal{B}(E, \mathcal{F}),
\end{aligned}$$

la conclusion s'ensuit aussitôt. ∎

Définition III.4 Un *opérateur elliptique* est une application

$$P(D) : C_\infty(\Omega) \to C_\infty(\Omega) \quad f \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha(f),$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et les coefficients a_α ($\alpha \in \mathbb{N}^n$) sont complexes et tels que si $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha = 0$, avec $\xi \in \mathbb{R}^n$, alors $\xi = 0$.

Théorème III.5 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, alors l'opérateur elliptique $P(D) : C_\infty(\Omega) \to C_\infty(\Omega)$ n'a pas d'inverse linéaire continu à droite dans $C_\infty(\Omega)$.*

Preuve. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une application P_d appartenant à $L(C_\infty(\Omega), C_\infty(\Omega))$ telle que $P(D) \circ P_d = \mathrm{id}_{C_\infty(\Omega)}$.

Si on pose $\mathcal{N}(\Omega) = \ker P(D)$, la suite

$$0 \to \mathcal{N}(\Omega) \overset{i=\mathrm{id}}{\to} C_\infty(\Omega) \overset{P(D)}{\to} C_\infty(\Omega) \to 0$$

est topologiquement exacte car l'opérateur $P(D)$ est surjectif. (cf. [4]).

Si l'espace H est nucléaire, par le théorème II.3, la suite suivante

$$0 \to L(H, \mathcal{N}(\Omega)) \overset{i^*}{\to} L(H, C_\infty(\Omega)) \overset{P(D)^*}{\to} L(H, C_\infty(\Omega))$$

$$\overset{j_0}{\to} \mathrm{Ext}(H, \mathcal{N}(\Omega)) \overset{i'}{\to} \mathrm{Ext}(H, C_\infty(\Omega)) \overset{q'}{\to} \mathrm{Ext}(H, C_\infty(\Omega)) \to 0$$

est exacte.

Etablissons deux résultats auxiliaires.

Lemme 1. *L'opérateur j_0 est nul.*

Preuve. L'opérateur $P(D)^*$ est surjectif. En effet, si l'application A appartient à $L(H, C_\infty(\Omega))$, alors l'application $P_d \circ A$ appartient à $L(H, C_\infty(\Omega))$ et est telle que

$$P(D)^*(P_d \circ A) = P(D) \circ P_d \circ A = A.$$

Par conséquent, $\mathrm{im}(P(D)^*) = \ker(j_0) = L(H, C_\infty(\Omega))$, ce qui suffit.

Lemme 2. *L'opérateur i' est nul.*

Preuve. Choisissons une suite de compacts $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$ et $K_m \subset K_{m+1}^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour tout m, posons $\Omega_m := K_m^\circ$ et

$$H_m := C_0(K_m) \bigcap \{f \in C_\infty(\Omega_m) : P(D)f = 0\}$$

et on munit cet espace linéaire H_m de la norme $sup_{x\in K_m} |.(x)|$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit

$$\rho_m : \mathcal{N}(\Omega) \to H_m \qquad f \mapsto f|_{K_m}$$

et pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq m$, on définit

$$\rho_{k,m} : H_k \to H_m \qquad f \mapsto f|_{K_m}.$$

Dans ces conditions, pour tout m, H_m est un espace de Banach, l'espace $\mathcal{N}(\Omega)$ est isomorphe à la limite projective des H_m et pour tout m, l'espace $\rho_m\mathcal{N}(\Omega)$ est dense dans $\rho_{m+1,m}H_m$. Par conséquent, la suite $(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ constitue un système fondamental d'espaces de Banach pour $\mathcal{N}(\Omega)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & C_\infty(\Omega) & \xrightarrow{i} & \prod_k C_\infty(\Omega_k) & \xrightarrow{q} & \prod_k C_\infty(\Omega_k) & \to 0 \\
& \uparrow I & & \uparrow j & & \uparrow j & \\
0 \to & \mathcal{N}(\Omega) & \xrightarrow{i_p} & \prod_k H_k & \xrightarrow{q_p} & \prod_k H_k & \to 0
\end{array}$$

où les applications I et j sont les applications identiques,

$$\begin{aligned}
i &: C_\infty(\Omega) \to \prod_k C_\infty(\Omega_k) \qquad f \mapsto (f|_{\Omega_k})_{k\in\mathbb{N}} \\
i_p &: \mathcal{N}(\Omega) \to \prod_k H_k \qquad f \mapsto (\rho_k f)_{k\in\mathbb{N}} \\
q &: \prod_k C_\infty(\Omega_k) \to \prod_k C_\infty(\Omega_k) \qquad (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (f_{k+1}|_{\Omega_k} - f_k)_{k\in\mathbb{N}} \\
q_p &: \prod_k H_k \to \prod_k H_k \qquad (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\rho_{k+1,k} f_{k+1} - f_k)_{k\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Par la propriété I.29, la seconde ligne est topologiquement exacte. Pour établir l'exactitude de la première ligne, il suffit de démontrer que l'application q est surjective. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons des applications φ_k appartenant à $\mathcal{D}(\Omega_k)$, tels que $\varphi_k = 1$ sur Ω_{k-1} ($\Omega_0 := \emptyset$). L'application

$$R : \prod_k C_\infty(\Omega_k) \to \prod_k C_\infty(\Omega_k) : (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{v=1}^{k} \varphi_v f_v - f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

est linéaire, continue et constitue un inverse linéaire continu à droite de q. En effet, si la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k C_\infty(\Omega_k)$, alors

$$\begin{aligned} (q \circ R)((f_k)_{k\in\mathbb{N}}) &= q\left(\sum_{v=1}^{k} \varphi_v f_v - f_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\sum_{v=1}^{k+1} \varphi_v f_v|_{\Omega_k} - f_{k+1}|_{\Omega_k} - \sum_{v=1}^{k} \varphi_v f_v + f_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= (\varphi_{k+1}|_{\Omega_k} f_{k+1}|_{\Omega_k} - f_{k+1}|_{\Omega_k} + f_k)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= (f_k)_{k\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Si l'espace E est nucléaire, les lignes du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \to \prod_k L(E, C_\infty(\Omega_k)) & \xrightarrow{q^*} & \prod_k L(E, C_\infty(\Omega_k)) & \xrightarrow{j_0'} & \mathrm{Ext}(E, C_\infty(\Omega)) & \to \ldots \\ & & \uparrow j^* & & \uparrow i' & \\ & \ldots \to & \prod_k L(E, H_k) & \xrightarrow{j_0} & \mathrm{Ext}(E, \mathcal{N}(\Omega)) & \to 0 \end{array}$$

sont exactes (par la proposition III.2, l'espace $\mathrm{Ext}(E, \prod_k H_k) = 0$).

Nous démontrerons à la fin de ce lemme que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \prod_k L(E, C_\infty(\Omega_k)) & \xrightarrow{j_0'} & \mathrm{Ext}(E, C_\infty(\Omega)) \\ \uparrow j^* & & \uparrow i' \\ \prod_k L(E, H_k) & \xrightarrow{j_0} & \mathrm{Ext}(E, \mathcal{N}(\Omega)) \end{array}$$

L'application q^* est surjective car l'application q possède un inverse à droite. Par conséquent,

$$\mathrm{im}(q^*) = \ker(j_0') = \prod_k L(E, C_\infty(\Omega_k))$$

et l'application j_0' est nulle. Comme $i' \circ j_0 = j_0' \circ j$, on en déduit que $i' \circ j_0 = 0$ et l'application i' est nulle car j_0 est surjectif.

Il nous reste donc à établir que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
\prod_k L(E, C_\infty(\Omega_k)) & \overset{j_0'}{\to} & \mathrm{Ext}(E, C_\infty(\Omega)) \\
\uparrow j^* & & \uparrow i' \\
\prod_k L(E, H_k) & \overset{j_0}{\to} & \mathrm{Ext}(E, \mathcal{N}(\Omega))
\end{array}$$

Si $\{p_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ définit un système de semi-normes sur $\prod_k C_\infty(\Omega_k)$, notons $(\widehat{S_\ell^2}, \rho^2_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ le spectre canonique associé à $\prod_k C_\infty(\Omega_k)$ où les espaces $\widehat{S_\ell^2}$ sont des espaces de Banach et nous avons les applications

$$\rho^2_{\ell+1,\ell} : S^2_{\ell+1} \to S^2_\ell \qquad [x]_{\ker(p_{\ell+1})} \mapsto [x]_{\ker(p_\ell)}$$

et

$$\rho^2_\ell : \prod_k C_\infty(\Omega_k) \to S^2_\ell \qquad x \mapsto [x]_{\ker(p_\ell)}.$$

De la même manière que dans le lemme I.37, on définit des spectres canoniques $(\widehat{S_\ell^1}, \rho^1_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{S_\ell^3}, \rho^3_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ sur $C_\infty(\Omega)$ et $\prod_k C_\infty(\Omega_k)$ respectivement, avec

$$\begin{array}{rcl}
S^1_\ell & = & C_\infty(\Omega)/\ker(p_\ell \circ i) \\
S^3_\ell & = & \prod_k C_\infty(\Omega_k)/\ker(X_\ell)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcll}
\rho^1_{\ell+1,\ell} & : & S^1_{\ell+1} \to S^1_\ell & [x]_{\ker(p_\ell\circ i)} \mapsto [x]_{\ker(p_{\ell+1}\circ i)} \\
\rho^1_\ell & : & C_\infty(\Omega) \to S^1_\ell & x \mapsto [x]_{\ker(p_\ell\circ i)} \\
\rho^3_{\ell+1,\ell} & : & S^3_{\ell+1} \to S^3_\ell & [x]_{\ker(X_{\ell+1})} \mapsto [x]_{\ker(X_\ell)} \\
\rho^3_\ell & : & \prod_k C_\infty(\Omega_k) \to S^3_\ell & x \mapsto [x]_{\ker(X_\ell)}
\end{array}$$

où $X_\ell(h) = \inf\{p_\ell(x) : q(x) = h\ ,\ x \in \prod_k C_\infty(\Omega_k)\}$, pour tout $h \in \prod_k C_\infty(\Omega_k)$.

Par le lemme I.37, les lignes du diagramme suivant sont topologiquement exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & C_\infty(\Omega) & \overset{i}{\to} & \prod_k C_\infty(\Omega_k) & \overset{q}{\to} & \prod_k C_\infty(\Omega_k) & \to 0 \\
& \downarrow \rho^1_{\ell+1} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^2_{\ell+1} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^3_{\ell+1} & \\
0 \to & \widehat{S^1_{\ell+1}} & \overset{i_{\ell+1}}{\to} & \widehat{S^2_{\ell+1}} & \overset{q_{\ell+1}}{\to} & \widehat{S^3_{\ell+1}} & \to 0 \\
& \downarrow \rho^1_{\ell+1,\ell} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^2_{\ell+1,\ell} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^3_{\ell+1,\ell} & \\
0 \to & \widehat{S^1_\ell} & \overset{i_\ell}{\to} & \widehat{S^2_\ell} & \overset{q_\ell}{\to} & \widehat{S^3_\ell} & \to 0
\end{array}$$

A partir de $(\widehat{S_\ell^2},\rho^2_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$, définissons un spectre canonique sur $\prod_k H_k$, que nous notons $(\widehat{S_\ell^{2p}},\rho^{2p}_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$.

Si $S_\ell^2=\prod_k C_\infty(\Omega_k)/\ker(p_\ell)$, alors

$$S_\ell^{2p}=\prod_k H_k/\ker(p_\ell)|_{\prod_k H_k}.$$

Par conséquent, on définit

$$\rho^{2p}_{\ell+1,\ell}:S^{2p}_{\ell+1}\to S^{2p}_\ell \qquad [x]_{\ker(p_{\ell+1}|_{\prod_k H_k})}\mapsto [x]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})}$$

et

$$\rho^{2p}_\ell:\prod_k H_k\to S^{2p}_\ell \qquad x\mapsto [x]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})}.$$

De la même manière que dans le lemme I.37, on définit des spectres canoniques $(\widehat{S_\ell^{1p}},\rho^{1p}_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{S_\ell^{3p}},\rho^{3p}_{\ell+1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Sur $\mathcal{N}(\Omega)$ et $\prod_k H_k$ respectivement, avec

$$\begin{array}{rcl} S_\ell^{1p} &=& \mathcal{N}(\Omega)/\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k}\circ i_p)\\ S_\ell^{3p} &=& \prod_k H_k/\ker(X_\ell^p)\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcll} \rho^{1p}_{\ell+1,\ell} &:& S^{1p}_{\ell+1}\to S^{1p}_\ell & [x]_{\ker(p_{\ell+1}|_{\prod_k H_k}\circ i_p)}\mapsto [x]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k}\circ i_p)}\\ \rho^{1p}_\ell &:& \mathcal{N}(\Omega)\to S^{1p}_\ell & x\mapsto [x]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k}\circ i_p)}\\ \rho^{3p}_{\ell+1,\ell} &:& S^{3p}_{\ell+1}\to S^{3p}_\ell & [x]_{\ker(X^p_{\ell+1})}\mapsto [x]_{\ker(X^p_\ell)}\\ \rho^{3p}_\ell &:& \prod_k H_k\to S^{3p}_\ell & x\mapsto [x]_{\ker(X^p_\ell)}\end{array}$$

où $X_\ell^p(h)=\inf\{p_\ell(x):q_p(x)=h\ ,\ x\in\prod_k H_k\}$, pour tout $h\in\prod_k H_k$.

Par le lemme I.37, les lignes du diagramme suivant sont topologiquement exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & \mathcal{N}(\Omega) & \overset{i_p}{\to} & \prod_k H_k & \overset{q_p}{\to} & \prod_k H_k & \to 0\\ & \downarrow \rho^{1p}_{\ell+1} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^{2p}_{\ell+1} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^{3p}_{\ell+1} & \\ 0\to & \widehat{S^{1p}_{\ell+1}} & \overset{i^p_{\ell+1}}{\to} & \widehat{S^{2p}_{\ell+1}} & \overset{q^p_{\ell+1}}{\to} & \widehat{S^{3p}_{\ell+1}} & \to 0\\ & \downarrow \rho^{1p}_{\ell+1,\ell} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^{2p}_{\ell+1,\ell} & \hookrightarrow & \downarrow \rho^{3p}_{\ell+1,\ell} & \\ 0\to & \widehat{S^{1p}_\ell} & \overset{i^p_\ell}{\to} & \widehat{S^{2p}_\ell} & \overset{q^p_\ell}{\to} & \widehat{S^{3p}_\ell} & \to 0\end{array}$$

Considérons l'application $s^2_\ell:\widehat{S^{2p}_\ell}\to\widehat{S^2_\ell}$, le prolongement de l'application

$$s^2_\ell:S^{2p}_\ell\to S^2_\ell \qquad [x]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})}\mapsto [j(x)]_{\ker(p_\ell)}.$$

Elle est bien définie car si x appartient à $\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})$, alors $(p_\ell|_{\prod_k H_k})(x) = 0$. Puisque $p_\ell|_{\prod_k H_k} = p_\ell \circ j$, $(p_\ell \circ j)(x) = 0$ et $j(x)$ appartient à $\ker(p_\ell)$.

Considérons l'application $s_\ell^1 : \widehat{S_\ell^{1p}} \to \widehat{S_\ell^1}$, le prolongement de l'application

$$s_\ell^1 : S_\ell^{1p} \to S_\ell^1 \qquad [x]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k} \circ i_p)} \mapsto [x]_{\ker(p_\ell \circ i)}.$$

Elle est bien définie car si x appartient à $\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k} \circ i_p)$, alors

$$(p_\ell \circ j \circ i_p)(x) = (p_\ell \circ i \circ id)(x) = 0$$

et x appartient à $\ker(p_\ell \circ i)$.

Considérons enfin l'application $s_\ell^3 : \widehat{S_\ell^{3p}} \to \widehat{S_\ell^3}$, le prolongement de l'application

$$s_\ell^3 : S_\ell^{3p} \to S_\ell^3 \qquad [x]_{\ker(X_\ell^p)} \mapsto [j(x)]_{\ker(X_\ell)}.$$

Cette application a un sens car si $x \in \ker(X_\ell^p)$, alors $x \in \ker(X_\ell)$ car $X_\ell \leq X_\ell^p$ sur $\prod_k H_k$.

Etablissons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \widehat{S_\ell^1} & \xrightarrow{i_\ell} & \widehat{S_\ell^2} & \xrightarrow{q_\ell} & \widehat{S_\ell^3} & \to 0 \\
 & \uparrow s_\ell^1 & & \uparrow s_\ell^2 & & \uparrow s_\ell^3 & \\
0 \to & \widehat{S_\ell^{1p}} & \xrightarrow{i_\ell^p} & \widehat{S_\ell^{2p}} & \xrightarrow{q_\ell^p} & \widehat{S_\ell^{3p}} & \to 0
\end{array}$$

Il suffit de vérifier la propriété pour les espaces non complétés.

a) $s_\ell^2 \circ i_\ell^p = i_\ell \circ s_\ell^1$. En effet, soit $[f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k} \circ i_p)}$ appartenant à S_ℓ^{1p}. D'une part,

$$\begin{aligned}
(s_\ell^2 \circ i_\ell^p)[f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k} \circ i_p)} &= s_\ell^2[i_p(f)]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})} \\
&= [j \circ i_p(f)]_{\ker(p_\ell)}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(i_\ell \circ s_\ell^1)[f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k} \circ i_p)} &= i_\ell[f]_{\ker(p_\ell \circ i)} \\
&= [i(f)]_{\ker(p_\ell)} \\
&= [j \circ i_p(f)]_{\ker(p_\ell)}.
\end{aligned}$$

b) $s_\ell^3 \circ q_\ell^p = q_\ell \circ s_\ell^2$. En effet, soit $[f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})}$ appartenant à S_ℓ^{2p}. D'une part,

$$\begin{aligned}
(s_\ell^3 \circ q_\ell^p)[f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})} &= s_\ell^3([q_p(f)]_{\ker(X_\ell^p)}) \\
&= [j \circ q_p(f)]_{\ker(X_\ell)}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl}(q_\ell \circ s_\ell^2)[f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})} & = & q_\ell([j(f)]_{\ker(p_\ell)}) \\ & = & [(q \circ j)(f)]_{\ker(X_\ell)} \\ & = & [(j \circ q_p)(f)]_{\ker(X_\ell)}.\end{array}$$

Démontrons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \prod_k H_k \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\rho_\ell^{3p}"'] & \prod_k C_\infty(\Omega_k) \arrow[d, "\rho_\ell^3"] \\ \widehat{S_\ell^{3p}} \arrow[r, "s_\ell^3"'] & \widehat{S_\ell^3} \end{tikzcd}$$

Soit h appartenant à $\prod_k H_k$. D'une part,

$$\begin{array}{rcl}(s_\ell^3 \circ \rho_\ell^{3p})(h) & = & s_\ell^3([h]_{\ker(X_\ell^p)}) \\ & = & [j(h)]_{\ker(X_\ell)}.\end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl}(\rho_\ell^3 \circ j)(h) & = & \rho_\ell^3(j(h)) \\ & = & [j(h)]_{\ker(X_\ell)}.\end{array}$$

Démontrons que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \widehat{S_{\ell+1}^2} \arrow[r, "\rho_{\ell+1,\ell}^2"] & \widehat{S_\ell^2} \\ \widehat{S_{\ell+1}^{2p}} \arrow[u, "s_{\ell+1}^2"] \arrow[r, "\rho_{\ell+1,\ell}^{2p}"'] & \widehat{S_\ell^{2p}} \arrow[u, "s_\ell^2"'] \end{tikzcd}$$

Soit $[f]_{\ker(p_{\ell+1}|_{\prod_k H_k})}$ appartenant à $S_{\ell+1}^{2p}$. D'une part,

$$\begin{array}{rcl}(s_\ell^2 \circ \rho_{\ell+1,\ell}^{2p})[f]_{\ker(p_{\ell+1}|_{\prod_k H_k})} & = & s_\ell^2([f]_{\ker(p_\ell|_{\prod_k H_k})}) \\ & = & [j(f)]_{\ker(p_\ell)}.\end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl}(\rho_{\ell+1,\ell}^2 \circ s_{\ell+1}^2)[f]_{\ker(p_{\ell+1}|_{\prod_k H_k})} & = & \rho_{\ell+1,\ell}^2([j(f)]_{\ker(p_{\ell+1})}) \\ & = & [j(f)]_{\ker(p_\ell)}.\end{array}$$

Démontrons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\prod_k H_k \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\rho_\ell^{3p}"'] & \prod_k C_\infty(\Omega_k) \arrow[d, "\rho_\ell^3"] \\
\widehat{S_\ell^{3p}} \arrow[r, "s_\ell^3"'] & \widehat{S_\ell^3}
\end{tikzcd}$$

Soit f appartenant à $\prod_k H_k$. D'une part,

$$(\rho_\ell^3 \circ j)(f) = [j(f)]_{\ker(X_\ell)}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(s_\ell^3 \circ \rho_\ell^{3p})(f) &= s_\ell^3([f]_{\ker(X_\ell)}) \\
&= [j(f)]_{\ker(X_\ell)}.
\end{aligned}$$

A présent, définissons l'application

$$j_0 : \prod_k L(E, H_k) \to \mathrm{Ext}(E, \mathcal{N}(\Omega))$$

comme dans le théorème II.3. Considérons une application φ appartenant à $L(E, \prod_k H_k)$. Posons $\varphi_\ell := \rho_\ell^{3p} \circ \varphi$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Cette application appartient à $L(E, \widehat{S_\ell^{3p}})$ et puisque E est nucléaire et q_ℓ^p surjectif, il existe une application $\psi_\ell \in L(E, \widehat{S_\ell^{2p}})$ telle que $q_\ell^p \circ \psi_\ell = \varphi_\ell$.

Schématiquement, on a :

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, "\psi_\ell"'] \arrow[dr, "\varphi_\ell"] & \prod_k H_k \arrow[d, "\rho_\ell^{3p}"] \\
\widehat{S_\ell^{2p}} \arrow[rr, "q_\ell^p"'] & & \widehat{S_\ell^{3p}}
\end{tikzcd}$$

Donc, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'application $\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell$ appartient à $L(E, \widehat{S_\ell^{2p}})$ et

$$\begin{aligned}
q_\ell^p \circ (\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell) &= q_\ell^p \circ \rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - q_\ell^p \circ \psi_\ell \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}^{3p} \circ q_{\ell+1}^p \circ \psi_{\ell+1} - q_\ell^p \circ \psi_\ell \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}^{3p} \circ \varphi_{\ell+1} - \varphi_\ell \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}^{3p} \circ \rho_{\ell+1}^{3p} \circ \varphi - \rho_\ell^{3p} \circ \varphi \\
&= \rho_\ell^{3p} \circ \varphi - \rho_\ell^{3p} \circ \varphi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\ker(q_\ell^p) = \mathrm{im}(i_\ell^p)$, l'application $\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell$ appartient à $\mathrm{im}(i_\ell^p)$ et comme l'application i_ℓ^p est injective, l'application

$$\tilde{i}_\ell^p : \widehat{S_\ell^{1p}} \to \mathrm{im}(i_\ell^p)$$

est une bijection linéaire continue.

Soit j_ℓ^p son inverse.

Par conséquent, l'application $j_\ell^p \circ (\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell)$ appartient à $L(E, \widehat{S_\ell^{1p}})$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et

$$(j_\ell^p \circ (\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{N}(\Omega))$$

appartient donc à $\mathrm{Ext}(E, \mathcal{N}(\Omega))$. Dans ces conditions, nous définissons l'application j_0 par

$$j_0 : L(E, \prod_k H_k) \to \mathrm{Ext}(E, \mathcal{N}(\Omega)) \quad \varphi \mapsto (j_\ell^p \circ (\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{N}(\Omega))$$

Définissons ensuite l'application

$$j_0' : \prod_k L(E, C_\infty(\Omega_k)) \to \mathrm{Ext}(E, C_\infty(\Omega))$$

comme dans le théorème II.3.

Considérons une application φ' appartenant à $L(E, \prod_k C_\infty(\Omega_k))$.

Posons $\varphi_\ell' := \rho_\ell^3 \circ \varphi'$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Cette application appartient à $L(E, \widehat{S_\ell^3})$ et, puisque E est nucléaire et q_ℓ surjectif, il existe une application $\psi_\ell' \in L(E, \widehat{S_\ell^2})$ telle que $q_\ell \circ \psi_\ell' = \varphi_\ell'$.

Schématiquement, on a :

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dl, "\psi'_\ell"'] \arrow[dr, "\varphi'_\ell"] & \prod_k C_\infty(\Omega_k) \arrow[d, "\rho^3_\ell"] \\
\widehat{S^2_\ell} \arrow[rr, "q_\ell"'] & & \widehat{S^3_\ell}
\end{tikzcd}$$

Donc, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'application $\rho_{\ell+1,\ell}^2 \circ \psi_{\ell+1}' - \psi_\ell'$ appartient à $L(E, \widehat{S_\ell^2})$ et

$$\begin{aligned}
q_\ell \circ (\rho_{\ell+1,\ell}^2 \circ \psi_{\ell+1}' - \psi_\ell') &= q_\ell \circ \rho_{\ell+1,\ell}^2 \circ \psi_{\ell+1}' - q_\ell \circ \psi_\ell' \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}^3 \circ q_{\ell+1} \circ \psi_{\ell+1}' - q_\ell \circ \psi_\ell' \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}^3 \circ \varphi_{\ell+1}' - \varphi_\ell' \\
&= \rho_{\ell+1,\ell}^3 \circ \rho_{\ell+1}^3 \circ \varphi' - \rho_\ell^3 \circ \varphi' \\
&= \rho_\ell^3 \circ \varphi' - \rho_\ell^3 \circ \varphi' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\ker(q_\ell) = \mathrm{im}(i_\ell)$, l'application $\rho_{\ell+1,\ell}^2 \circ \psi_{\ell+1}' - \psi_\ell'$ appartient à $\mathrm{im}(i_\ell)$ et comme l'application i_ℓ est injective, l'application

$$\tilde{\imath}_\ell : \widehat{S_\ell^1} \to \mathrm{im}(i_\ell)$$

est une bijection linéaire continue.

Soit j_ℓ son inverse.

Par conséquent, l'application $j_\ell \circ (\rho^2_{\ell+1,\ell} \circ \psi'_{\ell+1} - \psi'_\ell)$ appartient à $L(E, \widehat{S^1_\ell})$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et

$$(j_\ell \circ (\rho^2_{\ell+1,\ell} \circ \psi'_{\ell+1} - \psi'_\ell))_{\ell\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, C_\infty(\Omega))$$

appartient donc à $\mathrm{Ext}(E, C_\infty(\Omega))$. Dans ces conditions, nous définissons l'application j'_0 par

$$j'_0 : L(E, \prod_k C_\infty(\Omega_k)) \to \mathrm{Ext}(E, C_\infty(\Omega)) \quad \varphi \mapsto (j_\ell \circ (\rho^2_{\ell+1,\ell} \circ \psi'_{\ell+1} - \psi'_\ell))_{\ell\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, C_\infty(\Omega))$$

Dans ces conditions, nous sommes à présent capables de prouver que $i' \circ j_0 = j'_0 \circ j$ sur $\prod_k L(E, H_k)$.

Soit φ appartenant à $L(E, \prod_k H_k)$. L'application $\varphi_\ell := \rho^{3p}_\ell \circ \varphi$ appartient à $L(E, \widehat{S^{3p}_\ell})$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et puisque E est nucléaire et q^p_ℓ surjectif, il existe une application $\psi_\ell \in L(E, \widehat{S^{2p}_\ell})$ telle que $q^p_\ell \circ \psi_\ell = \varphi_\ell$.

a) D'une part,

$$\begin{aligned} i'(j_0(\varphi)) &= i'\Big((j^p_\ell \circ (\rho^{2p}_{\ell+1,\ell} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell))_{\ell\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, \mathcal{N}(\Omega))\Big) \\ &= \Big(s^1_\ell \circ j^p_\ell \circ (\rho^{2p}_{\ell+1,\ell} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell)\Big)_{\ell\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E, C_\infty(\Omega)). \end{aligned}$$

b) D'autre part, l'application $\varphi' := j \circ \varphi$ appartient à $L(E, \prod_k C_\infty(\Omega_k))$. Si nous posons $\varphi'_\ell := \rho^3_\ell \circ \varphi' \in L(E, \widehat{S^3_\ell})$ et $\psi'_\ell := s^2_\ell \circ \psi_\ell \in L(E, \widehat{S^2_\ell})$, nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, "\psi_\ell"'] \arrow[ddl, "\psi'_\ell"'] \arrow[dr, "\varphi_\ell"] & \prod_k H_k \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\rho^{3p}_\ell"] & \prod_k C_\infty(\Omega_k) \arrow[dd, "\rho^3_\ell"] \\
\widehat{S^{2p}_\ell} \arrow[rr, "q^p_\ell"'] \arrow[d, "s^2_\ell"'] & & \widehat{S^{3p}_\ell} \arrow[dr, "s^3_\ell"] & \\
\widehat{S^2_\ell} \arrow[rrr, "q_\ell"] & & & \widehat{S^3_\ell}
\end{tikzcd}$$

On a $q_\ell \circ \psi'_\ell = \varphi'_\ell$. De fait, vu ce qui précède, il vient successivement :

$$\begin{aligned} q_\ell \circ \psi'_\ell &= q_\ell \circ s^2_\ell \circ \psi_\ell \\ &= s^3_\ell \circ q^p_\ell \circ \psi_\ell \\ &= s^3_\ell \circ \varphi_\ell \\ &= s^3_\ell \circ \rho^{3p}_\ell \circ \varphi \\ &= \rho^3_\ell \circ j \circ \varphi \\ &= \rho^3_\ell \circ \varphi' \\ &= \varphi'_\ell. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} j_0'(j(\varphi)) & = & (j_\ell(s_\ell^2 \circ \rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - s_\ell^2 \circ \psi_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, C_\infty(\Omega)) \\ & = & (j_\ell \circ s_\ell^2(\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, C_\infty(\Omega)) \\ & \underset{*}{=} & (s_\ell^1 \circ j_\ell^p(\rho_{\ell+1,\ell}^{2p} \circ \psi_{\ell+1} - \psi_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(H, C_\infty(\Omega)) \\ & = & i'(j_0(\varphi)). \end{array}$$

Justifions l'égalité en (*) : rappelons que $s_\ell^2 \circ i_\ell^p = i_\ell \circ s_\ell^1$ sur $\widehat{S_\ell^{1p}}$. Par conséquent, $j_\ell \circ s_\ell^2 \circ i_\ell^p = s_\ell^1$ sur $\widehat{S_\ell^{1p}}$ et sur $\mathrm{im}(i_\ell^p)$, on a $j_\ell \circ s_\ell^2 = s_\ell^1 \circ j_\ell^p$, ce qui suffit.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.

Par les lemmes 1 et 2, on en déduit que l'espace $\mathrm{Ext}(H, \mathcal{N}(\Omega)) = 0$, pour tout espace H nucléaire. Comme l'ensemble des suites ω est nucléaire, $\mathrm{Ext}(\omega, \mathcal{N}(\Omega)) = 0$.

Considérons un compact K de Ω d'intérieur non vide et la semi-norme

$$p : \mathcal{N}(\Omega) \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Par le lemme III.1, l'espace $\mathcal{N}(\Omega)/\ker(p) \cong \mathcal{N}(\Omega)|_K$ est de Banach et comme il est nucléaire ($\mathcal{N}(\Omega)$ est un sous-espace de $C_\infty(\Omega)$ qui est nucléaire et le quotient de tout espace nucléaire est nucléaire), il est de dimension finie.

Ceci est possible si $n = 1$ car l'équation $P(D)f = 0$ est en fait une équation différentielle linéaire à coefficients constants et la dimension de l'ensemble de ses solutions est finie.

Par contre, la dimension de l'espace $\mathcal{N}(\Omega)|_K$ n'est pas finie si $n \geq 2$.

Etudions deux contre-exemples.

1) Si $\Omega \neq \phi$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'opérateur

$$P(D) = Dx + iDy$$

est elliptique et $\mathcal{N}(\Omega) = \{f \in C_\infty(\Omega) : P(D)f = 0\}$ est l'espace des fonctions holomorphes qui n'est pas de dimension finie. On en déduit que l'espace $\mathcal{N}(\Omega)|_K$ n'est pas de dimension finie.

2) Si $\Omega \neq \phi$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'opérateur

$$P(D) = \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2 = \Delta$$

est elliptique. Si $z \in \mathbb{C}^n$ est tel que $P(z) = 0$, alors la fonction

$$f_z(x) := e^{\langle z, x \rangle}$$

appartient à $C_\infty(\Omega)$ et est telle que

$$
\begin{aligned}
\Delta f_z(x) &= \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2 e^{\langle z,x\rangle} \\
&= \sum_{j=1}^{n} e^{\langle z,x\rangle} z_j^2 \\
&= e^{\langle z,x\rangle} P(z) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ces fonctions $f_z|_\Omega$ (avec z tel que $P(z) = 0$) sont linéairement indépendantes. En effet, supposons que $z_1, \ldots, z_J$ vérifient $P(z_1) = \cdots = P(z_J) = 0$ (les z_j sont distincts deux à deux) et

$$c_1 f_{z_1} + c_2 f_{z_2} + \cdots + c_J f_{z_J} = 0$$

sur Ω. Si $x_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in](x_0)_1 - \varepsilon, (x_0)_1 + \varepsilon[$, le point $(t, (x_0)_2, \ldots, (x_0)_n) \in \Omega$. Par conséquent, si on pose $x_0' := ((x_0)_2, \ldots (x_0)_n)$ et $z_j' := ((z_j)_2, \ldots, (z_j)_n)$ $(j \leq J)$, on a

$$c_1 e^{t(z_1)_1} e^{\left\langle x_0', z_1' \right\rangle} + \cdots + c_J e^{t(z_J)_1} e^{\left\langle x_0', z_J' \right\rangle} = 0$$

pour tout $t \in](x_0)_1 - \varepsilon; (x_0)_1 + \varepsilon[$. Raisonnons pour $J = 2$. On a

$$c_1 e^{t(z_1)_1} e^{\left\langle x_0', z_1' \right\rangle} + c_2 e^{t(z_2)_1} e^{\left\langle x_0', z_2' \right\rangle} = 0.$$

Comme z_1 diffère de z_2, quitte à permutter les composantes de z_1 et de z_2, on peut supposer que $(z_1)_1 \neq (z_2)_1$. On en déduit que

$$c_1 e^{\left\langle x_0', z_1' \right\rangle} = c_2 e^{\left\langle x_0', z_2' \right\rangle} = 0$$

et donc que $c_1 = c_2 = 0$. Par une récurrence aisée sur J, on a $c_j e^{\left\langle x_0', z_j' \right\rangle} = 0$ pour $1 \leq j \leq J$ et donc $c_j = 0$.

Enfin, l'ensemble $\{f_z|_\Omega : P(z) = 0\}$ n'est pas fini car

$$
\begin{aligned}
\{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\} &= \{z \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\} \\
&= \{y = (y', y'') \in \mathbb{R}^{2n} : |y'|^2 - |y''|^2 = 0\} \\
&= \{y = (y', y'') \in \mathbb{R}^2 : |y'|^2 = |y''|^2\}.
\end{aligned}
$$

■

III.2 A propos de $\mathrm{Ext}(\cdot, F)$

Jusqu'à présent, nous avons principalement étudié les propriétés de $Ext(E, \cdot)$ et dans ce paragraphe, nous allons établir un théorème analogue à celui du deuxième chapitre en considérant $\mathrm{Ext}(\cdot, F)$.

Théorème III.6 *Si E, F, G sont des espaces de Fréchet et H est un espace nucléaire et si la suite*

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$$

est topologiquement exacte, alors la suite

$$0 \to L(E,H) \xrightarrow{q_*} L(G,H) \xrightarrow{i_*} L(F,H) \xrightarrow{A} \mathrm{Ext}(E,H) \xrightarrow{B} \mathrm{Ext}(G,H) \xrightarrow{C} \mathrm{Ext}(F,H) \to 0$$

avec

$$\begin{array}{rcl} q_* & : & L(E,H) \to L(G,H) : R \mapsto R \circ q \\ i_* & : & L(G,H) \to L(F,H) : S \mapsto S \circ i \end{array}$$

est exacte. Les applications A, B et C sont à déterminer.

Preuve. a) q^* est injectif. En effet, si f appartient à $L(E,H)$ et $q_*(f) = f \circ q = 0$, alors $(f \circ q)(x) = f(q(x)) = 0$, pour tout $x \in G$ et $f = 0$, car q est surjectif.

b) $\mathrm{im}(q_*) = \ker(i_*)$. D'une part, si f appartient à $\mathrm{im}(q_*)$, il existe une application g appartenant à $L(E,H)$ telle que $q_*(g) = f$. Par conséquent, $i_*(f) = i_*(q_*(g)) = i_*(g \circ q) = g \circ q \circ i = 0$, car $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$.

D'autre part, supposons que f appartient à $\ker(i_*)$. L'application

$$\tilde{q} : G/\ker(q) \to E \qquad [f]_{\ker(q)} \mapsto q(f)$$

est une bijection linéaire continue et l'application

$$f' : G/\ker(q) \to H \qquad [g]_{\ker(q)} \mapsto f(g)$$

est bien définie car si g appartient à $\ker(q) = \mathrm{im}(i)$, il existe g' appartenant à F tel que $i(g') = g$. Par conséquent, $f(g) = (f \circ i)(g') = 0$, car f appartient à $\ker(i_*)$.

Considérons l'application

$$R : E \to H \qquad e \mapsto f'(\tilde{q}^{-1}(e)).$$

On vérifie aisément qu'elle est linéaire et continue.

Pour tout $g \in G$, il vient

$$\begin{array}{rcl} (R \circ q)(g) & = & R(q(g)) \\ & = & f'(\tilde{q}^{-1}(q(g))) \\ & = & f'([g]_{\ker(q)}) \\ & = & f(g). \end{array}$$

Nous définissons les applications B et C de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcll} B & : & \mathrm{Ext}(E,H) \to \mathrm{Ext}(G,H) & (h_k)_{k \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H}) \mapsto (h_k \circ q)_{k \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) \\ C & : & \mathrm{Ext}(G,H) \to \mathrm{Ext}(F,H) & (h_k)_{k \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) \mapsto (h_k \circ i)_{k \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}). \end{array}$$

L'application B est bien définie. En effet, si les suites $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(h'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\prod_k L(E,\hat{H}_k)$ et sont telles que $(h_k - h'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(E,\mathcal{H})$, alors il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(E,\hat{H}_k)$ telle que

$$h_k - h'_k = \rho^H_{k+1,k} \circ B_{k+1} - B_k,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(B_k \circ q)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_{k\in\mathbb{N}} L(G,\hat{H}_k)$, on en déduit que $(h_k \circ q - h'_k \circ q)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(G,\mathcal{H})$.

De la même manière, on peut démontrer que l'application C est bien définie.

c) C est surjectif. En effet, si $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\prod_k L(F,\hat{H}_k)$, alors $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H})$ appartient à $\operatorname{Ext}(F,H)$.

L'application $\tilde{\imath} : F \to \operatorname{im}(i) : f \mapsto i(f)$ est un isomorphisme.

Puisqu'on peut supposer l'espace $\hat{H}_k$ injectif et que l'application $h_k \circ \tilde{\imath}^{-1}$ est linéaire et continue de $\operatorname{im}(i)$ dans $\hat{H}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur T_k linéaire continu de G dans $\hat{H}_k$ qui prolonge $h_k \circ \tilde{\imath}^{-1}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} C((T_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H})) &= (T_k \circ i)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}) \\ &= (h_k \circ \tilde{\imath}^{-1} \circ i)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}) \\ &= (h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}). \end{aligned}$$

d) $\operatorname{im}(B) = \ker(C)$. Démontrons d'abord l'inclusion $\subset$. Si $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\prod_k L(E,\hat{H}_k)$, on a

$$B((h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})) = (h_k \circ q)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H})$$

et donc

$$\begin{aligned} C(B(h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})) &= (h_k \circ q \circ i)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}) \\ &= \mathcal{B}(F,\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Démontrons à présent l'autre inclusion. Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\prod_k L(G,\hat{H}_k)$. Supposons que

$$\begin{aligned} C((h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H})) &= (h_k \circ i)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}) \\ &= \mathcal{B}(F,\mathcal{H}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(h_k \circ i)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(F,\mathcal{H})$.

Etablissons qu'il existe une suite $(h'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(E,\hat{H}_k)$ telle que

$$\begin{aligned} B((h'_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})) &= (h'_k \circ q)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) \\ &= (h_k)_{k\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire telle que $(h'_k \circ q - h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(G,\mathcal{H})$.

Par définition de $\mathcal{B}(F,\mathcal{H})$, il existe une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\prod_k L(F,\hat{H}_k)$ telle que

$$\rho^H_{k+1,k} \circ B_{k+1} - B_k = h_k \circ i \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$h_k = \rho^H_{k+1,k} \circ B_{k+1} \circ \tilde{\imath}^{-1} - B_k \circ \tilde{\imath}^{-1}$$

sur $\mathrm{im}(i)$. Puisqu'on peut supposer l'espace $\hat{H}_k$ injectif et que l'application $B_k \circ \tilde{\imath}^{-1}$ est linéaire continue de $\mathrm{im}(i)$ dans $\hat{H}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur C_k linéaire continu de G dans $\hat{H}_k$ qui prolonge $B_k \circ \tilde{\imath}^{-1}$. On en déduit que l'opérateur

$$T_k := h_k - \rho^H_{k+1,k} \circ C_{k+1} + C_k$$

appartient à $L(G, \hat{H}_k)$ et est nul sur $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$.

Si e appartient à E, il existe g appartenant à G tel que $q(g) = e$ car q est surjectif. Nous définissons alors l'application h'_k de la manière suivante :

$$h'_k : E \to \hat{H}_k : e \mapsto T_k(g).$$

Elle est bien définie, car s'il existe $g' \in G$ tel que $q(g') = e$, alors $g - g'$ appartient à $\ker(q) = \mathrm{im}(i)$ et $T_k(g) = T_k(g')$, car T_k est nul sur $\mathrm{im}(i)$. On vérifie aisément qu'elle est linéaire et continue.

Pour tout g appartenant à G, on a donc $(h'_k \circ q)(g) = T_k(g)$. Il s'ensuit que la suite

$$(h'_k \circ q - h_k)_{k\in\mathbb{N}} = (-\rho^H_{k+1,k} \circ C_{k+1} + C_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

appartient à $\mathcal{B}(G, \mathcal{H})$ car la suite $(-C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_k L(G, \hat{H}_k)$.

Définissons l'application A. Par le lemme I.29, la suite

$$0 \to H \xrightarrow{I} \prod_k \hat{H}_k \xrightarrow{Q} \prod_k \hat{H}_k \to 0$$

avec

$$Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\rho^H_{k+1,k} \circ x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

est topologiquement exacte et les lignes du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & L(F,H) \arrow[r, "I_F^*"] & L(F,\prod_k \hat{H}_k) \arrow[r, "Q_F^*"] \arrow[u] & L(F,\prod_k \hat{H}_k) \arrow[r, "j_F"] \arrow[u] & \mathrm{Ext}(F,H) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L(G,H) \arrow[r, "I_G^*"] \arrow[u, "i_*"] & L(G,\prod_k \hat{H}_k) \arrow[r, "Q_G^*"] \arrow[u, "i_{2*}"] & L(G,\prod_k \hat{H}_k) \arrow[r, "j_G"] \arrow[u, "i_{3*}"] & \mathrm{Ext}(G,H) \arrow[r] \arrow[u, "C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L(E,H) \arrow[r, "I_E^*"] \arrow[u, "q_*"] & L(E,\prod_k \hat{H}_k) \arrow[r, "Q_E^*"] \arrow[u, "q_{2*}"] & L(E,\prod_k \hat{H}_k) \arrow[r, "j_E"] \arrow[u, "q_{3*}"] & \mathrm{Ext}(E,H) \arrow[r] \arrow[u, "B"] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} I_F^* & : & L(F,H) \to L\left(F, \prod_k \hat{H}_k\right) \qquad f \mapsto I \circ f \\ i_{2*} & : & L\left(G, \prod_k \hat{H}_k\right) \to L\left(F, \prod_k \hat{H}_k\right) \qquad g \mapsto g \circ i \end{array}$$

et

$$j_F : L\left(F, \prod_k \hat{H}_k\right) \to \mathrm{Ext}(F,H) \qquad f \mapsto f + \mathcal{B}(F,\mathcal{H}).$$

(les autres applications sont définies de la même manière) sont exactes. En effet, par le théorème II.3, l'application I_F^* es injective et $\mathrm{im}(I_F^*) = \ker(Q_F^*)$. De plus, on vérifie directement que l'application j_F est surjective et que $\mathrm{im}(Q_F^*) = \ker(j_F)$ (même raisonnement pour les deux autres lignes du diagramme).

En ce qui concerne l'exactitude des colonnes, il suffit de démontrer que l'application i_{2*} est surjective (on procède de la même manière pour i_{3*}).

Soit S appartenant à $L(F, \prod_k \hat{H}_k)$.

L'application

$$S \circ \tilde{\imath}^{-1} : \mathrm{im}(i) \to \prod_k \hat{H}_k$$

vérifie $S \circ \tilde{\imath}^{-1} \circ i = S$. Puisque l'espace $\prod_k \hat{H}_k$ est injectif et que $S \circ \tilde{\imath}^{-1}$ est linéaire continu de $\mathrm{im}(i)$ dans $\prod_k \hat{H}_k$, il existe un opérateur T linéaire continu de G dans $\prod_k \hat{H}_k$ qui prolonge $S \circ \tilde{\imath}^{-1}$ et on a

$$T \circ i = i_{*2}(T) = S,$$

ce qui suffit. Enfin, on voit tout de suite que le diagramme est commutatif.

A présent, nous pouvons définir A. Soit T appartenant à $L(F,H)$. Puisque l'application $I_F^*(T)$ appartient à $L(F, \prod_k \hat{H}_k)$ et que i_{2*} est surjectif, il existe S appartenant à $L(G, \prod_k \hat{H}_k)$ tel que $I_F^*(T) = i_{2*}(S)$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} Q_F^*(i_{2*}(S)) & = & i_{3*} \circ Q_G^*(S) \\ & = & Q_F^* \circ I_F^*(T) \\ & = & 0 \end{array}$$

car $\mathrm{im}(I_F^*) = \ker(Q_F^*)$. Comme $Q_G^*(S)$ appartient à $\ker(i_{3*}) = \mathrm{im}(q_{3*})$, il existe R appartenant à $L(E, \prod_k \hat{H}_k)$ tel que $Q_G^*(S) = q_{3*}(R)$.

Dans ces conditions, nous définissons l'application

$$A : L(F,H) \to \mathrm{Ext}(E,H) \qquad T \mapsto R + \mathcal{B}(E,\mathcal{H}).$$

Cette définition a un sens. En effet,

i) S'il existe $R' \in L(E, \prod_k \hat{H}_k)$ tel que $Q_G^*(S) = q_{3*}(R')$, on a $q_{3*}(R - R') = 0$ et $R = R'$ car q_{3*} est injectif.

ii) S'il existe $S' \in L(G, \prod_k \hat{H}_k)$ tel que $I_F^*(T) = i_{2*}(S')$, l'application $S - S'$ appartient à $\ker(i_{2*}) = \mathrm{im}(q_{2*})$ et il existe D appartenant à $L(E, \prod_k \hat{H}_k)$ tel que $S - S' = q_{2*}(D)$.

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} Q_G^* \circ q_{2*}(D) & = & q_{3*} \circ Q_E^*(D) \\ & = & Q_G^*(S - S') \\ & = & q_{3*}(R - R'), \end{array}$$

si $Q_G^*(S') = R'$ et comme q_{3*} est injectif, $R - R' = Q_E^*(D)$.

L'application $R - R'$ appartient donc à $\mathrm{im}(Q_E^*) = \mathcal{B}(E, \mathcal{H})$ et A est bien défini.

e) $\mathrm{im}(i_*) = \ker(A)$. Démontrons d'abord l'inclusion $\subset$. Si l'application T appartient à $L(G, H)$, alors

$$(A \circ i_*)(T) = \mathcal{B}(E, \mathcal{H}).$$

En effet, les applications $S := I \circ T \in L(G, \prod_k \hat{H}_k)$ et $R := 0 \in L(E, \prod_k \hat{H}_k)$ vérifient $I \circ T \circ i = S \circ i$ d'une part et $Q \circ S = 0 = R \circ q$ d'autre part. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} (A \circ i_*)(T) & = & R + \mathcal{B}(E, \mathcal{H}) \\ & = & \mathcal{B}(E, \mathcal{H}). \end{array}$$

Etablissons l'autre inclusion. Si T est une application appartenant à $L(F, H)$ telle que $A(T) = \mathcal{B}(E, \mathcal{H})$, alors il existe R appartenant à $L(E, \prod_k \hat{H}_k)$ tel que $Q \circ S = R \circ q$, avec $S \in L(G, \prod_k \hat{H}_k)$ vérifiant $I \circ T = S \circ i$ et il existe une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\prod_k L(E, \hat{H}_k)$ telle que

$$R_k = \rho^H_{k+1,k} \circ B_{k+1} - B_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $S \circ i = I \circ T$, l'opérateur $S \circ i$ est à valeurs dans $\mathrm{im}(I)$ et l'application

$$\tilde{I} : H \to \mathrm{im}(I) \qquad h \mapsto I(h)$$

est un isomorphisme. On en déduit que

$$\tilde{I}^{-1} \circ (S \circ i) = \tilde{I}^{-1} \circ I \circ T = T.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$R_k \circ q = \rho^H_{k+1,k} \circ B_{k+1} \circ q - B_k \circ q$$

et la suite $\mathcal{R} := (B_k \circ q)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à $L(G, \prod_k \hat{H}_k)$ et satisfait à $\mathcal{R} \circ i = 0$ et $Q \circ \mathcal{R} = R \circ q$. Donc, il vient

$$\begin{array}{rcl} I \circ T & = & S \circ i \\ & = & S \circ i - \mathcal{R} \circ i \\ & = & (S - \mathcal{R}) \circ i \end{array}$$

et puisque $Q \circ (S - \mathcal{R}) = 0$, l'application $S - \mathcal{R}$ est à valeurs dans $im(I)$. Par conséquent, l'opérateur $\tilde{I}^{-1} \circ (S - \mathcal{R})$ appartient à $L(G, H)$ et vérifie

$$(\tilde{I}^{-1} \circ (S - \mathcal{R})) \circ i = \tilde{I}^{-1} \circ I \circ T = T,$$

ce qui suffit.

f) $\mathrm{im}(A) = \ker(B)$. Démontrons l'inclusion $\subset$. Si l'application T appartient à $L(F,H)$, alors $B \circ A(T) = \mathcal{B}(G,\mathcal{H})$. En effet, il existe une application S appartenant à $L(G,\prod_k \hat{H}_k)$ telle que $I \circ T = S \circ i$ et une application R appartenant à $L(E,\prod_k \hat{H}_k)$ telle que $Q \circ S = R \circ q$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} B \circ A(T) &= B(R + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})) \\ &= (R \circ q) + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) \\ &= (Q \circ S) + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) \\ &= (\rho^H_{k+1,k} \circ S_{k+1} - S_k)_{k \in \mathbb{N}} + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) \\ &= \mathcal{B}(G,\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Etablissons l'autre inclusion. Si l'application T appartient à $\mathrm{Ext}(E,H)$, alors $T = \mathcal{T} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})$ avec $\mathcal{T} \in L(E,\prod_k \hat{H}_k)$ et si T vérifie

$$B(T) = (\mathcal{T} \circ q) + \mathcal{B}(G,\mathcal{H}) = \mathcal{B}(G,\mathcal{H}),$$

alors

$$\begin{aligned} j_G(q_{*3}(\mathcal{T})) &= j_G(\mathcal{T} \circ q) \\ &= B(j_E(\mathcal{T})) \\ &= B(\mathcal{T} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})) \\ &= B(T) \\ &= \mathcal{B}(G,\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $q_{*3}(\mathcal{T})$ appartient à $\ker(j_G) = \mathrm{im}(Q^*_G)$ et il existe un opérateur R_0 appartenant à $L(G,\prod_k \hat{H}_k)$ tel que $Q^*_G(R_0) = q_{*3}(\mathcal{T})$. On en déduit que

$$\begin{aligned} Q^*_F(i_{*2}(R_0)) &= (i_{*3} \circ Q^*_G)(R_0) \\ &= (i_{*3} \circ q_{*3})(\mathcal{T}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'application $i_{*2}(R_0)$ appartient à $\ker(Q^*_F) = \mathrm{im}(I^*_F)$ et il existe un opérateur T_0 appartenant à $L(F,H)$ tel que $I^*_F(T_0) = i_{*2}(R_0)$. On a $A(T_0) = T$, car $I^*_F(T_0) = i_{*2}(R_0)$ d'une part, $Q^*_G(R_0) = q_{*3}(\mathcal{T})$ d'autre part, et $T = \mathcal{T} + \mathcal{B}(E,\mathcal{H})$, ce qui suffit.

Vu les points a),b),c),d),e),f), la conclusion s'ensuit aussitôt. ■

Bibliographie

[1] J. Bonet, Séminaire Valence, janvier 1988.

[2] J. Bonet, P. Perez Carreras,*Barrelled locally convex spaces*, Mathematics Studies, North Holland, 1987.

[3] H.G. Garnir, M. De Wilde, J. Schmets, *Analyse fonctionnelle*, Tome I, Birkaüser Verlag Besel und Stuttgart, 1968.

[4] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York Tokyo, 1983.

[5] H. Jarchow, *Locally convex spaces*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[6] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1969.

[7] G. Köthe, *Topological vector spaces II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1979.

[8] J.-L. Lieutenant, *Théorie cohomologique des faisceaux*, Séminaire ULg, 1979–1980.

[9] R. Meise, B.A. Taylor, D.Vogt, Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse, in : *Anales de l'Institut de Fourier*, Tome 40, n° 3, 1990.

[10] A. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York,1972.

[11] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[12] J. Schmets, *Analyse fonctionnelle*, Notes du cours de la première licence en sciences mathématiques, ULg, 1992.

[13] J. Schmets, *Analyse fonctionnelle*, Notes du cours de licence en sciences mathématiques, ULg, 1993–1994.

[14] D. Vogt, *On the functor Ext for Frechet spaces*, Studia Mathematica 85,1987, pp.163,197.

[15] D. Vogt, Some results on continuous linear maps between Frechet spaces, in : *Functional analysis : surveys and recent results III*, K.-D. Bierstedt, B. Fuchssteiner, editors, North-Holland Mathematics Studies, n° 90, 1984.

Table des Matières