

Exercice 9

Fabienne Prosmans

Année 2020–2021

Introduction

On peut estimer que le nombre de leçons à consacrer à ces deux fascicules d’algèbre sera à peu près le même que celui accordé précédemment à l’algèbre et à l’arithmétique ensemble.

Le mot *abscisse* paraît provenir des Italiens CAVALIERI (1598–1647) en 1635 et ANGELI (1623–1697) en 1654. Le mot *coordonnée* est dû (1694) à LEIBNIZ (1646–1716).

1 A propos des équations du second degré

Comparer les racines de l’équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{*}$$

à un nombre α donné, sans calculer les racines.

Solution :

Si x_1 et x_2 sont les racines de l’équation (*) et si nous posons

$$y_1 = x_1 - \alpha, \quad y_2 = x_2 - \alpha,$$

alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} x_i = \alpha &\Leftrightarrow y_i = 0 \\ x_i < \alpha &\Leftrightarrow y_i < 0 \quad (i = 1 \text{ ou } i = 2) \\ x_i > \alpha &\Leftrightarrow y_i > 0 \end{aligned}$$

Pour connaître la situation de x_1 et x_2 par rapport au nombre α , il suffit donc d’étudier les signes de y_1 et y_2 . Mais y_1 et y_2 sont les racines de l’équation

$$y^2 - S_1y + P_1 = 0$$

où

$$\begin{aligned}S_1 &= (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) \\ &= S - 2\alpha, \\ P_1 &= (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \\ &= P - S\alpha + \alpha^2 \\ &= \frac{1}{a}(a\alpha^2 + b\alpha + c), \\ D_1 &= S_1^2 - 4P_1 = (S - 2\alpha)^2 - 4(P - S\alpha + \alpha^2) \\ &= S^2 - 4P \\ &= \frac{D}{a^2}\end{aligned}$$

Nous constatons que les expressions suivantes ont le même signe :

$$\begin{aligned}D_1 \text{ et } D, \\ P_1 \text{ et } a \cdot f(\alpha), \\ S_1 \text{ et } \frac{1}{2}S - \alpha,\end{aligned}$$

avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, et donc

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c.$$

Donc pour comparer les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ à un nombre donné α , il faut d'abord étudier les signes de

$$D, \quad a \cdot f(\alpha), \quad \frac{1}{2}S - \alpha.$$

2 Un système différentiel

On considère les deux fonctions qui, pour une valeur t de la variable réelle, prennent les valeurs réelles x et y et qui vérifient

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x - y = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y - x = 0. \end{cases}$$

Montrer que le régime décrit par ce système différentiel est amorti.

Solution. On met ce système sous forme canonique en prenant comme nouvelles inconnues $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$, soit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \\ \frac{du}{dt} = -2x - u + y, \\ \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = x - y - v. \end{cases}$$

Et on calcule le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ (où I est la matrice carrée unité d'ordre 4), soit

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2. \end{aligned}$$

3 Quelques exemples d'analyse

3.1 Quelques ensembles

Définition 3.1.1. Si $A \subset E$, l'ensemble $G|_A$ défini par

$$G|_A = G \cap (A \times F),$$

est évidemment encore un graphe de E dans F qui s'appelle la *restriction* de G à A . Son image $\text{im } G|_A$ s'appelle l'*image* (directe) de A par G et se note $G(A)$. Si $B \subset F$, on appelle *image réciproque* de B par G l'image $G^{-1}(B)$ de B par le graphe réciproque G^{-1} . Par conséquent,

$$\begin{aligned} G(A) &= \{b \in F : (\exists a \in A) : (a, b) \in G\} \\ G^{-1}(B) &= \{a \in E : (\exists b \in B) : (b, a) \in G^{-1}\} \\ &= \{a \in E : (\exists b \in B) : (a, b) \in G\}. \end{aligned}$$

En particulier, si $A = \{a\}$ où $a \in E$, $G(\{a\})$ est appelée l'*image* de a par G . On notera que $G(\{a\}) \neq \emptyset$ si et seulement si $a \in \text{dom } G$.

3.2 Quelques limites

Exemple 3.2.1. Reprenons l'exemple de la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x_1^2 + x_2$. Si $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ est donné, alors la fonction $x_1 \mapsto x_1^2 + a_2$ est dérivable en a_1 et y a pour dérivée $2a_1$ et la fonction $x_2 \mapsto a_1^2 + x_2$ est dérivable en a_2 et y a pour dérivée 1. En conséquence,

$$D_1 f(a) = 2a_1, \quad D_2 f(a) = 1.$$

Soit L l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$L(h) = \sum_{k=1}^2 h_k D_k f(a) = 2a_1 h_1 + h_2. \quad (1)$$

On a grâce à la relation (1)

$$f(a+h) - f(a) - L(h) = (a_1 + h_1)^2 + a_2 - a_1^2 - a_2 - 2a_1 h_1 - h_2 = h_1^2,$$

et dès lors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{|h|_2} = 0.$$

3.3 Quelques séries

Proposition 3.3.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \cos x + i \sin x.$$

Démonstration. On a, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $i^{2k} = (-1)^k$ et que l'on peut permuter l'ordre des termes dans les séries absolument convergentes,

$$\cos x + i \sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

□

Grâce à la proposition 3.3.1, on est conduit à définir l'application *exponentielle imaginaire* de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par

$$\exp ix = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}.$$

3.4 Quelques intégrales

Théorème 3.4.1 (Cauchy). Soit $b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par

$$f(x) = (b - x)^{-p},$$

où $p > 0$. La fonction f est primitivable sur $] -\infty, b[$ et l'une de ses primitives est donnée par la fonction F définie par $F(x) = (p - 1)^{-1}(b - x)^{1-p}$ si $p \neq 1$ et $F(x) = -\ln(b - x)$ si $p = 1$. En conséquence, si $a < b$ est donné, f est intégrable sur $[a, c]$ quel que soit $c \in]a, b[$ et

$$\int_a^c f = (p - 1)^{-1}[(b - c)^{1-p} - (b - a)^{1-p}]$$

si $p \neq 1$ et

$$\int_a^c = \ln(b - a) - \ln(b - c)$$

si $p = 1$. Le théorème de Hake montre alors que f est est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $p < 1$, auquel cas

$$\int_a^b (b - x)^{-p} dx = (1 - p)^{-1}(b - a)^{1-p}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [3, 11].

4 Deux tableaux

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	0	1	2	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$					
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	+					
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+	+					
$f(x)$	\nearrow (0	\nearrow (max 2	\searrow (P.I. 0	\searrow)	min -2	\nearrow)	0	\nearrow)	$+\infty$

Time	Stock price	Hedge strategy	Shares purchased	Cost of shares (10^3)	Cumulative cost (10^3)	int. cost
0	49	0	0	0	0	0
1	49.75	0	0	0	0	0
2	52	1	100,000	5,200	5,200	5
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
20	48.12	0	0	0	514.2	

5 Quelques alignements

Soit (c_n) , $n \geq 0$, la suite récurrente définie de la façon suivante :

- on pose $c_0 = a$;
- pour tout $n \geq 0$ (et c_n étant déjà définie) on note p_n l'unique polynôme de degré 1 tel que $p_n(c_n) = f(c_n)$, $p_n(b) = f(b)$; et on définit c_{n+1} par $p_n(c_{n+1}) = 0$.

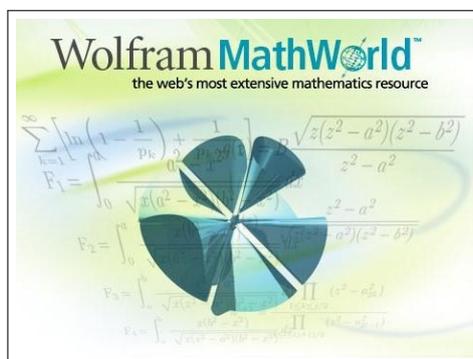
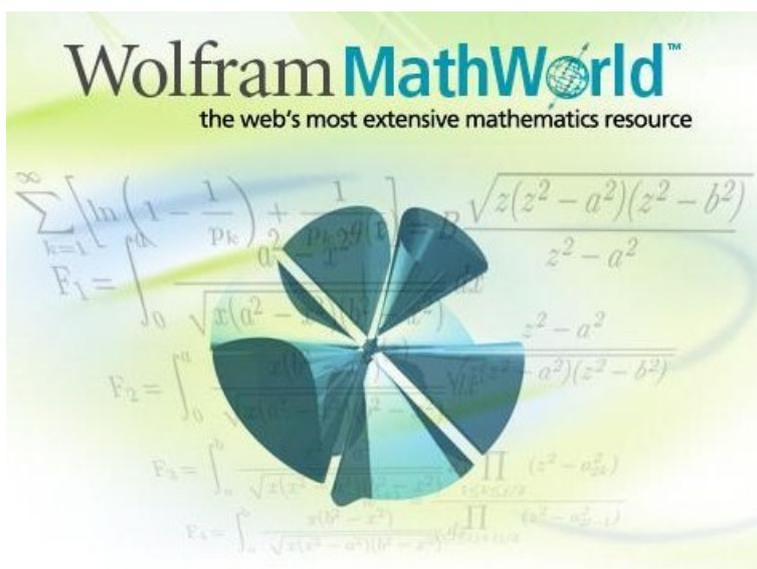
(α) Mettre explicitement cette récurrence sous la forme $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.

(β) Démontrer que (c_n) est une suite strictement croissante contenue dans l'intervalle $[a, c]$.

(γ) Démontrer que la suite (c_n) converge vers c , et que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|c_n - c| \leq \frac{f(c_n)}{m_1}.$$

6 Quelques images



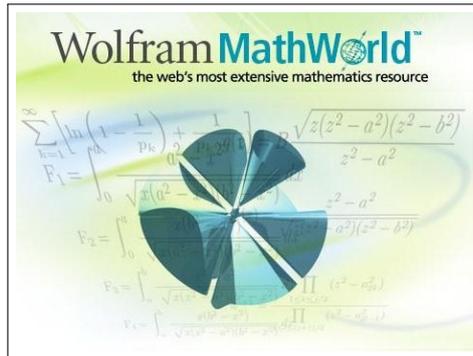
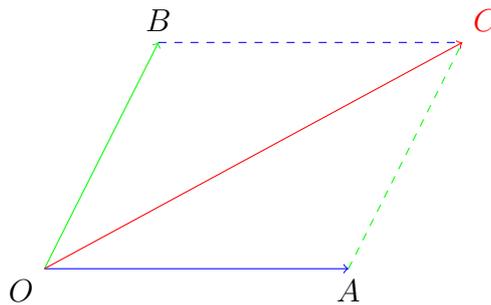


FIGURE 1 – MathWorld

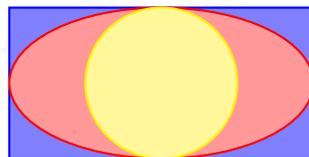
L'image 1 est le logo de l'encyclopédie MathWorld.

7 Des figures avec TikZ

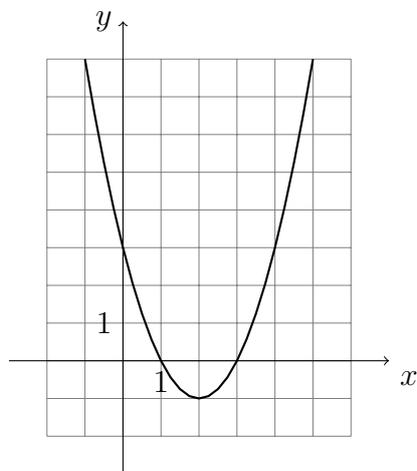
7.1 La somme de deux vecteurs



7.2 Des figures imbriquées



7.3 Le graphique de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$



7.4 Trois fonctions

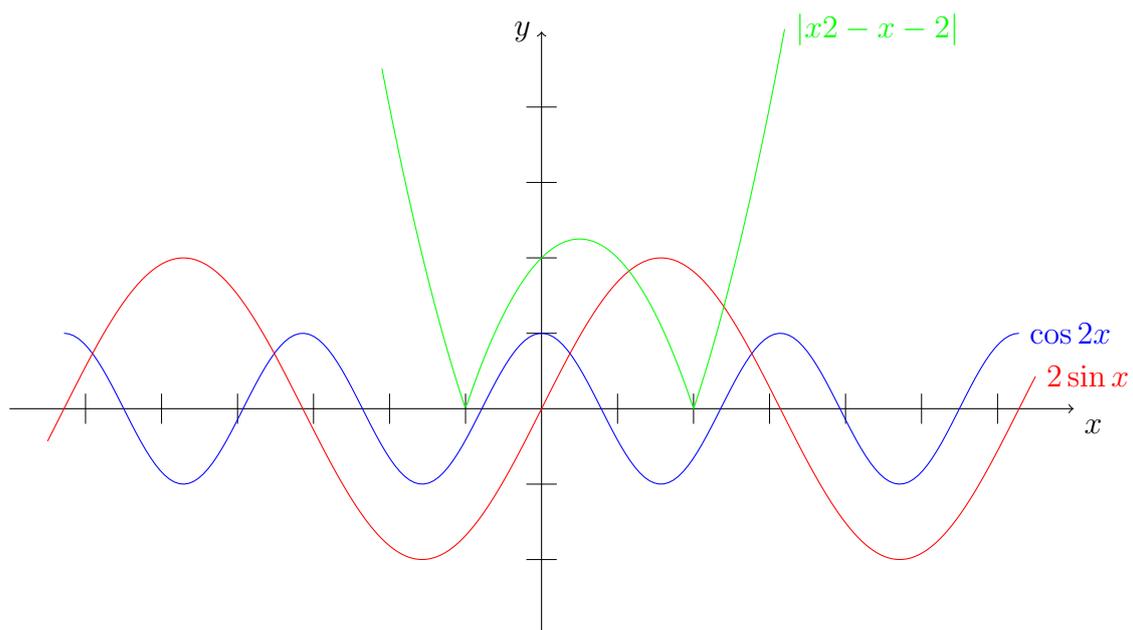


Table des figures

1	MathWorld	7
---	---------------------	---

Index

abscisse, 1

coordonnée, 1

exponentielle imaginaire, 4

Références

- [1] ASTIER, Roger. *Méthode Box Jenkins appliquée aux séries de transport*. Thèse de doctorat de 3^e cycle, spécialité : statistiques. Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay. 1982. 176 p.
- [2] BECKENBACH, Edwin F., éd. *Modern Mathematics for the Engineer*. New York : McGraw-Hill, 1956. XX, 514 p. (University of California Engineering Extension Series).
- [3] BELLMAN, Richard. *Methods of Nonlinear Analysis*. New York : Academic Press, 1970-1973. (2 vol.).
- [4] BELLMAN, Richard. *Methods of Nonlinear Analysis*. Vol. 2. New York : Academic Press, 1973. XVII, 261 p. (Mathematics in Science and Engineering; 61-II). ISBN 0-12-084902-X.
- [5] CASSE, Louis R. A. et Walter D. WALLIS, éd. *Combinatorial Mathematics IV : Proceedings of the Fourth Australian Conference (University of Adelaïde, 27-29 août 1975)*. Berlin : Springer-Verlag, 1976. 249 p. (Lecture Notes in Mathematics; 560). ISBN 3-540-08053-8.
- [6] DONATINI, Pietro et Patrizio FROSINI. Natural pseudodistances between closed surfaces. *Journal of the European Mathematical Society*. 2007, 9 (2), p. 331-353.
- [7] GASQUET, Claude et Patrick WITOMSKI. *Analyse de Fourier et applications : Filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Paris : Masson, 1990. XI, 354 p. ISBN 2-225-82018-X.
- [8] GODSIL, C. et B. MCKAY. Some computational results on the spectra of graphs. In : CASSE, Louis R. A. et Walter D. WALLIS, éd. *Combinatorial Mathematics IV : Proceedings of the Fourth Australian Conference (University of Adelaïde, 27-29 août 1975)*, Berlin : Springer-Verlag, 1976, (Lecture Notes in Mathematics; 560), p. 73-92.
- [9] GREEN, John W. Exterior ballistics. In : BECKENBACH, Edwin F., éd., *Modern Mathematics for the Engineer*, New York : McGraw-Hill, 1956, (University of California Engineering Extension Series), chap. I. 3, p. 36-58.
- [10] LAMPRET, Vito. Estimating the sequence of real binomial coefficients. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. 2006, 7 (5), Art. 166. Disponible via l'URL <http://jipam.vu.edu.au/images/061_06_JIPAM/061_06.pdf> (consulté le 5 janvier 2007).
- [11] MEISE, Reinhold et Dietmar VOGT. *Introduction to Functional Analysis*. Oxford : Clarendon Press, 1997. X, 437 p. (Oxford Graduate Texts in Mathematics; 2). Trad. de l'allemand par M. S. RAMANUJAN. ISBN 0-19-851485-9.
- [12] PHAM, Daniel et Monique GHINEA. *Techniques du calcul matriciel*. Paris : Dunod, 1962. XIII, 279 p. (Collection Universitaire de Mathématique; 10).

- [13] SÁNDOR, József. *Geometric Theorems, Diophantine Equations, and Arithmetic Functions*. Rehoboth (NM) : American Research Press, 2002. Disponible via l'URL <<http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/JozsefSandor2.pdf>> (consulté le 5 janvier 2007). ISBN 1-931233-51-9.
- [14] SCARBOROUGH, James B. *Numerical Mathematical Analysis*. 5^e éd. Baltimore : Johns Hopkins Press, 1962. XXI, 594 p.
- [15] SMIRNOV, V. I. *A Course of Higher Mathematics*. Vol. 1 : *Elementary calculus*. Oxford : Pergamon Press, 1964. XIII, 546 p. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics; 57). Trad. du russe par D. E. BROWN et I. N. SNEDDON.
- [16] USPENSKY, J. V. *Introduction to Mathematical Probability*. New York : McGraw-Hill, 1937. IX, 411 p.
- [17] WEISSTEIN, Eric. *Stirling Number of the First Kind*. Disponible via l'URL <<http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheFirstKind.html>> (consulté le 16 mars 2009).

Table des matières

1	A propos des équations du second degré	1
2	Un système différentiel	2
3	Quelques exemples d'analyse	3
3.1	Quelques ensembles	3
3.2	Quelques limites	4
3.3	Quelques séries	4
3.4	Quelques intégrales	5
4	Deux tableaux	5
5	Quelques alignements	6
6	Quelques images	6
7	Des figures avec TikZ	7
7.1	La somme de deux vecteurs	7
7.2	Des figures imbriquées	7
7.3	Le graphique de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$	8
7.4	Trois fonctions	8