UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences
Institut de Mathématique

ANALYSE FONCTIONNELLE

Notes du cours de la licence
en sciences mathématiques

Jean SCHMETS

Année académique 2004–2005

Introduction

Ces notes de cours constituent une introduction à l'étude des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés ou espaces vectoriels à semi-normes séparés, appelés plus simplement dans les notes espaces localement convexes ou espaces à semi-normes. Elles diffèrent des notes précédentes par quelques corrections et quelques ajouts.

J'ai choisi de privilégier tout autant les points de vue topologique et semi-normé. En théorie, on tend bien souvent à privilégier l'aspect "topologie localement convexe" et, en pratique, celui de "système de semi-normes". Je crois qu'il est bon d'habituer dès le départ l'étudiant à ces deux méthodes équivalentes et complémentaires.

En un cours de 30 heures agrémenté de 10 heures de répétitions, je ne peux envisager que les premiers développements de cette théorie et donner l'envie d'aller plus loin. Si ce but est réalisé, le lecteur trouvera dans la bibliographie de quoi alimenter son appétit. Il pourra ensuite ou concommitamment consulter la littérature et passer aux applications de cette théorie. Cela comblera mes espoirs.

J. Schmets

Chapitre 1

Quelques compléments sur les espaces vectoriels

Convention. Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires et est toujours égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$. En vue d'alléger le texte, nous disons espace vectoriel à la place d'espace $\mathbb{K}$-vectoriel, opérateur linéaire à la place d'opérateur $\mathbb{K}$-linéaire, ... chaque fois que la propriété est valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Espaces vectoriels

Tout espace $\mathbb{C}$-vectoriel E est aussi un espace $\mathbb{R}$-vectoriel, il est alors appelé *espace* $\mathbb{R}$*-vectoriel sous-jacent à* E et noté $E_{\mathbb{R}}$. La réciproque est bien entendu fausse.

Un *sous-espace vectoriel* de l'espace vectoriel E est une partie non vide L de E, qui est un espace vectoriel pour les opérations $+$ et $\cdot$ induites par E. Il suffit bien sûr d'avoir $L + L \subset L$ et $cL \subset L$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.

L'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E:

a) contient $\{0\}$ comme plus petit élément pour l'inclusion;

b) contient E comme plus grand élément pour l'inclusion;

c) est fermé pour l'intersection.

Dès lors, on peut introduire la notion d'*enveloppe linéaire* pour toute partie non vide A de E comme étant l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A; il est noté $\operatorname{span}(A)$. On a tôt fait de vérifier l'égalité

$$\operatorname{span}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} c_j e_j : J \in \mathbb{N}_0; c_1, \ldots, c_J \in \mathbb{K}; e_1, \ldots, e_J \in A \right\}.$$

Une *base de Hamel* de l'espace vectoriel E est une partie B de E dont les éléments sont linéairement indépendants et dont l'enveloppe linéaire est égale à E.

Théorème 1.1.1 *Toute partie A de l'espace vectoriel E, dont les éléments sont linéairement indépendants, est incluse dans une base de Hamel de E.*

En particulier, tout espace vectoriel admet une base de Hamel.

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E, qui contiennent A et dont les éléments sont linéairements indépendants. On vérifie aussitôt que $(\mathcal{A}, \subset)$ est un espace ordonné dont toute partie totalement ordonnée admet un majorant (à savoir la réunion de ses éléments). Vu le lemme de Zorn, $\mathcal{A}$ admet un élément maximal qui, on le vérifie tout aussitôt, est une base de Hamel de E.

Le cas particulier est immédiat.∎

Remarque. Le théorème précédent est un théorème existentiel: il affirme que tout espace vectoriel admet une base de Hamel. Ce n'est pas un théorème constructif: il ne procure aucun moyen de construire une base de Hamel.□

Si E est un espace vectoriel admettant une base de Hamel finie, on sait que toutes ses bases de Hamel ont la même cardinalité: c'est la dimension de E, notée $\dim(E)$, et on dit que E est un espace vectoriel de *dimension finie*. Si l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de *dimension infinie* et on pose $\dim(E) = +\infty$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}$, déterminer l'enveloppe linéaire des ensembles $\{0\}$ et $\{r\}$ avec $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.□

Exercice. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'enveloppe linéaire de $\{\epsilon_1\}$ et de $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.□

Exercice. Dans $\mathbb{C}$, déterminer l'enveloppe linéaire de $\{0\}$ et de $\{i\}$.□

Exercice. Etablir que $\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Suggestion. Les monômes ne sont-ils pas des éléments linéairement indépendants de cet espace? Les fonctions e^{cx} avec $c \in \mathbb{K}$ ne sont-elles pas linéairement indépendantes dans cet espace?□

Exercice. Etablir que $\mathrm{D}^\infty(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie.□

Proposition 1.1.2 *Un espace vectoriel de dimension finie n'est jamais union dénombrable de sous-espaces vectoriels propres.*

Preuve. Si ce n'est pas le cas, il existe un premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels L_m tels que $\dim(L_m) < n$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Il est clair qu'on doit avoir $n > 1$. De plus, on vérifie aussitôt qu'on peut supposer avoir $L_j \not\subset L_k$ pour tous j, $k \in \mathbb{N}_0$ distincts. On a donc $L_1 \neq L_1 \cap L_m$ pour tout entier $m \geq 2$. Comme $\dim(L_1) < n$, L_1 n'est pas égal à $\cup_{m=2}^{\infty}(L_1 \cap L_m)$; soit l_1 un élément de $L_1 \setminus \cup_{m=2}^{\infty}(L_1 \cap L_m)$. Cela étant, soit e un élément de $\mathbb{R}^n \setminus L_1$. L'ensemble $\{\, e + rl_1 : r \in \mathbb{R} \,\}$ étant non dénombrable, il doit exister $m \in \mathbb{N}_0$ et deux nombres réels distincts s, t tels que $e + rl_1$ et $e + sl_1$ appartiennent à L_m. Il s'ensuit d'une part que $l_1 \in L_m$, ce qui implique $m = 1$, et d'autre part que $e \in L_m$ donc $m \neq 1$. D'où une contradiction.∎

1.2 Exemples d'espaces vectoriels

En plus des espaces vectoriels déjà rencontrés précédemment tels que

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n,\\ &\mathrm{C}_0(A), \mathrm{C}_p([a,b]), \mathrm{C}_p(\Omega), \mathrm{D}^p(\Omega),\\ &\mathrm{L}^p(A), \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(A), \mathrm{L}^p_{\mathrm{comp}}(\Omega), \ldots\end{aligned}$$

il convient d'introduire quelques espaces de suites.

Etant donné des suites $\mathbf{x} = (x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $\mathbf{y} = (y_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{K}$ et un élément c de $\mathbb{K}$, on peut introduire les suites

$$c \cdot \mathbf{x} = (cx_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_m + y_m)_{m\in\mathbb{N}_0}.$$

On a tôt fait de vérifier que les opérations $+$ et $\cdot$ ainsi définies sur l'ensemble ω des suites de $\mathbb{K}$ munissent ω d'une structure d'espace vectoriel.

Exercice. Quelle est l'origine de ω?□

Différentes parties de ω sont très intéressantes:

1) pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace ℓ^p est l'ensemble des suites $\mathbf{x}$ telles que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p$ converge,

2) l'espace ℓ^∞ est l'ensemble des suites bornées,

3) l'espace c est l'ensemble des suites convergentes,

4) l'espace c_0 est l'ensemble des suites qui convergent vers 0,

5) l'espace ϕ est l'ensemble des suites finies de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire des suites n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Théorème 1.2.1 *Les espaces ℓ^∞, c, c_0 et ϕ sont vectoriels.*∎

Pour étudier les espaces ℓ^p que nous venons d'introduire, il convient de recourir à quelques inégalités célèbres.

Inégalité de Minkowski: pour tous $p \in [1, +\infty[$ et $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \ell^p$, on a

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m + y_m)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^p\right)^{1/p}.$$

Inégalité de Hőlder: pour tous $p \in]1, +\infty[$, $\mathbf{x} \in \ell^p$ et $\mathbf{y} \in \ell^q$ avec $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x_m y_m| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q\right)^{1/q}.$$

Inégalité de Jensen: pour tous p, $q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$ et tout $\mathbf{x} \in \ell^p$, on a $\mathbf{x} \in \ell^q$ et

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{1/p}.$$

(Ces inégalités sont établies par exemple dans [16], cf. paragraphe relatif au logarithme népérien.)

Théorème 1.2.2 *Pour tout $p \in [1 + \infty[$, ℓ^p est un espace vectoriel.*
De plus, pour tous p, $q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$, on a

$$\varphi \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset \omega.$$

Preuve. La première partie résulte aussitôt de l'inégalité de Minkowski.
La deuxième partie est claire, l'inégalité de Jensen procurant les inclusions $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q$ pour tous p, $q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$.∎

1.3 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels (ceci sous-entend clairement que E et F sont des espaces $\mathbb{K}$-vectoriels pour le même corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Un *opérateur linéaire de E dans F* est une application $T\colon E \to F$ telle que

$$\begin{cases} T(ce) = cTe, & \forall c \in \mathbb{K}, \\ T(e_1 + e_2) = Te_1 + Te_2, \end{cases}$$

donc telle que $T(\sum_{j=1}^{J} c_j e_j) = \sum_{j=1}^{J} c_j T e_j$ pour toute combinaison linéaire d'éléments de E.

Le *noyau* de T, noté $\ker(T)$, est l'ensemble $T^{-1}\{0\}$ des éléments de E annulés par T. C'est un sous-espace vectoriel de E.

L'*image* de T, notée $\mathrm{im}(T)$, est l'ensemble TE. C'est un sous-espace vectoriel de F.

Bien sûr, l'opérateur linéaire $T\colon E \to F$ est injectif si et seulement si l'équation $Tx = 0$ admet 0 pour seule solution, c'est-à-dire si et seulement si $\ker(T) = \{0\}$.

La détermination de la surjectivité (resp. l'injectivité) d'un opérateur linéaire $T\colon E \to F$ est cruciale lors de la résolution d'une équation du type $Tx = f$: elle détermine l'existence (resp. l'unicité) d'une solution.

Exemples. La structure matricielle des opérateurs linéaires $T\colon E \to F$ lorsque les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie est bien connue. Mais nous avons déjà rencontré d'autres opérateurs linéaires tels que:

(1) $L(\mathrm{D})\colon \mathrm{C}_p(\Omega) \to \mathrm{C}_0(\Omega)$, où $L(\mathrm{D})$ est un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants d'ordre $\leq p$,

(2) $\int_A \cdot\, dx\colon \mathrm{L}^1(A) \to \mathbb{C}$,

(3) $f \star \cdot\colon \mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p$, pour tous $f \in \mathrm{L}^1$ et $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$,

(4) $f \star \cdot\colon \mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^\infty$, pour tout $f \in \mathrm{L}^2$,

(5) $\mathcal{F}^{\pm}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$,

(6) $\mathbb{F}^{\pm}\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$,

(7) $T\colon \mathrm{C}_0([a,b]) \to \omega;\quad f \mapsto (\int_a^b x^m f(x)\, dx)_{m\in\mathbb{N}}$, opérateur lié au problème des moments (cf. [17]).□

Théorème 1.3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Tout opérateur linéaire T d'un sous-espace vectoriel L de E dans F admet un prolongement linéaire de E dans F.*

Preuve. Soit B une base de Hamel de L. Nous savons qu'il existe une base de Hamel C de E, qui contient B. Tout élément e de E admet alors une décomposition unique $e = e_1 + e_2$ avec $e_1 \in \mathrm{span}(B) = L$ et $e_2 \in \mathrm{span}(C \setminus B)$. Cela étant, on vérifie de suite que l'application

$$S\colon E \to F;\quad e \mapsto Te_1$$

est un prolongement linéaire de T.∎

On vérifie de suite que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs linéaires de E dans F est un espace vectoriel si on le munit de

a) la multiplication externe $\times$ définie par $(c \times T)\cdot = c(T\cdot)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$,

b) l'addition $+$ définie par $(T_1 + T_2)\cdot = T_1 \cdot + T_2\cdot$.

Dans le cas $E = F$, on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Exercice. Quelle est l'origine de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$?□

Théorème 1.3.2 *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre.*▮

Exercice. Etablir que l'opérateur linéaire $T \colon E \to F$

1) est un monomorphisme (c'est-à-dire que $(S \in \mathcal{L}(G, E), TS = 0) \Rightarrow S = 0)$ si et seulement si T est injectif,

2) est un épimorphisme (c'est-à-dire que $(S \in \mathcal{L}(F, G), ST = 0) \Rightarrow S = 0)$ si et seulement si T est surjectif,

3) admet un inverse linéaire à droite ($\exists S \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $TS = \mathrm{id}_F$) si et seulement si T est surjectif,

4) admet un inverse linéaire à gauche ($\exists S \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $ST = \mathrm{id}_E$) si et seulement si T est injectif.□

Exercice. Etablir que
1) $E = \{\, f \in \mathrm{C}_2([a, b] : f(a) = f(b) = 0 \,\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}_2([a, b])$,
2) $T \colon E \to \mathrm{C}_0([a, b])$; $\quad f \mapsto \mathrm{D}^2 f$ est un isomorphisme dont l'inverse est un opérateur à noyau.

Suggestion pour 2): T est injectif car $Tf = 0$ implique $f(x) = c_0 + c_1 x$, or on doit avoir $f(a) = f(b) = 0$; T est surjectif car $Tu = f$ a pour solution

$$u(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(z)\, dz - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b dy \int_a^y f(z)\, dz;$$

enfin T^{-1} est un opérateur à noyau car une permutation de l'ordre d'intégration dans la valeur de $u(x)$ conduit à

$$u(x) = \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy$$

avec

$$k(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x-b)(y-a)}{b-a} & \text{si} \quad a \leq y \leq x \\ \dfrac{(x-a)(y-b)}{b-a} & \text{si} \quad x \leq y \leq b. \end{cases}$$

Bien remarquer que le noyau k est continu sur $[a, b] \times [a, b]$ et symétrique (c'est-à-dire tel que $k(x, y) = k(y, x)$).□

1.4 Produits et sommes directes finies

Théorème 1.4.1 *Si $E_1, \ldots, E_J$ sont des espaces vectoriels en nombre fini, les opérations*

$$\begin{aligned} + \quad : \quad & \left(\prod_{j=1}^J E_j\right) \times \left(\prod_{k=1}^J E_k\right) \to \prod_{j=1}^J E_j; \\ & ((e_1, \ldots, e_J), (f_1, \ldots, f_J)) \mapsto (e_1 + f_1, \ldots, e_J + f_J) \\ \cdot \quad : \quad & \mathbb{K} \times \prod_{j=1}^J E_j \to \prod_{j=1}^J E_j; \quad (c, e_1, \ldots, e_J) \mapsto (ce_1, \ldots, ce_J) \end{aligned}$$

munissent $\prod_{j=1}^J E_j$ d'une structure d'espace vectoriel.∎

Définition. Si $E_1, \ldots, E_J$ sont des espaces vectoriels en nombre fini, *l'espace produit fini* $\prod_{j=1}^J E_j$ est l'ensemble $\prod_{j=1}^J E_j$ muni de la structure vectorielle introduite dans le théorème précédent.

Soit E un espace vectoriel. Pour tous A, $B \subset E$ non vides et tout $c \in \mathbb{K}$, on pose

$$A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \} \quad \text{et} \quad cA = \{ ca : a \in A \} .$$

A partir de là, on peut évidemment introduire la notion de combinaison linéaire de parties non vides de E.

Remarque. Il convient de se méfier des réflexes acquis lors de l'utilisation des combinaisons linéaires de nombres. Ainsi l'égalité $A + B = C + B$ n'implique en général pas $A = C$. (Quand est-ce vrai?)□

Un cas particulier de l'addition reçoit une attention particulière: c'est celui de la somme de sous-espaces vectoriels. Bien sûr une telle somme est aussi un sous-espace vectoriel.

Théorème 1.4.2 *Si L et M sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E, alors*

$$T : L \times M \to L + M; \quad (l, m) \mapsto l + m$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels si et seulement si $L \cap M = \{0\}$.

Preuve. Il est clair que T est une surjection linéaire. Cela étant, d'une part, si T est injectif et si $e \in L \cap M$, on a $T(e, -e) = 0$ donc $e = 0$. D'autre part, si $L \cap M = \{0\}$ et $T(l, m) = 0$, il vient $l = -m \in L \cap M$ donc $l = m = 0$.∎

Définition. Si L et M sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E tels que $L \cap M = \{0\}$, alors $L + M$ est appelé *somme directe* de L et M, et est noté $L \oplus M$.

Théorème 1.4.3 *Soient L, M des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.*

a) *On a $E = L \oplus M$ si et seulement si tout $e \in E$ admet une décomposition unique $e = l + m$ avec $e \in E$ et $m \in M$.*

b) *Si $E = L \oplus M$, alors $\dim(E) = \dim(L) + \dim(M)$.*

Preuve. a) est direct et b) est connu pour E de dimension finie. Pour conclure, il suffit de constater que b) est trivial si L ou M est de dimension infinie.∎

Si $E = L \oplus M$, on dit que M est un *complément algébrique de L dans E* ou même plus simplement un *complément de L dans E* si aucune confusion n'est possible. Il est clair qu'alors L est aussi un complément de M dans E. On dit également que L et M sont *complémentaires dans E*.

Théorème 1.4.4 *Tout sous-espace vectoriel L de l'espace vectoriel E a un complément algébrique dans E.*

Preuve. Soit B une base de Hamel de L. Nous savons qu'il existe une base de Hamel C de E, qui contient B. On vérifie alors directement que $\operatorname{span}(C \setminus B)$ est un complément algébrique de L dans E.∎

Un *projecteur linéaire* de l'espace vectoriel E est un opérateur linéaire $P\colon E \to E$ tel que $P^2 = P$.

Théorème 1.4.5 *Soit E un espace vectoriel.*

a) *Si P est un projecteur linéaire de E, alors $\mathrm{id} - P$ est aussi un projecteur linéaire de E et on a $E = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P)$.*

b) *Si les sous-espaces vectoriels L, M de E sont complémentaires, alors l'opérateur P_L qui, à tout $e \in E$, associe l'élément unique $l_e \in L$ pour lequel il existe $m_e \in M$ tel que $e = l_e + m_e$, est un projecteur linéaire de E tel que $\operatorname{im}(P_L) = L$ et $\ker(P_L) = M$.*∎

Théorème 1.4.6 *Soient E, F des espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si M est un complément de $\ker(T)$ dans E, alors la restriction de T à M est un isomorphisme entre M et $\operatorname{im}(T)$. On a donc*

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)).∎$$

Exemple. Si $x_0 \in [a, b]$, il est clair que

$$P\colon \mathrm{C}_0([a, b]) \to \mathrm{C}_0([a, b]); \quad f \mapsto f(x_0)\chi_{[a,b]}$$

est un projecteur linéaire.□

Exemple. Etablir que l'opérateur "partie paire"

$$P\colon \mathrm{C}_0([-a,a]) \to \mathrm{C}_0([-a,a]); \quad (Pf)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

est un projecteur linéaire. Quel est son noyau? Quelle est son image?□

Exercice. Si $(L_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de sous-espaces vectoriels propres de même dimension $l \geq 1$ d'un espace vectoriel E de dimension finie n, alors il existe un sous-espace vectoriel M de E qui est complément algébrique dans E de chacun des L_m.

Suggestion. Soit N l'ensemble des entiers j pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel M de E tel que $\dim(M) = j$ et $M \cap L_m = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Vu la Proposition 1.1.2, il est clair que $1 \in N$. Notons k la borne supérieure de N — on a bien sûr $k \in N$ et $k < n$. Il existe donc un sous-espace vectoriel M de E tel que $\dim(M) = k$ et $M \cap L_m = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. En fait, on a aussi $M + L_m = E$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ car sinon il existe un sous-espace vectoriel propre N de E tel que $(M + L_m) \cap N = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ donc tel que $(M+N)\cap L_m = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, avec $M+N \neq M$, ce qui est contradictoire avec $k = \sup N$.□

1.5 Produits et sommes directes

Théorème 1.5.1 *Si* $\{\, E_j : j \in J \,\}$ *est un ensemble non vide d'espaces vectoriels, les opérations*

$$+ : \left(\prod_{j\in J} E_j\right) \times \left(\prod_{j\in J} E_j\right) \to \prod_{j\in J} E_j; \quad ((e_j)_{j\in J}, (f_j)_{j\in J}) \mapsto (e_j + f_j)_{j\in J}$$

et

$$. : \mathbb{K} \times \left(\prod_{j\in J} E_j\right); \quad (c, (e_j)_{j\in J}) \mapsto (ce_j)_{j\in J}$$

munissent l'espace $\prod_{j\in J} E_j$ *d'une structure d'espace vectoriel.*∎

Définition. Si $\{\, E_j : j \in J \,\}$ est un ensemble non vide d'espaces vectoriels, le *produit direct* $\prod_{j\in J} E_j$ est cet ensemble muni de la structure d'espace vectoriel introduite dans le théorème précédent.

Théorème 1.5.2 *Si* $\{\, E_j : j \in J \,\}$ *est un ensemble non vide d'espaces vectoriels,*

$$\left\{ (e_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} E_j : \#\{\, j \in J : e_j \neq \emptyset \,\} \in \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\prod_{j\in J} E_j$, appelé *somme directe des* E_j *pour* $j \in J$ et noté $\oplus_{j\in J} E_j$.∎

Définition. Etant donné un ensemble non vide $\{ E_j : j \in J \}$ d'espaces vectoriels, on introduit pour tout $k \in J$

a) *la k-ème projection canonique*

$$\pi_k \colon \prod_{j \in J} E_j \to E_k; \quad (e_j)_{j\in J} \mapsto e_k,$$

b) *la k-ème injection canonique*

$$\iota_k \colon E_k \to \oplus_{j\in J} E_j; \quad e \mapsto (e_j)_{j\in J} \text{ avec } e_j = \begin{cases} e & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie de suite qu'il s'agit d'opérateurs linéaires tels que

$$\pi_k \circ \iota_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ \mathrm{id}_{E_j} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

De plus, il est clair que, pour tout espace vectoriel F et tout ensemble $\{ T_j : j \in J \}$ d'opérateurs linéaires $T_j \in \mathcal{L}(F, E_j)$, il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(F, \prod_{j\in J} E_j)$ et un seul tel que

$$\pi_j \circ T = T_j, \quad \forall j \in J.$$

De même, pour tout espace linéaire G et tout ensemble $\{ R_j : j \in J \}$ d'opérateurs $R_j \in \mathcal{L}(E_j, G)$, il existe un et un seul opérateur $R \in \mathcal{L}(\oplus_{j\in J} E_j, G)$ tel que

$$R \circ \iota_j = R_j, \quad \forall j \in J.$$

1.6 Espace quotient

Proposition 1.6.1 *Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, la relation $\sim_L$ définie sur $E \times E$ par*

$$e \sim_L f \Longleftrightarrow e - f \in L$$

est une relation d'équivalence. Ses classes sont les ensembles $e+L$, notées également e_L, $e^{\sim_L}$ ou même $e^{\sim}$ si aucune confusion sur L n'est possible.

Les opérations d'addition

$$e_L + f_L = (e + f)_L, \quad \forall e, f \in E,$$

et de multiplication par un scalaire

$$ce_L = (ce)_L, \quad \forall e \in E, c \in \mathbb{K},$$

sont définies sur l'ensemble des classes $\{ e_L : e \in E \}$ et le munissent d'une structure d'espace vectoriel.∎

Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, *l'espace quotient de E par L* est l'espace vectoriel construit dans la proposition précédente. Il est noté E/L.

On vérifie de suite que l'application $s_L\colon E \to E/L$ définie par $s_L e = e_L$ pour tout $e \in E$ est un opérateur linéaire surjectif, appelé *surjection canonique* de E sur E/L.

Bien souvent, s'il n'existe pas d'ambiguïté sur L, on écrit s en guise de s_L.

1.7 Structure des opérateurs linéaires

Théorème 1.7.1 *Soient E, F des espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tous sous-espaces vectoriels L de E et M de F tels que $TL \subset M$, il existe un opérateur linéaire unique $S\colon E/L \to F/M$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ s_L \downarrow & & \downarrow s_M \\ E/L & \xrightarrow{S} & F/M \end{array}$$

soit commutatif.

De plus,

a) *S est injectif si et seulement si $T^{-1}M \subset L$,*

b) *S est surjectif si et seulement si* $\operatorname{im}(T) + M = F$.

Preuve. Si un tel opérateur S existe, on doit avoir

$$Se_L = Ss_L e = s_M Te = (Te)_M, \quad \forall e \in E,$$

ce qui assure son unicité.

Etant donné e_1, $e_2 \in E$ tels que $e_1 - e_2 \in L$, on a nécessairement $(Te_1)_M = (Te_2)_M$. On peut donc définir une application $S\colon E/L \to F/M$ par $Se_L = (Te)_M$. On vérifie alors aisément que S est un opérateur linéaire.

De plus,

a) cet opérateur S est injectif si et seulement si tout $e \in E$ tel que $Se_L = 0$ (c'est-à-dire tel que $Te \in M$) appartient à L,

b) cet opérateur S est surjectif si et seulement si, pour tout $f \in F$, il existe $e \in E$ tel que $(Te)_M = f_M$, c'est-à-dire tel que $f \in Te + M$.∎

Théorème 1.7.2 *Soient E, F des espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Il existe une bijection linéaire $T^\sim\colon E/\ker(T) \to \operatorname{im}(T)$ et une seule telle que le diagramme* *canonique*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker(T) & \xrightarrow{T^{\sim}} & \mathrm{im}(T) \end{array}$$

soit commutatif.∎

Cela étant, si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, nous savons que L admet un complément algébrique M dans E et qu'il existe un projecteur linéaire P de E tel que $\mathrm{im}(P) = M$ et $\ker(P) = L$. Nous savons donc que E/L et M sont des espaces vectoriels isomorphes; ils ont donc même dimension, appelée *codimension de L dans E* et notée $\mathrm{codim}_E(L)$.

1.8 Suites exactes

Remarque. Le théorème de structure des opérateurs linéaires débouche naturellement sur les notions de complexes et de suites exactes courtes d'espaces vectoriels, que nous n'allons qu'introduire ici.□

Définitions. Un *complexe d'espaces vectoriels* est la donnée de suites $(E_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ d'espaces vectoriels et $(T_j \in \mathcal{L}(E_j, E_{j+1}))_{j\in\mathbb{Z}}$ d'opérateurs linéaires qui, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, est *un complexe au degré j*, c'est-à-dire vérifie $T_j T_{j-1} = 0$. On le note

$$\ldots \to E_{j-1} \xrightarrow{T_{j-1}} E_j \xrightarrow{T_j} E_{j+1} \to \ldots$$

S'il existe $J_0 \in \mathbb{Z}$ (resp. $J_1 \in \mathbb{Z}$) tel que $E_j = 0$ pour tout $j \leq J_0$ (resp. $j \geq J_1$), on convient de ne pas écrire les E_j pour $j < J_0$ (resp. $j > J_1$).

Un tel complexe est *exact au degré $j \in \mathbb{Z}$* si $\mathrm{im}(T_{j-1}) = \ker(T_j)$. C'est une *suite exacte* s'il est exact en tout $j \in \mathbb{Z}$. En particulier, une suite exacte est *courte* si elle s'écrit

$$0 \to E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \to 0.$$

Définitions. Si E et F sont des espaces vectoriels et si $T \in \mathcal{L}(E, F)$,
a) *le conoyau de T*, noté $\mathrm{coker}(T)$, est le quotient $F/\mathrm{im}(T)$,
b) *la coimage de T*, notée $\mathrm{coim}(T)$, est le quotient $E/\ker(T)$.

Proposition 1.8.1 a) *Le complexe*

$$\ldots \to E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \to \ldots$$

est exact en F si et seulement si la bijection canonique $\tilde{T}\colon \operatorname{coim}(T) \to \operatorname{im}(T)$ est une bijection entre $\operatorname{coim}(T)$ *et* $\ker(S)$.

En particulier,

a.1) *le complexe* $0 \to E \xrightarrow{T} F \to \ldots$ *est exact en E si et seulement si T est injectif,*

a.2) *le complexe* $\ldots \to E \xrightarrow{T} F \to 0$ *est exact en F si et seulement si T est surjectif.*

b) *Le complexe*

$$0 \to E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \to 0$$

est une suite exacte courte si et seulement si les deux condition suivantes sont réalisées:
i) *T est injectif,*
ii) *l'opérateur unique $R\colon \operatorname{coker}(T) \to G$ rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{S} & G \\ s_{\operatorname{im}(T)} \downarrow & & \downarrow \operatorname{id} \\ \operatorname{coker}(T) & \xrightarrow{R} & G/\{0\} \end{array}$$

commutatif est une bijection.∎

Exemples. 1) Le complexe $0 \to E \to 0$ est une suite exacte si et seulement si $E = 0$.

2) Le complexe $0 \to E \xrightarrow{T} F \to 0$ est une suite exacte si et seulement si T est un isomorphisme.

3) Pour tout sous-espace vectoriel L de l'espace vectoriel E,

$$0 \to L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s_L} E/L \to 0$$

est une suite exacte courte.

C'est même le prototype des suites exactes courtes car si

$$0 \to E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \to 0$$

est une suite exacte courte, T induit un isomorphisme entre E et le sous-espace vectoriel $\operatorname{im}(T)$ de F, alors que la bijection canonique $\tilde{S}$ assure que $F/\operatorname{im}(T)$ est isomorphe à G.□

Voici le lien entre les suites exactes courtes et le théorème fondamental de décomposition des opérateurs linéaires.

Théorème 1.8.2 *Si E, F sont des espaces vectoriels et si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors les suites*

$$0 \to \ker(T) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s} \operatorname{coim}(T) \to 0$$

$$0 \to \operatorname{coim}(T) \xrightarrow{\tilde{T}} \operatorname{im}(T) \to 0$$

$$0 \to \operatorname{im}(T) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{s} \operatorname{coker}(T) \to 0$$

$$0 \to \ker(T) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{s} \operatorname{coker}(T) \to 0$$

sont exactes.∎

1.9 Fonctionnelle linéaire, dual algébrique

Soit E un espace vectoriel.

Une *fonctionnelle linéaire sur E* est un opérateur linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Le dual algébrique de E est l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur E; on peut donc le noter $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$; on préfère cependant lui accorder une notation particulière telle que E^*.

Etant donné $e \in E$ et $e^* \in E^*$, nous allons adopter la notation $\langle e, e^* \rangle$ pour désigner la valeur que e^* prend en e. (On trouve aussi d'autres notations telle que $e^*(e)$.)

Théorème 1.9.1 *Si e^* est une fonctionnelle linéaire non nulle sur l'espace vectoriel E,*

a) $\ker(e^*)$ *est un sous-espace vectoriel de codimension* 1 *de E,*

b) $\operatorname{im}(e^*) = \mathbb{K}$.

Preuve. a) De fait, si $e_0 \in E$ est tel que $r = \langle e_0, e^* \rangle \neq 0$, on vérifie de suite que $P\colon E \to E$ défini par $e \mapsto \frac{1}{r}\langle e, e^* \rangle\, e_0$ est un projecteur linéaire de E tel que $\ker(P) = \ker(e^*)$ et $\operatorname{im}(P) = \operatorname{span}(\{e_0\})$.

b) est immédiat.∎

Une partie $\mathcal{A}$ de E^* est *séparante* si, pour tout $e \in E$ non nul, il existe $e^* \in \mathcal{A}$ tel que $\langle e, e^* \rangle \neq 0$.

Théorème 1.9.2 (séparation) *Soit L un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Pour tout $e_0 \in E \setminus L$, il existe $e^* \in E^*$ tel que $\langle e_0, e^* \rangle = 1$ et $\langle l, e^* \rangle = 0$ pour tout $l \in L$.*

En particulier, E^* est séparant.

Preuve. Posons $L_0 = L + \mathrm{span}(\{e_0\})$. On vérifie de suite que

$$l^*\colon L_0 \to \mathbb{K} \quad l + ce_0 \mapsto c$$

définit une fonctionnelle linéaire sur L. Cela étant, tout prolongement linéaire e^* de l^* sur E convient.

Pour le cas particulier, il suffit de considérer $L = \{0\}$.∎

Comme le dual algébrique E^* d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel, on peut en considérer le dual algébrique E^{**}, appelé *bidual algébrique* de E.

On vérifie de suite que, pour tout $e \in E$,

$$\delta_e\colon E^* \to \mathbb{K} \quad e^* \mapsto \langle e, e^* \rangle$$

est une fonctionnelle linéaire sur E^* et que l'ensemble de ces fonctionnelles est une partie séparante de E^{**}.

Remarque. Soit E un espace vectoriel.

a) *Si E est de dimension finie,* nous savons bien que $\{\, \delta_e : e \in E \,\}$ est égal à E^{**}; on dit que *E est algébriquement réflexif.*

b) En fait, cette propriété caractérise les espaces vectoriels de dimension finie: *si E est de dimension infinie, l'inclusion $\{\, \delta_e : e \in E \,\} \subset E^{**}$ est stricte.* Soit $B = \{\, e_j : j \in J \,\}$ une base de Hamel de E. Pour tout $k \in J$, soit e_k^* la fonctionnelle linéaire définie sur E par $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tout $k \in J$. Il est clair que ces fonctionnelles e_k^* sont linéairement indépendantes. Cela étant, soit C une base de Hamel de E^*, contenant $\{e_k^*\colon k \in J\}$. Soit alors τ une fonctionnelle linéaire sur E^* qui s'annule sur tous les éléments de C sauf une suite d'éléments de $\{e_k^*\colon k \in J\}$. On conclut alors en remarquant que τ ne peut pas appartenir à $\{\, \delta_e : e \in E \,\}$.□

Proposition 1.9.3 *Soit E un espace vectoriel.*

Si $J \in \mathbb{N}_0$, si les $e_1, \ldots, e_J \in E$ sont linéairement indépendants et si $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel séparant de E^*, alors il existe $e_1^*, \ldots, e_J^* \in \mathcal{L}$ tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \ldots, J\}$.

En particulier, si $J \in \mathbb{N}_0$ et si les $e_1^*, \ldots, e_J^* \in E^*$ sont linéairement indépendants, alors il existe $e_1, \ldots, e_J \in E$ tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \ldots, J\}$.

Preuve. Posons

$$L = \{\, (\langle e_1, e^* \rangle, \ldots, \langle e_J, e^* \rangle) : e^* \in \mathcal{L} \,\}.$$

Bien sûr, L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^J$. En fait, on a même $L = \mathbb{K}^J$ sinon, vu le théorème précédent, il existe $c \in \mathbb{K}^J \setminus \{0\}$ tel que $\langle L, c\rangle = \{0\}$ donc tel que

$$0 = \sum_{j=1}^{J} c_j \langle e_j, e^* \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{J} c_j e_j, e^* \right\rangle, \quad \forall e^* \in \mathcal{L},$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{L}$ est séparant. Dès lors, il existe e_1^*, $\ldots e_J^* \in \mathcal{L}$ tels que

$$(\langle e_1, e_j^* \rangle, \ldots, \langle e_J, e_j^* \rangle) = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$; ce qui suffit.

Le cas particulier a lieu car $\mathcal{L} = \{\, \delta_e : e \in E \,\}$ est un sous-espace vectoriel séparant de E^{**}.∎

Proposition 1.9.4 *Soit E un espace vectoriel. Si $J \in \mathbb{N}_0$ et si les e_1, ..., $e_J \in E$ et les e_1^*, ..., $e_J^* \in E^*$ sont tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous j, $k \in \{1, \ldots, J\}$, alors*

$$P_1 \colon E \to E; \quad e \mapsto \sum_{j=1}^{J} \langle e, e_j^* \rangle \, e_j$$

est un projecteur linéaire de E tel que $\operatorname{im}(P_1) = \operatorname{span}(\{e_1, \ldots, e_J\})$ et

$$P_2 \colon E^* \to E^*; \quad e^* \mapsto \sum_{j=1}^{J} \langle e_j, e^* \rangle \, e_j^*$$

est un projecteur linéaire de E^* tel que $\operatorname{im}(P_2) = \operatorname{span}(\{e_1^*, \ldots, e_J^*\})$.

Preuve. Tout est direct et immédiat.∎

Proposition 1.9.5 *Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel séparant de E^*.*

Si $J \in \mathbb{N}_0$, e_1, ..., $e_J \in E$ et $l^* \in \mathcal{L}^*$ sont tels que

$$(l \in \mathcal{L}, \langle e_1, l \rangle = \ldots = \langle e_J, l \rangle = 0) \Longrightarrow \langle l, l^* \rangle = 0,$$

alors il existe $e_0 \in \operatorname{span}(\{e_1, \ldots, e_J\})$ tel que $l^* = \delta_{e_0}|_{\mathcal{L}}$.

En particulier,

a) *si $J \in \mathbb{N}_0$ et e, e_1, ..., $e_J \in E$ sont tels que*

$$(l \in \mathcal{L}, \langle e_1, l \rangle = \ldots = \langle e_J, l \rangle = 0) \Longrightarrow \langle e, l \rangle = 0,$$

alors e appartient à $\operatorname{span}(\{e_1, \ldots, e_J\})$.

b) *si $J \in \mathbb{N}_0$ et e^*, e_1^*, …, $e_J^* \in E^*$ sont tels que*

$$(e \in E, \langle e, e_1^* \rangle = \ldots = \langle e, e_J^* \rangle = 0) \Longrightarrow \langle e, e^* \rangle = 0,$$

alors e^* appartient à $\operatorname{span}(\{e_1^*, \ldots, e_J^*\})$.

Preuve. Nous pouvons bien sûr supposer les e_1, …, e_J linéairement indépendants. Cela étant, il existe l_1, …, $l_J \in \mathcal{L}$ tels que $\langle e_j, l_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous j, $k \in \{1, \ldots, J\}$ et

$$P_2 \colon E^* \to E^*; \quad e^* \mapsto \sum_{j=1}^{J} \langle e_j, e^* \rangle \, l_j$$

est un projecteur linéaire de E^*, d'image égale à $\operatorname{span}(\{l_1, \ldots, l_J\})$. Dès lors, pour tout $l \in \mathcal{L}$, $l - P_2 l$ appartient bien sûr à $\mathcal{L}$ mais annule aussi e_1, …, e_J. Il s'ensuit que, pour tout $l \in \mathcal{L}$, on a $\langle l - P_2 l, l^* \rangle = 0$ donc

$$\left\langle l, l^* - \sum_{j=1}^{J} \langle l_j, l^* \rangle \, \delta_{e_j} \right\rangle = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}.$$

Cela étant, pour $e_0 = \sum_{j=1}^{J} \langle l_j, l^* \rangle \, e_j$, il vient $\delta_{e_0}|_{\mathcal{L}} = l^*$.

Le cas particulier est une conséquence directe du résultat principal.∎

Exemples. On vérifie de suite que

(1) pour tout $y \in \omega$,

$$e_y^* \colon \phi \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ϕ,

(2) pour tout $y \in \ell^\infty$,

$$e_y^* \colon \ell^1 \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ℓ^1,

(3) pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $y \in \ell^q$ avec $1/p + 1/q = 1$,

$$e_y^* \colon \ell^p \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ℓ^p,

(4) l'application

$$\tau \colon c \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \lim_k x_k$$

est une fonctionnelle linéaire sur c,
(5) pour tout $y \in \ell^1$,

$$e_y^*\colon \ell^\infty \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ℓ^∞; sa restriction à c_0 ou à c est donc aussi une fonctionnelle linéaire sur cet espace,
(6) pour tout $y \in \phi$,

$$e_y^*\colon \omega \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ω,
(7) pour tout $x_0 \in K$,

$$\delta_{x_0}\colon \mathrm{C}_0(K) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto f(x_0)$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{C}_0(K)$,
(8) pour tout $g \in \mathrm{L}^1(K)$,

$$\tau_g\colon \mathrm{C}_0(K) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto \int_K fg\,dx$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{C}_0(K)$,
(9) pour tous $p \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| \leq p$,

$$e^*\colon \mathrm{C}_p(\Omega) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto [\mathrm{D}^\alpha f]_{x_0}$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{C}_p(\Omega)$,
(10) pour tous $p \in \mathbb{N}_0$, $K \subset \Omega$, $g \in \mathrm{C}_0(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| \leq p$,

$$e^*\colon \mathrm{C}_p(\Omega) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto \int_K g \cdot \mathrm{D}^\alpha f\,dx$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{C}_p(\Omega)$.□

1.10 Opérateur adjoint

Soient E, F deux espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $f^* \in F^*$, nous savons que

$$\langle T\cdot, f^*\rangle : E \to \mathbb{K}$$

est une fonctionnelle linéaire, comme composition de deux opérateurs linéaires. On la note également T^*f^* et ainsi $T^*\colon F^* \to E^*$ est une application, appelée *adjoint de T*, qui se révèle aussitôt être un opérateur linéaire.

De nombreuses propriétés de T sont liées à celles de T^*. Cette étude repose sur la considération des notions suivantes:

(1) à toute partie non vide A de E, on associe

$$A^\perp = \{\, e^* \in E^* : \langle A, e^* \rangle = \{0\} \,\} \,,$$

(2) à toute partie non vide $\mathcal{A}$ de E^*, on associe

$$\mathcal{A}^\top = \{\, e \in E : \langle e, \mathcal{A} \rangle = \{0\} \,\} \,.$$

On vérifie alors aussitôt que $A^\perp$ et $\mathcal{A}^\top$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de E^* et de E respectivement.

Exercice. A quoi sont égaux les ensembles $\{0\}^\perp$, $E^\perp$, $\{0\}^\top$ et $E^{*\top}$?$\square$

Proposition 1.10.1 *Soit E un espace vectoriel.*

a) *Pour toute partie non vide A de E, on a $A \subset A^{\perp\top}$.*

b) *Pour toute partie non vide $\mathcal{A}$ de E, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\top\perp}$.*

c) *Pour toutes parties non vide A_1, A_2 de E telles que $A_1 \subset A_2$, on a $A_1^\perp \supset A_2^\perp$ et $A_1^{\perp\top} \subset A_2^{\perp\top}$.*

d) *Pour toutes parties non vides $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ de E^* telles que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, on a $\mathcal{A}_1^\top \supset \mathcal{A}_2^\top$ et $\mathcal{A}_1^{\top\perp} \subset \mathcal{A}_2^{\top\perp}$.*

e) *Pour toutes parties non vides A de E et $\mathcal{A}$ de E^*, on a $A^\perp = A^{\perp\top\perp}$ et $\mathcal{A}^\top = \mathcal{A}^{\top\perp\top}$.*

Preuve. a), b), c) et d) sont triviaux.

e) Traitons par exemple le cas de A; celui de $\mathcal{A}$ est analogue. D'une part, $A^\perp \subset A^{\perp\top\perp}$ résulte aussitôt de b) appliqué à $A^\perp$. D'autre part, on a $A \subset A^{\perp\top}$ vu a), donc $A^\perp \supset A^{\perp\top\perp}$ vu c). D'où la conclusion.∎

Théorème 1.10.2 *Soit E un espace vectoriel.*

a) *Pour toute partie non vide A de E, on a $A^{\perp\top} = \operatorname{span}(A)$.*

b) *Si L et M sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $L^\perp = M^\perp$, alors $L = M$.*

Preuve. a) Comme $A^{\perp\top}$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant A, on a déjà $A^{\perp\top} \supset \operatorname{span}(A)$. De plus, s'il existe un élément e_0 dans $A^{\perp\top} \setminus \operatorname{span}(A)$, nous savons qu'il existe $e_0^* \in E^*$ tel que $\langle e_0, e_0^* \rangle = 1$ et $\langle \operatorname{span}(A), e_0^* \rangle = \{0\}$. En particulier, on a alors $\langle A, e_0^* \rangle = \{0\}$ donc $e_0^* \in A^\perp$, ce qui donne lieu à la contradiction $\langle e_0, e_0^* \rangle = 0$.

b) De fait, vu a), il vient successivement $L = L^{\perp\top} = M^{\perp\top} = M$.∎

Proposition 1.10.3 *Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une partie non vide de E^*. On a alors $\mathcal{A}^{\top\perp} = \mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $e^* \in E^* \setminus \mathcal{A}$, il existe $e \in \mathcal{A}^\top$ tel que $\langle e, e^* \rangle \neq 0$.*

Preuve. Comme on a toujours $\mathcal{A}^{\top\perp} \supset \mathcal{A}$, la condition est équivalente à $\mathcal{A}^{\top\perp} \subset \mathcal{A}$ donc à $E^* \setminus \mathcal{A} \subset E^* \setminus \mathcal{A}^{\top\perp}$. Cela signifie que, pour tout $e^* \in E^* \setminus \mathcal{A}$, on a $e^* \notin \mathcal{A}^{\top\perp}$, c'est-à-dire qu'il existe $e \in \mathcal{A}^\top$ tel que $\langle e, e^* \rangle \neq 0$.∎

Remarque. Tout compte fait, l'énoncé précédent n'est qu'une tautologie!□

Une partie $\mathcal{A}$ de E^* est *algébriquement saturée* si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\top\perp}$. Cela exige que $\mathcal{A}$ soit un sous-espace vectoriel de E^* mais cette condition n'est pas suffisante. Cependant $\{0\}$ et E^* sont algébriquement saturés; plus généralement, pour toute partie non vide $\mathcal{A}$ de E^*, $\mathcal{A}^{\top\perp}$ est algébriquement saturé.

Exercice. Etablir que, pour tout $y \in \ell^1$,

$$\tau_y : c \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur c. Etablir que, pour $\mathcal{A} = \left\{ \tau_y : y \in \ell^1 \right\}$, on a $\mathcal{A}^\top = \{0\}$ donc $\mathcal{A}^{\top\perp} = c^*$. Etablir que

$$\tau : c \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \lim_{m\to\infty} x_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur c. Etablir que τ n'appartient pas à $\mathcal{A}$. Au total, $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de c^*, qui n'est pas algébriquement saturé.□

Théorème 1.10.4 *Soient E, F des espaces vectoriels.*
Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

(a) $\mathrm{im}(T)^\perp = \ker(T^*)$,

(b) $\mathrm{im}(T) = \ker(T^*)^\top$,

(c) *T est surjectif si et seulement si T^* est injectif.*

Preuve. (a) résulte aussitôt de ce que $\langle Te, f^* \rangle = \langle e, T^* f^* \rangle$ pour tous $e \in E$ et $f^* \in F^*$.

(b) est une conséquence directe de (a): comme $\mathrm{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de F, il vient $\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T)^{\perp\top} = \ker(T^*)^\top$.

(c) Si $\mathrm{im}(T) = F$, il vient $\ker(T^*) = \mathrm{im}(T)^\perp = F^\perp = \{0\}$ et T^* est injectif. Si T^* est injectif, il vient $\mathrm{im}(T) = \ker(T^*)^\top = \{0\}^\top = F$.∎

Théorème 1.10.5 *Soient E, F des espaces vectoriels.*
Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

(a) $\ker(T) = \mathrm{im}(T^*)^\top$,

(b) $\ker(T)^\perp = \mathrm{im}(T^*)$,

(c) *T est injectif si et seulement si T^* est surjectif.*

Preuve. (a) résulte aussitôt de ce que $\langle Te, f^* \rangle = \langle e, T^* f^* \rangle$ pour tous $e \in E$, $f^* \in F^*$.

(b) Vu (a), on a déjà $\mathrm{im}(T^*) \subset \mathrm{im}(T^*)^{\top\perp} = \ker(T)^\perp$. Inversement, si e^* appartient à $\ker(T)^\perp$, on peut introduire

$$l^* \colon \mathrm{im}(T) \to \mathbb{K} \quad Te \mapsto \langle e, e^* \rangle$$

car, si e_1, $e_2 \in E$ sont tels que $Te_1 = Te_2$, on a $e_1 - e_2 \in \ker(T)$ donc $\langle e_1, e^* \rangle = \langle e_2, e^* \rangle$. Cela étant, l^* est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{im}(T)$ et admet donc un prolongement linéaire f^* sur F^*. Comme on a alors $T^* f^* = e^*$, on conclut aussitôt.

(c) résulte aussitôt de (a) et (b).∎

Remarque. Ces deux derniers résultats sont très importants puisqu'ils caractérisent l'injectivité et la surjectivité des opérateurs linéaires, notions fondamentales dans l'étude de la résolution d'une équation du type $Tx = f$. Cependant en dehors du cas où E et F sont de dimension finie (on est alors ramené à un problème d'algèbre matricielle) et des deux cas du paragraphe suivant, leur utilité est fort limitée par le fait que E^* et F^* ne sont pas caractérisés dans les cas pratiques (sauf pour le cas trivial de l'espace ϕ). Pour pallier ce handicap, il faut sortir d'une approche purement algébrique du problème. C'est ce que nous allons faire au chapitre suivant en introduisant des notions topologiques.□

Exercice. Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, établir que
a) l'adjoint de la surjection canonique $s \colon E \to E/L$ est un opérateur $s^* \colon (E/L)^* \to E^*$ qui est linéaire, injectif et tel que $\mathrm{im}(s^*) = L^\perp$,
b) l'opérateur $R \colon E^* \to L^*$ défini par $e^* \mapsto e^*|_L$ est linéaire et surjectif.□

1.11 Parties remarquables d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel.

Rappel. Une partie C de E est *convexe* si elle est non vide et si, pour tous e, $f \in C$ et $r \in [0, 1]$, on a $re + (1 - r)f \in C$.

Bien sûr, tout sous-espace vectoriel de E est convexe et toute intersection non vide de parties convexes de E est convexe. Cela étant, *l'enveloppe convexe* d'une partie non vide

A de E est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A; c'est la plus petite partie convexe de E contenant A, elle est notée $\mathrm{co}(A)$ et on a

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} r_j e_j : J \in \mathbb{N}_0, e_j \in A, r_j > 0, \sum_{j=1}^{J} r_j = 1 \right\}.$$

Si T est un opérateur linéaire de E dans l'espace vectoriel F, alors
a) l'image par T de toute partie convexe de E est une partie convexe de F,
b) si elle est non vide, l'image inverse par T d'une partie convexe de F est une partie convexe de E.

Définition. Une partie A de E est *absolument convexe* si elle est non vide et si, pour tous e, $f \in A$ et c, $d \in \mathbb{K}$ tels que $|c| + |d| \leq 1$, on a $ce + df \in A$.

Une telle partie contient donc toujours l'élément 0.

Définition. Bien sûr, tout sous-espace vectoriel de E est absolument convexe et toute intersection de parties absolument convexes de E est aussi une partie absolument convexe de E. Cela étant, nous pouvons introduire la notion d'*enveloppe absolument convexe* d'une partie non vide A de E comme étant l'intersection de toutes les parties absolument convexes de E qui contiennent A; elle est notée $\Gamma(A)$. On vérifie aisément que

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} c_j e_j : J \in \mathbb{N}_0; e_j \in A; c_j \in \mathbb{K}; \sum_{j=1}^{J} |c_j| \leq 1 \right\}.$$

Si E, F sont des espaces vectoriels et si T est un opérateur linéaire de E dans F, on vérifie de suite que

a) l'image par T de toute partie absolument convexe de E est une partie absolument convexe de F,

b) l'image inverse par T de toute partie absolument convexe de F est une partie absolument convexe de E.

Exercice. *Si $\{ A_j : j \in J \}$ est une famille de parties absolument convexes de l'espace vectoriel E, établir que*

$$\Gamma(\cup_{j\in J} A_j) = \left\{ \sum_{(j)} c_j e_j : e_j \in A_j; c_j \in \mathbb{K}; \sum_{(j)} |c_j| \leq 1 \right\}. \square$$

Exercice. Quelles sont les parties absolument convexes de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$?

Définition. Une partie A d'un espace vectoriel est *équilibrée* si elle est non vide et telle que $A = \{ ce : c \in \mathbb{K}, |c| \leq 1, e \in A \}$.

Proposition 1.11.1 *Une partie A de E est absolument convexe si et seulement si elle est convexe et équilibrée.*

Preuve. La nécessité de la condition est triviale.

La condition est suffisante. Soient e, $f \in A$ et c, $d \in \mathbb{K}$ tels que $|c| + |d| \leq 1$. Si c ou d est égal à 0, il est clair que $ce + df \in A$. Si ce n'est pas le cas, on a $(c/|c|)e$, $(d/|d|)f \in A$ par équilibrage et

$$ce + df = |c| \frac{c}{|c|} e + |d| \frac{d}{|d|} f + (1 - |c| - |d|)0 \in A$$

par convexité.∎

Proposition 1.11.2 a) *Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\operatorname{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} r_j x_j : r_1, \ldots, r_{n+1} \geq 0; \sum_{j=1}^{n+1} r_j = 1; x_1, \ldots, x_{n+1} \in A \right\}.$$

b) *Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} c_j x_j : c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{R}; \sum_{j=1}^{n+1} |c_j| \leq 1; x_1, \ldots, x_{n+1} \in A \right\}.$$

c) *Pour toute partie non vide A de $\mathbb{C}^n$, on a*

$$\operatorname{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{2n+1} r_j z_j : r_1, \ldots, r_{2n+1} \geq 0; \sum_{j=1}^{2n+1} r_j = 1; z_1, \ldots, z_{2n+1} \in A \right\}.$$

d) *Pour toute partie non vide A de $\mathbb{C}^n$, on a*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{2n+1} c_j z_j : c_1, \ldots, c_{2n+1} \geq 0; \sum_{j=1}^{2n+1} |c_j| \leq 1; z_1, \ldots, z_{2n+1} \in A \right\}.$$

Preuve. a) Nous savons que tout élément x de $\operatorname{co}(A)$ s'écrit $\sum_{j=1}^{p} r_j x_j$ avec $p \in \mathbb{N}_0$; $r_1, \ldots, r_p > 0$; $\sum_{j=1}^{p} r_j = 1$ et $x_1, \ldots, x_p \in A$. Si $p > n+1$, alors les points $y_1 = (x_1, 1), \ldots, y_p = (x_p, 1)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont linéairement dépendants et il existe des $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{p} t_j x_j = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} t_j = 0$. Cela étant, remarquons que, pour tout $s > 0$, les nombres $st_1, \ldots, st_p$ conviennent également.

Comme les nombres $r_1, \ldots, r_p$ sont > 0, il est alors possible de déterminer $s > 0$ tel que les nombres $r_1 - st_1, \ldots, r_p - st_p$ soient tous ≥ 0 et l'un au moins égal à 0 auquel cas il vient $x = \sum_{j=1}^{p}(r_j - st_j)x_j$, une combinaison convexe des $x_1, \ldots, x_p$ dont un coefficient au moins est égal à 0. On conclut alors de suite.

b) Si A est équilibré, nous avons $\Gamma(A) = \mathrm{co}(A)$ et la conclusion s'ensuit directement de a). Si A n'est pas équilibré, tout $x \in \Gamma(A)$ s'écrit donc

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_j(c_j x_j) = \sum_{j=1}^{n+1}(r_j c_j)x_j$$

avec $r_1, \ldots, r_{n+1} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n+1} = 1$; $|c_1|, \ldots, |c_{n+1}| \leq 1$; $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$.

c) et d) Il suffit de considérer que tout $z \in \mathbb{C}^n$ correspond à $(\Re z, \Im z) \in \mathbb{R}^{2n}$ et appliquer a) et la preuve de b).∎

Définition. Une partie A de E

a) *absorbe* $B \subset E$ s'il existe $r > 0$ tel que $B \subset cA$ pour tout $c \in \mathbb{K}$ tel que $|c| \geq r$.

b) est *absorbante* si elle absorbe tout élément de E.

Cela étant, on vérifie aisément qu'une partie absolument convexe A de E absorbe $B \subset E$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $B \subset cA$.

Remarquons aussi que l'enveloppe linéaire d'une partie absorbante de E est égale à E.

Chapitre 2

Espaces localement convexes ou espaces à semi-normes

Note. Ce n'est qu'à partir du paragraphe 2.7 que nous utiliserons indistinctement les expressions équivalentes "**espace localement convexe**" et "**espace à semi-normes**" en lieu et place des expressions complètes et équivalentes "espace vectoriel topologique localement convexe séparé" et "espaces vectoriel à semi-normes séparé".

2.1 Espaces vectoriels topologiques

Définition. Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel E muni d'une topologie τ pour laquelle les applications

$$\begin{array}{ll} + : (E,\tau)\times(E,\tau)\to(E,\tau); & (e,f)\mapsto e+f \\ . : \mathbb{K}\times(E,\tau)\to(E,\tau); & (c,e)\mapsto ce \end{array}$$

sont continues. Explicitement, il revient au même de dire que les deux conditions suivantes sont satisfaites:
(1) pour tous e, $f\in E$ et tout voisinage U de $e+f$, il existe des voisinages V de e et W de f tels que $V+W\subset U$,
(2) pour tous $c_0\in\mathbb{K}$, $e_0\in E$ et voisinage U de c_0e_0, il existe $r>0$ et un voisinage V de e_0 tels que $\{\, ce : c\in\mathbb{K}, |c-c_0|\leq r, e\in V\,\}\subset U$.

Théorème 2.1.1 *Dans un espace vectoriel topologique, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que $V+V\subset U$.*

Preuve. Comme $0+0=0$, il existe en effet des voisinages V_1 et V_2 de 0 tels que $V_1+V_2\subset U$; dès lors $V=V_1\cap V_2$ convient.∎

Théorème 2.1.2 *Dans un espace vectoriel topologique (E, τ), pour tout voisinage U de 0 et tout élément non nul e, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $e/m \in U$.*
En particulier, on a $E = \cup_{m=1}^{\infty} mU$.

Preuve. Pour tout élément e de E, on a $0.e = 0$. Il existe donc $r > 0$ et un voisinage V de e tels que

$$\{\, cf : c \in \mathbb{K}, |c| \leq r, f \in V \,\} \subset U.$$

Il suffit alors de prendre $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $1/m \leq r$.∎

Théorème 2.1.3 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique, alors, pour tous $e_0 \in E$ et $c_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'application*

$$u \colon (E, \tau) \to (E, \tau); \quad e \mapsto c_0 e + e_0$$

est un homéomorphisme.

Preuve. On vérifie de suite que cette application est injective, surjective et d'inverse donné par

$$v \colon (E, \tau) \to (E, \tau); \quad e \mapsto \frac{1}{c_0} e - \frac{e_0}{c_0},$$

c'est-à-dire par une application du même type.

Pour conclure, il suffit alors de prouver qu'une telle application est continue. C'est direct: pour tout voisinage U de $c_0 e + e_0$, il existe des voisinages V' de $c_0 e$ et W de e_0 tels que $V' + W \subset U$ puis $r > 0$ et un voisinage V de e tels que $\{\, cf : |c - c_0| \leq r, f \in V \,\} \subset V'$. Au total, pour tout $f \in V$, on a $u(f) = c_0 f + e_0 \in V' + W \subset U$.∎

Corollaire 2.1.4 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique,*

(a) *une partie U de E est un voisinage de $e \in E$ si et seulement si $U - e$ est un voisinage de 0,*

(b) *pour tout $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et tout voisinage U de 0, cU est un voisinage de 0.*∎

Remarque. Sur le plan théorique, ce corollaire est fort important: dans un espace vectoriel topologique,
(a) signale que les voisinages de $e \in E$ s'obtiennent en translatant de e les voisinages de 0. La connaissance de $\mathcal{V}(0)$ détermine donc la topologie de (E, τ).
(b) signale que tout homothétique d'un voisinage de 0 est aussi un voisinage de 0.□

Voici un renseignement supplémentaire sur les voisinages de 0.

Théorème 2.1.5 *Si* (E, τ) *est un espace vectoriel topologique, tout voisinage de* 0 *contient un voisinage de* 0 *équilibré et fermé.*

Preuve. Si U est un voisinage de $0 = 0.0$, alors il existe $r > 0$ et un voisinage V de 0 tels que

$$W = \{\, ce : c \in \mathbb{K}, |c| \leq r, e \in V \,\} \subset U$$

or W est équilibré et contient rV, donc est un voisinage de 0.

Cela étant, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage équilibré V de 0 tel que $V + V \subset U$. On a alors $V^- \subset U$ car, pour tout $e \in V^-$, on a $(e + V) \cap V \neq \emptyset$ et il existe donc f, $g \in V$ tel que $e + f = g$ donc tels que $e = g - f \in U$. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que V^- est équilibré, ce qui est direct.∎

Remarque. Au total, la topologie d'un espace vectoriel topologique est donc connue dès que les voisinages équilibrés et fermés de 0 sont connus.□

Proposition 2.1.6 *Si* E *est un espace vectoriel topologique, alors,*

a) *l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de* E *est un sous-espace vectoriel de* E*,*

b) *l'adhérence d'une partie (absolument) convexe de* E *est une partie (absolument) convexe de* E*,*

c) *l'intérieur d'un sous-espace vectoriel propre de* E *est vide,*

d) *l'intérieur d'une partie (absolument) convexe de* E *est une partie (absolument) convexe de* E *si elle n'est pas vide.*

Preuve. a) Soit L un sous-espace vectoriel de E. D'une part, établissons que $L^- + L^- \subset L^-$. De fait, $L^- \times L^-$ est bien sûr inclus dans $(L \times L)^-$ et, $+$ étant une application continue de $E \times E$ dans E, $+(L \times L)^- \subset L^-$. D'autre part, pour tout $c \in \mathbb{K}$, on a $cL^- \subset L^-$ car $\mathbb{K} \times L^-$ est bien sûr inclus dans $(\mathbb{K} \times L)^-$ et, $\cdot$ étant une application continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E, $\cdot(\mathbb{K} \times L)^- \subset L^-$.

b) s'établit au moyen d'un raisonnement analogue.

c) est trivial.

d) est clair (à traiter en guise d'exercice).∎

Définitions. L'*enveloppe linéaire fermée* (resp. *enveloppe convexe fermée*; *enveloppe absolument convexe fermée*) d'une partie non vide A de l'espace vectoriel topologique E est l'intersection des sous-espaces vectoriels fermés (resp. des parties convexes fermées; des parties absolument convexes et fermées) de E contenant A.

La proposition précédente permet aussitôt d'affirmer qu'il s'agit de l'ensemble $(\mathrm{span}(A))^-$ (resp. $(\mathrm{co}(A))^-$; $(\Gamma(A))^-$) qu'on note plutôt

$$\overline{\mathrm{span}}(A) \quad (\text{resp. } \overline{\mathrm{co}}(A);\ \overline{\Gamma}(A)).$$

NOTE. Arrêtons ici l'étude générale des espaces vectoriels topologiques pour en introduire une famille essentielle pour les applications.

2.2 Espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés

Définition. Un *espace vectoriel topologique localement convexe* est un espace vectoriel topologique (E, τ) dont tout élément admet une base de voisinages constituée d'ensembles convexes; on dit alors que τ est une *topologie localement convexe* sur E.

Par abus de langage et afin de simplifier la terminologie, nous disons "*espace localement convexe*" en lieu et place de "espace vectoriel topologique localement convexe séparé".

Théorème 2.2.1 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *τ est une topologie localement convexe;*

(b) *0 a une base de voisinages convexes;*

(c) *0 a une base de voisinages absolument convexes.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (b) sont triviaux.

(b) $\Rightarrow$ (a) car tout translaté d'une partie convexe est convexe.

(b) $\Rightarrow$ (c) De fait, pour tout voisinage U de 0, il existe d'une part un voisinage convexe V de 0 inclus dans U et d'autre part un voisinage équilibré W de 0 inclus dans V. Dans ces conditions, on a $W \subset \mathrm{co}(W) \subset V \subset U$ et, pour conclure, il suffit de constater que $\mathrm{co}(W)$ convexe par nature est aussi équilibré car, avec des notations claires par elles-même,

$$c \sum_{j=1}^{J} r_j e_j = \sum_{j=1}^{J} r_j (c e_j). \blacksquare$$

2.3 Semi-normes

Définitions. Soit E un espace vectoriel.

Une *semi-norme* sur E est une fonction $p \colon E \to \mathbb{R}$ telle que

(a) $p(ce) = |c|\, p(e)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$;

(b) $p(e_1 + e_2) \leq p(e_1) + p(e_2)$.

Une *norme* sur E est une semi-norme p sur E telle que $p(e) = 0$ a lieu si et seulement si $e = 0$. Le plus souvent, on abandonne alors la notation p au profit de $\|\cdot\|$, le nombre $p(e)$ étant noté $\|e\|$.

Exemples. On vérifie directement que

1) le module est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{C}^n$;

2) $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p)^{1/p}$ est une norme sur ℓ^p pour tout $p \in [1, \infty[$;

3) $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}_0} |x_m|$ est une norme sur ℓ^∞ donc sur c et sur c_0;

4) $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ est une norme sur $\mathrm{C}_0(K)$;

5) $\|f\|_p = (\int_A |f|^p \, dx)^{1/p}$ est une norme sur $\mathrm{L}^p(A)$ pour tout $p \in [1, \infty[$;

6) $\|f\|_\infty = \sup_{\mathrm{pp}} |f(x)|$ est une norme sur $\mathrm{L}^\infty(A)$.$\square$

Exemples. On vérifie directement que

1) $p_m(x) = \sup\{|x_k| : k = 1, \ldots, m\}$ est une semi-norme sur ω pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;

2) $p_r(x) = \sum_m^\infty r_m |x_m|$ est une semi-norme sur ϕ pour toute suite finie r de $[0, +\infty[$;

3) pour tous fermé F de $\mathbb{R}^n$ et compact non vide K inclus dans F,

$$p_K(f) = \|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

est une semi-norme sur $\mathrm{C}_0(F)$;

4) pour tous ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, compact non vide K inclus dans Ω et $M \in \mathbb{N}$,

$$p_{K,M}(f) = \sup_{|\alpha| \leq M} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_K$$

est une semi-norme sur $\mathrm{C}_L(\Omega)$ pour autant que $L \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ soit tel que $M \leq L$ si $L \in \mathbb{N}_0$;

5) pour tous ouverts Ω de $\mathbb{R}^n$ et compact non vide K inclus dans Ω,

$$p_K(f) = \int_K |f(x)| \, dx \quad \left[\text{resp. } \left(\int_K |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}, \sup_{\text{pp sur } K} |f(x)|\right]$$

est une semi-norme sur $\mathrm{L}^{1,2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Proposition 2.3.1 *Soit E un espace vectoriel.*

a) *Si p, q sont des normes* (resp. *semi-normes*) *sur E et si $r > 0$, alors rp, $p + q$, $\sup\{p, q\}$ et $\sqrt{p^2 + q^2}$ sont des normes* (resp. *semi-normes*) *sur E.*

b) *Si p est une semi-norme sur E et L un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$p_L : E \to \mathbb{R}; \quad e \mapsto \inf_{l \in L} p(e + l)$$

est une semi-norme sur E.

c) *Si T est un opérateur linéaire de E dans un espace vectoriel F et si q est une semi-norme sur F, alors $q(T\cdot)$ est une semi-norme sur E.*
En particulier, pour tout $e^* \in E^*$, $|\langle \cdot, e^* \rangle|$ est une semi-norme sur E.∎

Voici quelques propriétés fondamentales des normes et semi-normes.

Proposition 2.3.2 *Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E,*

a) $p(0) = 0$;

b) $p(e) \geq 0$;

c) $p(\sum_{j=1}^{J} c_j e_j) \leq \sum_{j=1}^{J} |c_j| \, p(e_j)$;

d) $|p(e_1) - p(e_2)| \leq p(e_1 - e_2)$.

Preuve. a) Il suffit de noter qu'on a $p(0) = p(c\,0) = |c| \, p(0)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.
b) De fait, pour tout $e \in E$, on a alors

$$0 = p(0) = p(e - e) \leq p(e) + p(-e) = 2p(e).$$

c) est immédiat par récurrence sur J.
d) résulte aussitôt de la majoration

$$p(e) = p(e - f + f) \leq p(e - f) + p(f).∎$$

Proposition 2.3.3 *Si A est une partie absolument convexe de l'espace vectoriel E,*

a) $\mathrm{span}(A) = \cup_{r>0} \, rA$;

b) $0 < r < s \Rightarrow rA \subset sA$;

c) $p_A \colon \mathrm{span}(A) \to \mathbb{R} \quad e \mapsto \inf\{\, r > 0 : e \in rA \,\}$ *est une semi-norme sur* $\mathrm{span}(A)$ *telle que*

$$\{\, e \in \mathrm{span}(A) : p_A(e) < 1 \,\} \subset A \subset \{\, e \in \mathrm{span}(A) : p_A(e) \leq 1 \,\}.$$

Preuve. a) L'inclusion $\supset$ est claire. Inversement, pour toute combinaison linéaire $e = \sum_{j=1}^{J} c_j e_j$ d'éléments de A, on a bien sûr $e = 0 \in A$ si $\sum_{j=1}^{J} |c_j| = 0$ et

$$e = \sum_{k=1}^{J} |c_k| \left(\sum_{j=1}^{J} \frac{c_j}{\sum_{l=1}^{J} |c_l|} e_j \right) \in \sum_{k=1}^{J} |c_k| \, A$$

sinon.

b) est clair.

c) Bien sûr, p_A est à valeurs dans $[0, +\infty[$. De plus,
i) pour $c = 0$, il vient $p_A(ce) = p_A(0) = 0 = |c|\, p_A(e)$ pour tout $e \in \mathrm{span}(A)$. Pour tous $c \in \mathbb{K}$ non nul et $e \in \mathrm{span}(A)$, on a $ce \in rA$ si et seulement si $e \in (r/\,|c|)A$. Au total, on a $p_A(ce) = |c|\, p_A(e)$ pour tous $c \in \mathbb{K}$ et $e \in \mathrm{span}(A)$.
ii) pour tous e, $f \in \mathrm{span}(A)$ et tous $r > p_A(e)$ et $s > p_A(f)$, on a $e+f \in rA+sA = (r+s)A$ donc $p_A(e+f) \leq r+s$. On en déduit aussitôt que $p_A(e+f) \leq p_A(e)+p_A(f)$. Dès lors p_A est une semi-norme sur $\mathrm{span}(A)$.

Les inclusions sont immédiates.∎

Exercice. Si A est une partie absolument convexe de l'espace vectoriel E, quand a-t-on $b_{p_A}(<1) = A$? $b_{p_A}(1) = A$?□

2.4 Semi-boules

Définitions. Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E, alors, pour tous $e \in E$ et $r > 0$, les ensembles

$$b_p(e;r) = \{\, f \in E : p(e-f) \leq r \,\} \text{ et } b_p(e;<r) = \{\, f \in E : p(e-f) < r \,\}$$

sont appelés *semi-boule* de *centre* e et de *rayon* r pour la semi-norme p (que nous distinguerons plus tard en qualifiant la première de fermée et la seconde d'ouverte).

Dans le cas où $e = 0$, nous adoptons plutôt les notations $b_p(r)$ et $b_p(<r)$ en lieu et place de $b_p(0;r)$ et $b_p(0;<r)$ respectivement. De plus, nous posons $b_p = b_p(1)$.

Si p est une norme, nous parlons de *boules* au lieu de semi-boules et si la norme est claire, nous n'indiquons pas p dans la notation des boules.

Voici quelques propriétés élémentaires des semi-normes et semi-boules.

Proposition 2.4.1 *Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E,*

a) $b_p(e;r) = e + b_p(r)$ *et* $b_p(e;<r) = e + b_p(<r)$,

b) $b_p(r) = rb_p(1)$ *et* $b_p(<r) = rb_p(<1)$,

c) $b_p(r)$ *et* $b_p(<r)$ *sont absolument convexes et absorbants,*

d) *si la partie absolument convexe A de E contient* $b_p(e;r)$ (resp. $b_p(e;<r)$)*, alors A contient aussi* $b_p(r)$ (resp. $b_p(<r)$).

Preuve. a), b) et c) sont immédiats.

d) Comme A est absolument convexe, il contient également $-b_p(e;r)$ (resp. $-b_p(e;<r)$). Dès lors, pour tout $f \in b_p(r)$ (resp. $f \in b_p(<r)$), il vient

$$e+f,\; -e+f \in A \text{ donc } f = \tfrac{1}{2}(e+f) + \tfrac{1}{2}(-e+f) \in A.$$∎

La comparaison de semi-normes sur un espace vectoriel est régie par le résultat suivant.

Proposition 2.4.2 *Soient p, q des semi-normes sur l'espace vectoriel E. Pour tous r, $s > 0$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) $b_p(r) \subset b_q(s)$, *c'est-à-dire* $p(e) \leq r \Rightarrow q(e) \leq s$,

(b) $b_p(< r) \subset b_q(< s)$, *c'est-à-dire* $p(e) < r \Rightarrow q(e) < s$,

(c) $q(\cdot) \leq \frac{s}{r} p(\cdot)$ *sur* E.

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (c). Si $p(e) = 0$, on a $p(ce) = 0$ pour tout $c \in \mathbb{K}$, donc $q(e) = 0$ et la majoration a lieu. Si $p(e) \neq 0$, il vient

$$p\left(r\frac{e}{p(e)}\right) \leq r \text{ donc } q\left(r\frac{e}{p(e)}\right) \leq s,$$

ce qui suffit.

(c) $\Rightarrow$ (b) est trivial.

(b) $\Rightarrow$ (a). Si $p(e) \leq r$, il vient $p((1-\varepsilon)e) < r$ donc $q((1-\varepsilon)e) < s$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, ce qui suffit.∎

2.5 Ensembles de semi-normes

Définitions. Si P et Q sont des ensembles de semi-normes sur l'espace vectoriel E, alors

a) P est *plus fort que* Q sur E — on dit aussi que Q est *plus faible que* P — si, pour tout $q \in Q$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \ldots, p_J \in P$ et $C > 0$ tels que

$$q \leq C \sup\{p_1, \ldots, p_J\} \text{ sur } E;$$

on écrit $P \geq Q$ ou $Q \leq P$;

b) P est *équivalent à* Q s'il est plus fort et plus faible que Q; on écrit $P \simeq Q$;

c) P est *filtrant* si, pour tous p_1, $p_2 \in P$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $\sup\{p_1, p_2\} \leq Cp$.

d) P est *séparant* si 0 est le seul élément de E tel que $p(e) = 0$ pour tout $p \in P$;

e) P est un *système de semi-normes* sur E s'il est filtrant et séparant.

Il est clair que tout ensemble P de semi-normes sur un espace vectoriel E est équivalent à un ensemble filtrant Q de semi-normes sur E: il suffit par exemple de prendre

$$Q = \{\sup\{p_1, \ldots, p_J\} : J \in \mathbb{N}_0; p_1, \ldots, p_J \in P\}.$$

De plus, dans ce cas, P est séparant si et seulement si Q l'est.

Si P et Q sont des ensembles filtrants de semi-normes sur le même espace vectoriel E, alors il est clair que $Q \leq P$ a lieu si et seulement si, pour tout $q \in Q$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $q \leq Cp$.

2.6 Espaces vectoriels à semi-normes séparés

Définition. Un *espace vectoriel à semi-normes* est un espace vectoriel muni d'un ensemble filtrant de semi-normes.

Venons-en maintenant à l'équivalence des notions d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés et d'espaces vectoriels à semi-normes séparés.

Notation. Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique localement convexe, $\mathrm{cs}(E, \tau)$ désigne l'ensemble des semi-normes continues sur (E, τ).

Proposition 2.6.1 *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique localement convexe.*

Si U est un voisinage absolument convexe de 0 dans (E, τ), alors p_U est une semi-norme continue sur E telle que

$$U^\circ = b_{p_U}(< 1) \subset U \subset b_{p_U}(1) = U^-.$$

De plus l'ensemble $\mathrm{cs}(E, \tau)$ est filtrant; il est séparant si et seulement si (E, τ) est séparé.

Preuve. Comme $E = \cup_{m=1}^{\infty} mU$, p_U est une semi-norme sur E. Il s'agit bien d'une semi-norme continue sur (E, τ) car, pour tous $e_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$e \in e_0 + \varepsilon U \Rightarrow |p_U(e) - p_U(e_0)| \leq p_U(e - e_0) \leq \varepsilon.$$

Il est alors clair que $b_{p_U}(< 1)$ est un ouvert inclus dans U donc dans U°. De plus, pour tout $e \in U^\circ$, il existe un voisinage V de 0 tel que $e + V \subset U$ donc $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $(1 + 1/m)e \in U$, ce qui implique $p_U(e) \leq m/(m + 1) < 1$. Au total, nous avons $b_{p_U}(< 1) = U^\circ$.

De même, il est clair que $b_{p_U}(1)$ est un fermé contenant U donc U^-. De plus, pour tout $e \in b_{p_U}(1)$ et tout voisinage V de 0, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $-e/m \in V$. On a alors $(1 - 1/m)e \in b_{p_U}(< 1) \subset U$, ce qui implique $(e + V) \cap U \neq \emptyset$. Au total, nous avons $b_{p_U}(1) = U^-$.

De plus, si p et q sont deux semi-normes continues sur (E, τ), l'ensemble $U = b_p(< 1) \cap b_q(< 1)$ est un voisinage de 0 et p_U est une semi-norme continue sur (E, τ) telle que

$$p_U(e) < 1 \Rightarrow (p(e) < 1 \text{ et } q(e) < 1)$$

donc telle que $\sup\{p, q\} \leq p_U$.

Enfin, d'une part, si (E, τ) est séparé, alors, pour tout $e \in E$ non nul, il existe un voisinage U de 0 ne contenant pas e donc pour lequel $p_U(e) > 1$. D'autre part, si l'ensemble des semi-normes continues sur (E, τ) est séparant, alors, pour tout couple d'éléments distincts e, f de E, on a $e - f \neq 0$ et il existe une semi-norme continue p sur E telle que $r = p(e - f) > 0$ donc tel que les voisinages $b_p(e; < r/2)$ de e et $b_p(f; < r/2)$ de f soient disjoints.∎

Théorème 2.6.2 *Soit (E, P) un espace vectoriel à semi-normes et, pour tout $e \in E$, désignons par $\mathcal{V}(e)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent une semi-boule $b_p(e; r)$ avec $p \in P$ et $r > 0$.*

Alors $\mathcal{V}$ définit une topologie localement convexe τ_P sur E (par les voisinages), cette topologie τ_P étant séparée si et seulement si P est séparant.

Preuve. Il est clair que $\mathcal{V}$ définit une topologie sur E.

Que cette topologie τ_P soit vectorielle résulte aussitôt de ce que, avec des notations claires par elles-mêmes, on a

$$p(e_0 + f_0 - e - f) \leq p(e_0 - e) + p(f_0 - f)$$

et

$$p(c_0 e_0 - ce) \leq |c_0|\, p(e_0 - e) + |c_0 - c|\, p(e_0 - e) + |c_0 - c|\, p(e_0).$$

Enfin cette topologie τ_P est localement convexe puisque pour tous $e \in E$, $p \in P$ et $r > 0$, $b_p(e; < r)$ est un ensemble convexe.

L'affirmation relative à la séparation est immédiate.∎

Théorème 2.6.3 *Si P et Q sont des ensembles de semi-normes sur l'espace vectoriel E, alors*

a) *τ_P est plus fin que τ_Q si et seulement si P est plus fort que Q,*

ii) *τ_P est équivalent à τ_Q si et seulement si P est équivalent à Q.*

Preuve. Cela découle aussitôt du résultat comparant semi-boules et semi-normes.∎

Théorème 2.6.4 a) *Si P est un ensemble filtrant de semi-normes sur l'espace vectoriel E, alors l'espace vectoriel topologique localement convexe (E, τ_P) est tel que* $\mathrm{cs}(E, \tau_P) \simeq P$.

b) *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique localement convexe,* $\mathrm{cs}(E, \tau)$ *est un ensemble filtrant de semi-normes sur E tel que $\tau_{\mathrm{cs}(E,\tau)} = \tau$.*

Preuve. a) est trivial.

b) Si $p_1, p_2 \in \mathrm{cs}(E, \tau)$, alors $U = b_{p_1}(< 1) \cap b_{p_2}(< 1)$ est un voisinage absolument convexe et ouvert de 0 dans (E, τ). Dès lors, p_U appartient à $\mathrm{cs}(E, \tau)$ et donne lieu à

$$p_U(e) < 1 \Rightarrow (p_1(e) < 1 \text{ et } p_2(e) < 1)$$

donc est tel que $\sup\{p_1, p_2\} \leq p_U$. Cela étant, $\mathrm{cs}(E, \tau)$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur E. La vérification de $\tau_{\mathrm{cs}(E,\tau)} = \tau$ est directe.∎

Définition. Un *espace à semi-normes* (E, P) est un espace vectoriel E muni de la topologie localement convexe τ_P définie par un ensemble filtrant et séparant P de semi-normes sur E.

Les résultats qui précèdent établissent qu'**il y a équivalence entre les notions d'espace localement convexe et d'espace à semi-normes**.

Remarque. Deux points de vue se dégagent donc: espace localement convexe (E, τ) et espace à semi-normes (E, P). Il s'agit de ne pas les opposer mais au contraire d'en utiliser la complémentarité. Cela sera particulièrement clair lorque nous parlerons d'un espace localement convexe (E, P) ou de $\mathrm{cs}(E, \tau)$.

Théorème 2.6.5 *Une semi-norme q sur l'espace à semi-normes (E, P) est continue si et seulement s'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $q \leq Cp$ sur E.*

Preuve. Cela résulte aussitôt de la comparaison des semi-boules.∎

$* \rightarrow$ Au point de vue topologique, les espaces localement convexes ont une structure fort riche.

Théorème 2.6.6 *Tout espace localement convexe est complètement régulier et séparé.*

Inversement tout espace complètement régulier séparé est homéomorphe à une partie d'un espace localement convexe séparé.

Preuve. D'une part, si $e_0 \in E$ n'appartient pas au fermé F de l'espace localement convexe E, il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ et $r > 0$ tels que $b_p(e_0; r) \cap F = \emptyset$. On vérifie alors directement que la fonction

$$f : E \to \mathbb{K}; \quad e \mapsto \sup \left\{ 0, \chi_E(e) - \frac{1}{r} p(e_0 - e) \right\}$$

est continue sur E et telle que $0 \leq f \leq \chi_E$, $f(e_0) = 1$ et $f(F) = \{0\}$.

Inversement soit X un espace complètement régulier séparé. Pour tout $x \in X$,

$$\delta_x \colon \mathrm{C}_0(X) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto f(x)$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{C}_0(X)$. Il suffit alors de vérifier que

$$\delta \colon X \to \mathrm{C}_0(X)^*_s; \quad x \mapsto \delta_x$$

est en fait un homéomorphisme entre X et δX.∎← *

La comparaison de topologies localement convexes sur une partie absolument convexe est gérée par les deux résultats suivants qui vont en s'affinant.

Proposition 2.6.7 *Soient (E, P) et (E, Q) deux espaces à semi-normes et A une partie absolument convexe de E, alors*

$$\tau_P|_A \leq \tau_Q|A \Longleftrightarrow \tau_P|_A \leq \tau_Q|_A \text{ en } 0.$$

Preuve. La nécessité de la condition est triviale.

La condition est nécessaire. Soient $e \in A$, $p \in P$ et $r > 0$. Il existe alors $q \in Q$ et $s > 0$ tels que $b_p(r/2) \supset b_q(s) \cap A$. Dès lors, pour tout $f = e + g \in (e + b_q(s)) \cap A$, on a $g \in (2A) \cap b_q(s)$ donc $g \in b_p(r)$ et ainsi on a obtenu

$$(e + b_q(s)) \cap A \subset e + b_p(r).∎$$

Proposition 2.6.8 (Wengenroth) *Soient (E, P), (E, Q) des espaces à semi-normes et A une partie absolument convexe de E.*

S'il existe $\pi \in P$ et $\rho > 0$ tels que

$$\tau_P|_{A \cap b_\pi(\rho)} \leq \tau_Q|_{A \cap b_\pi(\rho)} \text{ en } 0,$$

alors on a $\tau_P|_A \leq \tau_Q|_A$.

Preuve. Pour tous $p \in P$ et $r > 0$, il existe $q \in Q$ et $s > 0$ tels que

$$b_q(s) \cap A \cap b_\pi(\rho) \subset b_p(r) \cap b_\pi(\rho/2).$$

Pour conclure, il suffit alors de prouver que $b_q(s) \cap A \subset b_\pi(\rho)$. Or si e appartient à $(b_q(s) \cap A) \setminus b_\pi(\rho)$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^{-n}e \in b_\pi(\rho)$ et $2^{-n+1}e \notin b_\pi(\rho)$. Comme A et $b_q(s)$ sont absolument convexes, cela entraine

$$2^{-n}e \in b_q(s) \cap A \cap b_\pi(\rho) \subset b_\pi(\rho/2)$$

donc $2^{-n+1}e \in b_\pi(\rho)$, ce qui est contradictoire. D'où la conclusion.∎

Définition. L'espace à semi-normes (E, P) est

a) *normé* si P est équivalent à une norme sur E,

b) *à semi-normes dénombrables* si P est équivalent à un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur E.

Si on désire insister sur le fait qu'un espace à semi-normes n'est pas à semi-normes dénombrables, on dit qu'il est à semi-normes non dénombrables.

Convention. Sauf mention explicite du contraire, à partir de maintenant, la notation (E, P) ou même E tout simplement désigne un espace à semi-normes dont P est l'ensemble des semi-normes naturelles soumis aux conditions suivantes:
a) si (E, P) est un espace normé, P désigne un ensemble réduit à une seule norme $\|.\|$ équivalente à P et on écrit plus précisément $(E, \|.\|)$ au lieu de (E, P).
b) si (E, P) est à semi-normes dénombrables, P désigne un ensemble dénombrable $\{\, p_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ de semi-normes telles que $p_m \leq p_{m+1}$ sur E pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
c) de toute façon P est toujours supposé filtrant et séparé.

Théorème 2.6.9 *Un espace localement convexe (E, P) est à semi-normes dénombrables si et seulement s'il est métrisable.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si P est équivalent à $\{p_m \colon m \in \mathbb{N}_0\}$, la fonction

$$d \colon E \times E \to \mathbb{R}; \quad (e, f) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(e-f)}{1 + p_m(e-f)}$$

est une métrique sur E car on a
a) $d(e, f) \geq 0$ pour tous $e,\ f \in E$;
b) $d(e, f) = d(f, e)$ pour tous $e,\ f \in E$;
c) $d(e, g) \leq d(e, f) + d(f, g)$ pour tous $e,\ f,\ g \in E$. Cela résulte aussitôt du fait que la fonction $x/(1 + x)$ est continue et croissante sur $]-1, +\infty[$ car on a

$$\frac{p_m(e-g)}{1 + p_m(e-g)} \leq \frac{p_m(e-f) + p_m(f-g)}{1 + p_m(e-f) + p_m(f-g)} \leq \frac{p_m(e-f)}{1 + p_m(e-f)} + \frac{p_m(f-g)}{1 + p_m(f-g)}$$

pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $e,\ f,\ g \in E$;
d) $d(e, f) = 0$ si et seulement si $e = f$.
Cette métrique est moins fine que τ_P sur E : pour tous $e \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^{-M} \leq \varepsilon/2$ et $r > 0$ tel que $r/(1 + r) \leq \varepsilon/2$; au total, on a alors

$$\{f \in E \colon d(e, f) \leq \varepsilon\} \supset \{f \in E \colon p_M(e-f) \leq r\}.$$

Cette métrique est aussi plus fine que τ_P car, pour tous $e \in E$, $m \in \mathbb{N}_0$ et $r > 0$, on a bien sûr

$$\{f \in E\colon p_m(e-f) \leq r\} \supset \{f \in E\colon d(e,f) \leq 2^{-m}\frac{r}{1+r}\}.$$

La condition est suffisante. Soit d une métrique sur E induisant une topologie équivalente à τ_P. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe alors $p_m \in P$ et $r_m > 0$ tels que

$$\{e \in E\colon d(e,0) \leq 1/m\} \supset \{e \in E\colon p_m(e) \leq r_m\}.$$

Cela étant, $\{p_m\colon m \in \mathbb{N}_0\}$ est un ensemble de semi-normes sur E, plus faible que P. Il est aussi plus fort que P car, pour tous $p \in P$ et $r > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\{e \in E\colon p(e) \leq r\} \supset \{e \in E\colon d(e,0) \leq 1/m\}$$

donc tel que $p \leq (r/r_m)p_m$.∎

Remarque. Il convient de remarquer qu'un espace vectoriel métrique n'est pas nécessairement localement convexe. Dans la preuve de la suffisance, nous avons utilisé le fait que la métrique est équivalent à une topologie vectorielle localement convexe. Pour une caractérisation de ces métriques, cf. [2] I, Proposition I.3.1.

2.7 Exemples

Exemples. Nous avons bien sûr les espaces normés usuels suivants :

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$,
$(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$,
$(\mathrm{C}_0(K), \|\cdot\|_K)$,
$(\mathrm{L}^p(A), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$.

Voici ensuite quelques exemples usuels d'espaces localement convexes non normés.

Exemple. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m\colon \omega \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sup\{\, |x_j| : j = 1, \ldots, m \,\}$$

est une semi-norme sur ω et $P = \{\, p_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ système de semi-normes sur ω.

L'*espace* ω est l'espace localement convexe (ω, P).

Exemple. Pour tout $y \in \omega$,

$$p_y \colon \phi \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} |y_m x_m|$$

est une semi-norme sur ϕ et $P = \{ p_y : y \in \omega \}$ un système de semi-normes sur ϕ.

L'*espace* ϕ est l'espace localement convexe (ϕ, P).

Exemple. Soit F un fermé non compact de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un entier $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $F \cap \{ x : |x| \leq m_0 \} \neq \emptyset$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons $K_m = \{ x \in F : |x| \leq m + m_0 \}$. Cela étant,

$$p_m \colon \mathrm{C}_0(F) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \sup \{ |f(x)| : x \in F, |x| \leq m + m_0 \}$$

est une semi-norme sur $\mathrm{C}_0(F)$ et $P = \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ un système de semi-normes sur $\mathrm{C}_0(F)$. (Il convient de remarquer que, chacun des K_m est une partie compacte de F et que, pour tout compact K inclus dans F, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m$.)

L'*espace* $\mathrm{C}_0(F)$ est l'espace localement convexe $(\mathrm{C}_0(F), P)$.

On dit qu'on a muni l'espace $\mathrm{C}_0(F)$ de la *convergence compacte.*

Exemple. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Nous savons qu'il existe une suite K_m de compacts réguliers tels que $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et que $\Omega = \cup_{m=1}^{\infty} K_m$. Remarquons que, dès lors, pour tout compact K inclus dans Ω, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m$.

a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m \colon \mathrm{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \|f\|_{K_m}$$

est une semi-norme sur $\mathrm{C}_0(\Omega)$ et $P = \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ un système de semi-normes sur $\mathrm{C}_0(\Omega)$.

L'*espace* $\mathrm{C}_0(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(\mathrm{C}_0(\Omega), P)$.

On dit qu'on a muni l'espace $\mathrm{C}_0(\Omega)$ de la *convergence compacte.*

b) Soit $L \in \mathbb{N}_0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m \colon \mathrm{C}_L(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \sup \left\{ \|\mathrm{D}^\alpha f\|_{K_m} : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq L \right\}$$

est une semi-norme sur $\mathrm{C}_L(\Omega)$ et $P = \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ un système de semi-normes sur $\mathrm{C}_L(\Omega)$.

L'*espace* $\mathrm{C}_L(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(\mathrm{C}_L(\Omega), P)$.

c) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m \colon \mathrm{C}_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \sup \left\{ \|\mathrm{D}^\alpha f\|_{K_m} : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \right\}$$

est une semi-norme sur $\mathrm{C}_\infty(\Omega)$ et $P = \{\, p_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ un système de semi-normes sur $\mathrm{C}_\infty(\Omega)$.

L'*espace* $\mathrm{C}_\infty(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(\mathrm{C}_\infty(\Omega), P)$.

d) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m \colon \mathrm{L}^{1,2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \|f\chi_{K_m}\|_{1,2,\infty}$$

est une semi-norme sur $\mathrm{L}^{1,2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $P = \{\, p_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ un système de semi-normes sur $\mathrm{L}^{1,2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

L'*espace* $\mathrm{L}^{1,2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(\mathrm{L}^{1,2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega), P)$.

2.8 Opérateurs linéaires continus

Théorème 2.8.1 *Si (E,P) et (F,Q) sont des espaces localement convexes et si T est un opérateur linéaire de E dans F, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *T est continu;*

(b) *T est continu en 0;*

(c) *pour tout $q \in Q$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $q(T\cdot) \leq Cp(\cdot)$.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) est trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c). Comme $T0 = 0$, pour tout $q \in Q$, il existe $p \in P$ et $r > 0$ tels que $Tb_p(r) \subset b_q(1)$ donc tels que $(p(e) \leq r \Rightarrow q(Te) \leq 1)$, ce qui suffit.

(c) $\Rightarrow$ (a). De fait, pour tout $e_0 \in E$ et tout $r > 0$, l'image par T de $b_p(e_0; r/C)$ est incluse dans $b_q(Te_0; r)$ vu que

$$p(e - e_0) \leq \frac{r}{C} \Rightarrow q(Te - Te_0) = q(T(e - e_0)) \leq Cp(e - e_0) \leq r. \blacksquare$$

En fait, cette preuve s'étend sans peine aux ensembles d'opérateurs linéaires de la manière suivante.

Théorème 2.8.2 *Si (E,P) et (F,Q) sont des espaces localement convexes et si $\mathcal{A}$ est un ensemble d'opérateurs linéaires de E dans F, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *$\mathcal{A}$ est équicontinu;*

(b) *$\mathcal{A}$ est équicontinu en 0;*

(c) *pour tout $q \in Q$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $\sup_{T \in \mathcal{A}} q(T\cdot) \leq Cp(\cdot)$.* $\blacksquare$

Notations. Si E et F sont des espaces localement convexes, la notation $\mathrm{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F.

Il est clair qu'il s'agit d'un sous-espce vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et que $\mathrm{L}(E,E)$, abrégé en $\mathrm{L}(E)$, est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2.9 Opérateurs linéaires relativement ouverts

Définitions. Soient (E, P) et (F, Q) deux espaces localement convexes.

Un opérateur linéaire T de (E, P) dans (F, Q) est

a) *relativement ouvert* si l'image par T de tout ouvert de (E, P) est ouverte dans $\operatorname{im}(T)$,

b) *ouvert* si l'image par T de tout ouvert de (E, P) est ouverte dans (F, Q), c'est-à-dire si et seulement si T est surjectif et relativement ouvert.

Théorème 2.9.1 *Soient (E, P) et (F, Q) deux espaces localement convexes.*

Si T est un opérateur linéaire de (E, P) dans (F, Q), alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) *T est relativement ouvert;*

(b) *pour tout $p \in P$, il existe $q \in Q$ et $r > 0$ tels que*

$$b_q(< r) \cap \operatorname{im}(T) \subset T b_p(< 1);$$

(c) *pour tout $p \in P$, il existe $q \in Q$ et $C > 0$ tels que*

$$\inf_{h \in \ker(T)} p(e + h) \leq C q(Te), \quad \forall e \in E.$$

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) est trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c). Pour tout $e_1 \in E$ tel que $q(Te_1) < r$, il existe $e_2 \in b_p(< 1)$ tel que $Te_1 = Te_2$ donc tel que $e_1 - e_2 \in \ker(T)$. Il s'ensuit que

$$q(Te_1) < r \Rightarrow \inf_{h \in \ker(T)} p(e_1 + h) \leq p(e_2) < 1$$

et $C = 1/r$ convient.

(c) $\Rightarrow$ (a). Pour tout élément e_0 d'un ouvert Ω de (E, P), il existe $p \in P$ et $r > 0$ tels que $b_p(e_0; < r) \subset \Omega$. Dans ces conditions, (c) implique que

$$b_q(Te_0; < r/C) \cap \operatorname{im}(T) \subset T b_p(e_0; < r) \subset T\Omega. \blacksquare$$

Corollaire 2.9.2 *Tout projecteur linéaire d'un espace localement convexe est relativement ouvert.*

Preuve. De fait, si T est un projecteur linéaire de l'espace localement convexe (E, P), alors, pour tout $p \in P$, il vient

$$\inf_{h \in \ker(P)} p(e + h) \leq p(e - e + Te) = p(Te), \quad \forall e \in E,$$

car $-e + Pe$ appartient à $\ker(P)$. $\blacksquare$

Définitions. Soient E, F des espaces localement convexes.

a) Un *homomorphisme* entre E et F est un opérateur linéaire continu et relativement ouvert de E dans F.

b) Un *isomorphisme* entre E et F est une bijection linéaire continue et ouverte; c'est donc une bijection linéaire continue et admettant un inverse continu.

On dit alors que les espaces E et F sont *isomorphes.*

c) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces normés, une *isométrie entre E et F* est une bijection linéaire de E dans F qui conserve la norme (c'est-à-dire que $\|T\cdot\|_F = \|\cdot\|_E$).

On dit alors que ces espaces sont *isométriques.*

2.10 Espaces de dimension finie

L'étude des espaces localement convexes de dimension finie se ramène en fait à celle des espaces $\mathbb{K}^J$ avec $J \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.10.1 *Tout opérateur linéaire de $\mathbb{K}^J$ dans un espace localement convexe est continu.*

Preuve. De fait, si T est un opérateur linéaire de $\mathbb{K}^J$ dans l'espace localement convexe (F, Q), il vient

$$q(Tc) = q\left(\sum_{j=1}^{J} c_j T\epsilon_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} |c_j| \cdot q(T\epsilon_j) \leq \left(\sum_{j=1}^{J} q(T\epsilon_j)^2\right)^{1/2} \cdot |c| \,.$$

pour tout $q \in Q$ et tout $c \in \mathbb{K}^J$. ∎

Théorème 2.10.2 *Un espace localement convexe E de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{K}^{\dim(E)}$ et est donc un espace normé.*

Plus précisément, si $\{e_1, \ldots, e_J\}$ est une base de l'espace localement convexe de dimension finie (E, P), alors

$$I \colon \mathbb{K}^J \to E \quad (c_1, \ldots, c_J) \mapsto \sum_{j=1}^{J} c_j e_j$$

est un isomorphisme.

Preuve. Nous savons bien que I est une bijection linéaire. Sa continuité résulte aussitôt de la proposition précédente.

Etablissons que (E, P) est normé et que I^{-1} est continu. Si $J = 0$, c'est trivial. Si $J > 1$, il existe $e_1 \in E$ non nul donc aussi $p_1 \in P$ tel que $p_1(e_1) \neq 0$ et par conséquent, $L_1 = \{e \in E \colon p_1(e) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $J - 1$ au plus. Après J telles opérations au plus, on détermine des semi-normes $p_j \in P$ en nombre $\leq J$ telles que

$$(e \in E, p_j(e) = 0 \ \forall j) \Rightarrow e = 0.$$

Il existe ensuite $p \in P$ et $C > 0$ tels que $\sum_{(j)} p_j \leq Cp$. Cela étant, p est une norme continue sur (E, P) et $p(I\cdot)$ une fonction réelle et continue sur $\mathbb{K}^J$ admettant une borne inférieure r réalisée sur la sphère unité (compacte). On a donc $r > 0$ et par conséquent

$$r \leq p(I\frac{c}{|c|}) \quad \text{donc} \quad |c| \leq \frac{1}{r} p(Ic)$$

pour tout $c \in \mathbb{K}^J$ non nul, la dernière inégalité étant valable pour $c = 0$ aussi. Au total, il vient

$$\left|I^{-1}e\right| \leq \frac{1}{r} p(e), \quad \forall e \in E,$$

ce qui assure la continuité de I^{-1}. L'équivalence de p avec P s'en déduit aussitôt.∎

Chapitre 3

Constructions simples d'espaces localement convexes

3.1 Sous-espaces

Définition. Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace localement convexe (E, P), il est clair que $P_L = \{p|_L : p \in P\}$ est un système de semi-normes sur L qu'on note bien souvent tout simplement P également.

On dit alors que (L, P) est un *sous-espace* (sous-entendu *localement convexe*) de (E, P).

Il est clair que l'injection canonique de (L, P) dans (E, P) est continue et relativement ouverte.

Proposition 3.1.1 *Soient (E, P), (F, Q) des espaces localement convexes et soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, E)$ des opérateurs tels que $ST \in \mathrm{L}(E)$.*

a) *Si S est injectif et relativement ouvert, alors T est continu.*

b) *Si T est surjectif et relativement ouvert, alors S est continu.*

Preuve. a) De fait, pour tout ouvert Ω de (F, Q),

$$T^{-1}\Omega = T^{-1}S^{-1}S\Omega = (ST)^{-1}S\Omega$$

est un ouvert de (E, P).

b) De fait, pour tout ouvert Ω de (E, P),

$$S^{-1}\Omega = TT^{-1}S^{-1}\Omega = T(ST)^{-1}\Omega$$

est un ouvert de (F, Q).∎

Proposition 3.1.2 *Soient (E, P), (F, Q) des espaces localement convexes et soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, E)$ des opérateurs tels que ST soit relativement ouvert.*

a) *Si T est surjectif et continu, alors S est relativement ouvert.*

b) *Si S est injectif et continu, alors T est relativement ouvert.*

Preuve. a) De fait, pour tout ouvert Ω de (F, Q), $S\Omega = (ST)T^{-1}\Omega$ est un ouvert dans $\operatorname{im}(ST) = \operatorname{im}(S)$.

b) De fait, pour tout ouvert Ω de (E, P), $T\Omega = S^{-1}(ST)\Omega$ est un ouvert de $\operatorname{im}(T)$ car $(ST)\Omega$ étant ouvert dans $\operatorname{im}(ST)$, il existe un ouvert Ω_1 de (E, P) tel que $(ST)\Omega = \Omega_1 \cap \operatorname{im}(ST)$ donc tel que

$$S^{-1}ST\Omega = (S^{-1}\Omega_1) \cap (S^{-1}\operatorname{im}(ST)) = (S^{-1}\Omega_1) \cap \operatorname{im}(T).\blacksquare$$

3.2 Produits et sommes directes

Convention. Dans ce paragraphe, J est un ensemble non vide et (E_j, P_j) un espace localement convexe pour tout $j \in J$.

Définition. Il est clair que

$$P = \{\sum_{(j)} p_j(\pi_j\cdot) \colon j \in J, p_j \in P_j\}$$

est un système de semi-normes sur $E = \prod_{j \in J} E_j$. L'espace localement convexe (E, P) qui en résulte est appelé *produit direct* des espaces (E_j, P_j) pour $j \in J$ et est noté explicitement

$$\prod_{j \in J}(E_j, P_j).$$

Théorème 3.2.1 a) *Tout produit fini d'espaces normés est normé.*

b) *Tout produit dénombrable d'espaces à semi-normes dénombrables est à semi-normes dénombrables.*$\blacksquare$

Définition. Il est aussi clair que

$$P = \{\sum_{j \in J} r_j p_j(\pi_j\cdot) \colon j \in J, p_j \in P_j, r_j \geq 0\}$$

est un système de semi-normes sur $E = \oplus_{j \in J} E_j$. L'espace localement convexe (E, P) qui en résulte est appelé *somme directe* des espaces (E_j, P_j) pour $j \in J$ et est noté explicitement

$$\bigoplus_{j \in J} (E_j, P_j).$$

Remarque. Si J est fini, ces deux notions coïncident.

Théorème 3.2.2 a) *Pour tout $k \in J$, la k-ème injection canonique*

$$\iota_k \colon (E_k, P_k) \to \bigoplus_{j \in J} (E_j, P_j)$$

est un isomorphisme entre (E_k, P_k) et son image.

b) *L'injection canonique*

$$I \colon \bigoplus_{j \in J} (E_j, P_j) \to \prod_{j \in J} (E_j, P_j)$$

est linéaire et continue.

c) *Pour tout $k \in J$, la k-ème projection canonique*

$$\pi_k \colon \prod_{j \in J} (E_j, P_j) \to (E_k, P_k)$$

est un opérateur linéaire continu et ouvert.∎

Définition. Si L et M sont des sous-espaces vectoriels complémentaires de l'espace localement convexe (E, P), il est clair que

$$q_p \colon L \oplus M \to \mathbb{R} \quad (l, m) \mapsto p(l) + p(m)$$

est une semi-norme sur $L \oplus M = E$ telle que $p \le q_p$. Dès lors, $Q_P = \{q_p \colon p \in P\}$ est un système de semi-normes sur E plus fort que P et $\mathrm{id} \colon (E, Q_P) \to (E, P)$ est une bijection linéaire continue mais n'est pas nécessairement un isomorphisme. S'il s'agit d'un isomorphisme, on dit que E est *somme directe topologique de* (L, P) *et* (M, P).

Théorème 3.2.3 *Si L et M sont des sous-espaces vectoriels complémentaires de l'espace localement convexe (E, P), alors (E, P) est somme directe topologique de (L, P) et (M, P) si et seulement si le projecteur linéaire canonique T de E d'image égale à L et de noyau égal à M est continu.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, pour tout $p_1 \in P$, il existe $p_2 \in P$ et $C > 0$ tels que

$$p_1(Te) \leq p_1(Te) + p_1((\mathrm{id} - T)e) = q_{p_1}(l_e, m_e) \leq Cp_2(e), \quad \forall e \in E.$$

La condition est suffisante. De fait, les opérateurs linéaires T et $\mathrm{id} - T$ sont continus et, pour tout $p_1 \in P$, il existe alors $p_2 \in P$ et $C > 0$ tels que

$$p_1(T\cdot) \leq Cp_2(\cdot) \quad \text{et} \quad p_1((\mathrm{id} - T)\cdot) \leq Cp_2(\cdot)$$

donc tels que

$$q_{p_1}(e) = p_1(Te) + p_1((\mathrm{id} - T)e) \leq 2Cp_2(e), \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

Corollaire 3.2.4 *Si P est un projecteur linéaire continu de l'espace localement convexe E, alors E est somme directe topologique de* $\ker(P)$ *et* $\mathrm{im}(P)$.$\blacksquare$

Définition. Soient L et M deux sous-espaces vectoriels de l'espace localement convexe E. On dit que M est un *complément topologique de L dans E* si E est somme directe topologique de L et M, auquel cas L est aussi un complément topologique de M dans E. Cela a donc lieu si et seulement s'il existe un projecteur linéaire continu de E, d'image égale à L et de noyau égal à M. Il s'ensuit que L et M sont nécessairement des sous-espaces vectoriels fermés de E.

$* \rightarrow$ Il existe cependant des sous-espaces vectoriels fermés d'un espace normé qui n'ont pas de complément topologique.

Ainsi c_0 *n'a pas de complément topologique dans* ℓ^∞.

Pour établir cette propriété, on démontre d'abord qu'à tout élément x de $I = \{ x \in]0, 1[: x \text{ irrationnel} \}$, on peut associer un élément $\alpha(x)$ de $\ell^\infty \setminus c_0$ dont toutes les composantes appartiennent à $\{0, 1\}$ et tel que, si x, $y \in I$ sont distincts, alors $\{ j \in \mathbb{N}_0 : \alpha(x)_j = \alpha(y)_j = 1 \}$ est fini. De fait, on vérifie directement que, si $r(m)$ est une numérotation de l'ensemble des nombres rationnels appartenant à $]0, 1[$, on peut poser

$$\alpha(x)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{ r(0, x_1 \ldots x_m) : m \in \mathbb{N}_0 \}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela étant, on procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un projecteur linéaire continu $P\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ d'image égale à c_0. Nous allons en déduire l'existence de $x \in I$ tel que $\alpha(x) - P\alpha(x) = 0$, ce qui est absurde car cela signifie que $\alpha(x)$ est un élément de $\mathrm{im}(P) = c_0$. Comme I est non dénombrable, il suffit pour cela d'établir que, pour tous j, $k \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble

$$\{ x \in I : [\alpha(x) - P\alpha(x)]_j \geq \tfrac{1}{k} \}$$

est dénombrable. Fixons j, $k \in \mathbb{N}_0$. Il est clair que

$$\tau \colon \ell^\infty \to \mathbb{K} \quad \alpha \mapsto [\alpha - P\alpha]_j$$

est une fonctionnelle linéaire continue: il existe donc $C > 0$ tel que $|\langle \cdot, \tau \rangle| \leq C \|\cdot\|$ sur ℓ^∞. Cela étant, soient $L \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, \ldots, x_L \in I$ tels que $|\langle \alpha(x_l), \tau \rangle| \geq 1/k$ pour tout $l = 1, \ldots, L$. Pour tout $l = 1, \ldots, L$, il existe alors $\alpha^{(l)} \in c_0$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, les nombres $[\alpha(x_1) - \alpha^{(1)}]_m, \ldots, [\alpha(x_L) - \alpha^{(L)}]_m$ soient tous nuls sauf un au plus, égal à 1. Comme on a $\alpha^{(l)} - P\alpha^{(l)} = 0$ pour tout $l = 1, \ldots, L$, il vient alors successivement

$$\begin{aligned}
\frac{L}{k} &\leq \sum_{l=1}^{L} |\langle \alpha(x_l), \tau \rangle| = \sum_{l=1}^{L} \left| \left\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \right\rangle \right| \\
&\leq \left\langle \sum_{l=1}^{L} \frac{\left\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \right\rangle^-}{|\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle|} (\alpha(x_l) - \alpha^{(l)}), \tau \right\rangle \\
&\leq C \left\| \sum_{l=1}^{L} \frac{\left\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \right\rangle^-}{|\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle|} (\alpha(x_l) - \alpha^{(l)}) \right\| = C,
\end{aligned}$$

ce qui suffit. $\leftarrow *$

Proposition 3.2.5 *Si (E, P) et (F, Q) sont des espaces localement convexes, alors $T \in \mathrm{L}(E, F)$ admet un inverse linéaire continu à droite si et seulement si T est ouvert et tel que* $\ker(T)$ *admet un complément topologique dans E.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si $S \in \mathrm{L}(F, E)$ est tel que $TS = \mathrm{id}_F$, alors bien sûr T est surjectif, S injectif et ST est un projecteur linéaire continu donc est relativement ouvert. Vu la partie b) de la proposition 3.1.2, T est ouvert. Pour conclure, il suffit alors de constater que le projecteur linéaire continu ST a $\ker(T)$ pour noyau.

La condition est suffisante. Si L est un complément topologique de $\ker(T)$ dans E, alors $T|_L \colon L \to F$ est une bijection linéaire continue et ouverte; son inverse convient.∎

Proposition 3.2.6 *Si (E, P) et (F, Q) sont des espaces localement convexes, alors $T \in \mathrm{L}(E, F)$ admet un inverse linéaire continu à gauche si et seulement si T est injectif, relativement ouvert et tel que* $\mathrm{im}(T)$ *admet un complément topologique dans F.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si $S \in \mathrm{L}(F, E)$ est tel que $ST = \mathrm{id}_E$, alors bien sûr T est injectif, S surjectif et TS est un projecteur linéaire continu donc est relativement ouvert. Vu la partie a) de la proposition 3.1.2, T est relativement ouvert. Pour conclure, il suffit alors de noter que l'image du projecteur linéaire continu TS est égale à $\mathrm{im}(T)$.

La condition est suffisante. Soit S un projecteur linéaire continu de F, d'image égale à $\mathrm{im}(T)$. Comme $T\colon E \to \mathrm{im}(T)$ est un isomorphisme, $T^{-1}S\colon F \to E$ est un opérateur linéaire continu. Pour conclure, il suffit alors de noter que $T^{-1}ST = \mathrm{id}_E$.∎

3.3 Espace quotient

Proposition 3.3.1 *Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace localement convexe (E, P), alors*

a) *pour toute semi-norme p sur E,*

$$p_L\colon E/L \to \mathbb{R}; \quad e_L \mapsto \inf_{l \in L} p(e + l)$$

est une semi-norme sur E/L;

b) *$P_L = \{p_L\colon p \in P\}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur E/L;*

c) *P_L est un système de semi-normes sur E/L si et seulement si L est fermé.*

Preuve. a) est direct et b) trivial.

c) De fait, on a $p_L(e) \geq r$ avec $p \in P$ et $r > 0$ si et seulement si $b_p(e; < r) \cap L = \emptyset$.∎

Définition. Si L est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace localement convexe E, alors *l'espace quotient E/L* est l'espace localement convexe $(E/L, P_L)$.

Théorème 3.3.2 *Pour tout sous-espace vectoriel fermé L de l'espace localement convexe (E, P), la surjection canonique $s_L\colon E \to E/L$ est continue et ouverte.*

Pour tout $p \in P$, on a $p_L(s_L \cdot) \leq p(\cdot)$ et $s_L b_p(< 1) = \{e_L\colon p_L(e_L) < 1\}$.

De plus, si F est un espace localement convexe, un opérateur linéaire T de E/L dans F est continu si et seulement si $Ts_L\colon E \to F$ est continu.

Preuve. La première partie est triviale et implique évidemment la nécessité de la condition de la deuxième partie.

La condition est aussi suffisante : pour tout $q \in \mathrm{cs}(F)$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $q(Ts_L \cdot) \leq Cp(\cdot)$ sur E donc

$$q(Te_L) = \inf_{l \in L} q(Ts_L(e + l)) \leq C \inf_{l \in L} p(e + l) = Cp_L(e), \quad \forall e \in E.$$∎

Proposition 3.3.3 *Soient L et M des sous-espaces vectoriels fermés des espaces localement convexes E et F respectivement.*

Si $T \in \mathrm{L}(E, F)$ vérifie l'inclusion $TL \subset M$, alors l'opérateur linéaire unique $S \in \mathcal{L}(E/L, F/M)$ tel que $s_M T = S s_L$ est continu.

Preuve. De fait, pour tout $q \in \mathrm{cs}(F)$, il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ et $C > 0$ tels que

$$\begin{aligned} q_M(Se_L) &= \inf_{m \in M} q(Te + m) \\ &\leq \inf_{g \in TL} q(Te + g) \leq C \inf_{l \in L} p(e + l) = C p_L(e_L), \quad \forall e \in E. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 3.3.4 *Soient E, F des espaces localement convexes et $T \colon E \to F$ un opérateur linéaire de noyau fermé.*

Alors la bijection linéaire canonique $T^{\sim} \colon E/\ker(T) \to \mathrm{im}(T)$ est continue (resp. *ouverte*) *si et seulement si T est continu* (resp. *relativement ouvert*).

En particulier, T est un homomorphisme si et seulement si $T^{\sim}$ est un isomorphisme. $\blacksquare$

Chapitre 4

Espaces localement convexes complets

4.1 Parties complètes

Il est clair qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur l'espace localement convexe E converge vers $e_0 \in E$ si et seulement si, pour tous $p \in \mathrm{cs}(E)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $p(e - e_0) \leq \varepsilon$ pour tout $e \in F$.

Définitions. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres sur l'espace localement convexe E et soit c un élément non nul de $\mathbb{K}$. Alors

a) $\{ F_1 + F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2 \}$ est base d'un filtre sur E noté $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ et appelé *somme des filtres* $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

b) $\{ cF : F \in \mathcal{F}_1 \}$ est un filtre sur E, noté $c\mathcal{F}$.

Il est alors clair que *toute combinaison linéaire de filtres convergents sur un espace localement convexe converge vers la combinaison linéaire correspondante des limites.*

Définition. Un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace localement convexe (E, P) est *de Cauchy* si, pour tous $p \in P$ et $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sup_{e,f \in F} p(e - f) \leq \varepsilon.$$

Proposition 4.1.1 *Dans un espace localement convexe, tout filtre convergent est de Cauchy.*

Preuve. Si le filtre $\mathcal{F}$ sur l'espace localement convexe (E, P) converge vers e_0, alors, pour tous $p \in P$ et $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \subset b_p(e_0; \varepsilon/2)$ donc tel que

$$p(e - f) \leq p(e - e_0) + p(e_0 - f) \leq \varepsilon, \quad \forall e, f \in F. \blacksquare$$

La réciproque de cette propriété est fausse. Nous sommes donc amenés à introduire la notion fondamentale suivante.

Définition. Un espace localement convexe E est *complet* si tout filtre de Cauchy sur E converge.

Plus généralement, une partie F d'un espace localement convexe E est *complète* si tout filtre de Cauchy sur F converge vers un point de F.

Proposition 4.1.2 *Soit E un espace localement convexe.*

a) *Toute partie complète de E est fermée.*

b) *Si E est complet, toute partie fermée de E est complète.*

c) *Si Q est un système de semi-normes sur E plus fin que celui de E et si, pour tout $q \in Q$, $b_q(1)$ est un fermé de E, alors toute partie complète de E est complète dans (E, Q).*

Preuve. a) De fait, pour tout $e \in \partial F$, $\{F \cap b_p(e; r) \colon p \in P, r > 0\}$ est la base d'un filtre sur F qui converge vers e.

b) est trivial.

c) est laissé en guise d'exercice.∎

Proposition 4.1.3 a) *Un filtre $\mathcal{F}$ sur l'espace produit direct $\prod_{j \in J} E_j$ est de Cauchy* (resp. *converge vers $(e_j)_{j \in J}$*) *si et seulement si, pour tout $j \in J$, le filtre image $\pi_j \mathcal{F}$ est de Cauchy* (resp. *converge vers e_j*) *dans E_j.*

En particulier, tout produit direct d'espaces localement convexes complets est complet.

b) *Si $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy* (resp. *converge vers e_0*) *dans l'espace localement convexe E et si L est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors le filtre image $s_L \mathcal{F}$ est de Cauchy* (resp. *converge vers $s_L e_0$*) *dans E/L.*∎

4.2 Parties sq-complètes

Remarque. Il est clair que si E est un espace localement convexe,
a) toute sous-suite d'une suite convergente dans E converge vers la même limite;
b) toute combinaison linéaire de suites convergentes de E converge vers la combinaison linéaire correspondante des limites.

Définition. Une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace localement convexe (E, P) est *de Cauchy* si, pour tous $p \in P$ et $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $p(e_r - e_s) \leq \varepsilon$ pour tous r, $s \geq M$.

Cela étant, un espace localement convexe (E, P) est *séquentiellement complet* (en abrégé sq-*complet*) si toute suite de Cauchy de (E, P) converge et une partie F d'un espace localement convexe est *séquentiellement complète* (en abrégé sq-*complète*) si toute suite de Cauchy dans F converge vers un élément de F.

Théorème 4.2.1 *Un espace à semi-normes dénombrables est complet si et seulement s'il est* sq-*complet.*

En particulier, un espace normé est complet si et seulement s'il est sq-*complet.*

Preuve. La nécessité de la condition est triviale.

La condition est suffisante. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur un espace (E, P) à semi-normes dénombrables. Si $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $F_m \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sup_{e,f \in F_m} p_m(e - f) \leq 1/m$$

et nous pouvons même exiger que ces ensembles F_m soient emboîtés en décroissant. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, choisissons un point $e_m \in F_m$. Il est clair que la suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ ainsi construite vérifie $p_m(e_r - e_s) \leq 1/m$ pour tous r, $s \geq m$; elle est donc de Cauchy. Si e_0 est sa limite, on a bien sûr $p_m(e_m - e_0) \leq 1/m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ donc $F_m \subset b_{p_m}(e_0; 2/m)$. Il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est plus fin que le filtre des voisinages de e_0.∎

Remarque. En fait, ce dernier résultat est un cas particulier de la propriété générale suivante : *un espace métrique est complet si et seulement s'il est séquentiellement complet.*

4.3 Espaces de Banach et espaces de Fréchet

Définition. Un *espace de Banach* est un espace normé complet; il revient au même de dire que c'est un espace normé et sq-complet.

Un *espace de Fréchet* est un espace à semi-normes dénombrables et complet; il revient au même de dire que c'est un espace à semi-normes dénombrables et sq-complet.

Exemples. Les espaces

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{R}^n, |\cdot|),\ (\mathbb{C}^n, |\cdot|),\\
&(\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ for } p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\},\\
&(\mathrm{C}_0(K), \|\cdot\|_K),\\
&(\mathrm{L}^p(A), \|\cdot\|_p) \text{ pour } p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}
\end{aligned}$$

sont des espaces de Banach.

Exemples. Les espaces

$$\begin{aligned}&\omega,\\&\mathrm{C}_0(F),\\&\mathrm{C}_L(\Omega) \text{ pour } L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},\\&\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ pour } p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}\end{aligned}$$

sont des espaces de Fréchet.

Proposition 4.3.1 a) *Tout produit direct fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.*

b) *Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.*

c) *Tout espace quotient d'un espace de Banach est de Banach.*

d) *Tout espace quotient d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.*

Preuve. a) et b) sont directs.
c) et d) résultent aussitôt de la propriété suivante.∎

Théorème 4.3.2 (relèvement) *Si (E, P) est un espace à semi-normes dénombrables, alors, pour toute suite $(e_{L,m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ de Cauchy dans l'espace quotient E/L, il existe une sous-suite $(e_{L,k(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ et une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de Cauchy dans E telles que $f_{m,L} = e_{L,k(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.*

Preuve. Soit $P = \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$.
Par extractions successives, nous pouvons déterminer une sous-suite $(e_{L,k(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ telle que

$$p_{m,L}(e_{L,k(r)} - e_{L,k(s)}) < 2^{-m}, \quad \forall r, s \geq m.$$

Cela étant, il suffit de choisir $f_1 \in e_{L,k(1)}$ puis de proche en proche des $f_m \in e_{L,k(m)}$ tels que

$$p_m(f_m - f_{m+1}) < 2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

car alors on a

$$p_m(f_r - f_s) \leq \sum_{k=r}^{s-1} p_k(f_k - f_{k+1}) \leq 2^{-r+1} \leq 2^{-m+1}$$

pour tous $s > r \geq m$.∎

Proposition 4.3.3 *Si L et M sont deux sous-espaces vectoriels de E, le premier de dimension finie et le second fermé, alors $L+M$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.*

Preuve. Nous savons déjà que $L+M$ est un sous-espace vectoriel de E.

De plus, $s_M L$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E/M. C'est donc un sous-espace de Banach et, à ce titre, une partie complète donc fermée de E/M. D'où la conclusion car nous avons $L+M = s_M^{-1}(s_M L)$.■

4.4 Complétion

Théorème 4.4.1 (complétion) *Pour tout espace localement convexe (E,P), il existe un espace localement convexe complet $(\widehat{E},\widehat{P})$ et une injection linéaire, continue, relativement ouverte et d'image dense $\widehat{\iota}\colon E \to \widehat{E}$ telle que tout opérateur linéaire continu de E dans un espace localement convexe complet F admette une représentation $T = \widehat{T}\widehat{\iota}$ avec $\widehat{T} \in \mathrm{L}(\widehat{E},F)$.*

De plus,

a) *si (E_1,P_1) et $\iota_1\colon E \to E_1$ constituent une autre solution, alors l'opérateur $\widehat{\iota_1}\colon \widehat{E} \to E_1$ est un isomorphisme,*

b) *l'opérateur $\widehat{T}$ est unique.*

Preuve. A ce stade de la théorie, on peut donner une démonstration constructive de ce résultat. Cependant cette preuve est techniquement lourde. Aussi nous allons nous limiter à son développement dans le cas d'un espace normé, développement qu'il "suffit" de généraliser pour obtenir le résultat annoncé. Notons aussi qu'il est possible d'en donner une preuve moins lourde mais nécessitant des connaissances supplémentaires non disponibles à ce stade.

Tout revient à déterminer de tels espace $(\widehat{E},\widehat{\|\cdot\|})$ et opérateur $\widehat{\iota}$ car
a) d'une part, l'unicité de $\widehat{T}$ résulte aussitôt de la continuité de $\widehat{T}$ et de la densité de $\mathrm{im}(\widehat{\iota})$ dans $\widehat{E}$,
b) d'autre part, de l'existence de $\widehat{\iota_1}$ et ι_0 tels que $\iota_1 = \widehat{\iota_1}\widehat{\iota}$ et $\widehat{\iota} = \iota_0\iota_1$, on tire $\widehat{\iota} = \iota_0\iota_1 = \iota_0\widehat{\iota_1}\widehat{\iota}$ et $\iota_1 = \widehat{\iota_1}\widehat{\iota} = \widehat{\iota_1}\iota_0\iota_1$, c'est-à-dire que $\iota_0\widehat{\iota_1} = \mathrm{id}_{\widehat{E}}$ et $\widehat{\iota_1}\iota_0 = \mathrm{id}_{E_1}$, d'où il s'ensuit que $\widehat{\iota_1}\colon \widehat{E} \to E_1$ est un isomorphisme.

Définition de $\widehat{E}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy de E muni des opérations

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}; &\qquad ((e_m)_{m\in\mathbb{N}_0},(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}) \mapsto (e_m+f_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \\ \cdot\colon \mathbb{K}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}; &\qquad (c,(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}) \mapsto (ce_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

est, comme on le vérifie directement, un espace linéaire dont l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des suites convergentes vers 0 est un sous-espace vectoriel.

Posons $\widehat{E} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$; $\widehat{E}$ est un espace linéaire.

Définition de $\widehat{\|\cdot\|}$. Pour toute suite e_m de Cauchy dans E, la suite $\|e_m\|$ converge. De plus, sa limite est égale à celle de la suite $\|f_m\|$ si on a $(e_m) \sim (f_m)$ car ceci

signifie que la suite $e_m - f_m$ converge vers 0. Nous pouvons donc introduire la fonction
$$\|\cdot\|^\frown \colon \widehat{E} \to \mathbb{R}; \quad (e_m)^\sim_{m\in\mathbb{N}_0} \mapsto \lim_{m\to\infty} \|e_m\| \,.$$

On vérifie alors aussitôt que $\|\cdot\|^\frown$est une norme sur $\widehat{E}$.

L'espace $(\widehat{E}, \|\cdot\|^\frown)$ *est de Banach.* Soit $((e_m^{(j)})^\sim_{m\in\mathbb{N}_0})_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy dans l'espace normé $(\widehat{E}, \|\cdot\|^\frown)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un entier $M(j) \in \mathbb{N}_0$ tel que
$$\left\| e_{M(j)}^{(j)} - e_m^{(j)} \right\| \leq \frac{1}{j}, \quad \forall m \geq M(j).$$

Cela étant, établissons tout d'abord que la suite $(e_{M(j)}^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Bien sûr, pour tous r, s, $p \in \mathbb{N}_0$, nous avons
$$\left\| e_{M(r)}^{(r)} - e_{M(s)}^{(s)} \right\| \leq \left\| e_{M(r)}^{(r)} - e_p^{(r)} \right\| + \left\| e_p^{(r)} - e_p^{(s)} \right\| + \left\| e_p^{(s)} - e_{M(s)}^{(s)} \right\| .$$
Ensuite il existe N_1 tel que
$$r, s \geq N_1 \Rightarrow \left\| (e_m^{(r)})^\sim_{m\in\mathbb{N}_0} - (e_m^{(s)})^\sim_{m\in\mathbb{N}_0} \right\|^\frown \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
puis, pour tous r, $s \geq N_1$, il existe N_2 tel que
$$m \geq N_2 \Rightarrow \left\| e_m^{(r)} - e_m^{(s)} \right\| \leq \varepsilon.$$
Cela étant, pour tous r, $s \geq N_1$, il vient
$$\left\| e_{M(r)}^{(r)} - e_{M(s)}^{(s)} \right\| \leq \frac{1}{r} + \varepsilon + \frac{1}{s}$$
en recourant à un entier $p \geq \sup\{M(r), N_2, M(s)\}$.

Pour conclure, établissons que la suite de Cauchy de départ converge dans $\widehat{E}$ vers $(e_{M(j)}^{(j)})^\sim_{j\in\mathbb{N}_0}$. Soit $\varepsilon > 0$. Bien sûr, pour tous j, $r \in \mathbb{N}_0$, nous avons
$$\left\| e_r^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)} \right\| \leq \left\| e_r^{(j)} - e_{M(j)}^{(j)} \right\| + \left\| e_{M(j)}^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)} \right\| .$$
Ensuite, il existe N_1 tel que
$$j, r \geq N_1 \Rightarrow \left\| e_{M(j)}^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Cela étant, il vient
$$\left\| (e_r^{(j)})^\sim_{r\in\mathbb{N}_0} - (e_{M(r)}^{(r)})^\sim_{r\in\mathbb{N}_0} \right\|^\frown = \lim_{r\to\infty} \left\| e_r^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)} \right\| \leq \frac{1}{j} + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $j \geq N_1$, ce qui suffit.

Définition de $\widehat{\imath}$. On vérifie directement que l'opérateur $\widehat{\imath}: E \to \widehat{E}$ qui, a tout $e \in E$, associe la classe de la suite constante $(e_m = e)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une injection linéaire, continue et relativement ouverte, dont l'image est dense dans $\widehat{E}$.

Vérification. Soit T un opérateur linéaire continu de E dans un espace de Banach F.

i) Définition de $\widehat{T}$. Pour toute suite de Cauchy e_m de E, on vérifie directement que la suite Te_m est de Cauchy donc converge dans F. Comme l'image par T de toute suite convergente vers 0 dans E converge vers 0 dans F, il est clair que, si les suites e_m et $e_{1,m}$ appartiennent à la même classe de $\widehat{E}$, alors les limites des suites Te_m et $Te_{1,m}$ sont égales. Il est donc licite de définir $\widehat{T}((e_m)_{m \in \mathbb{N}_0})^{\sim}$ comme étant la limite dans F de la suite Te_m.

ii) $\widehat{T}\widehat{\imath} = T$ est trivial.

iii) $\widehat{T} \in \mathrm{L}(\widehat{E}, F)$ est immédiat.∎

Chapitre 5

Parties remarquables d'un espace localement convexe

5.1 Densité et séparabilité

Définitions. Si A et D sont deux parties de l'espace localement convexe E,

a) et si q est une semi-norme sur E, D est *dense pour q dans A* si, pour tout $e \in A$ et tout $r > 0$, il existe $f \in D$ tel que $p(e - f) \leq r$.

b) D est *dense dans A* si $D^- \supset A$; il revient au même de dire que D est dense dans A pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$.

Définitions. Une partie A de l'espace localement convexe E est

a) *séparable pour la semi-norme q* sur E si elle contient une partie dénombrable et dense pour q dans A;

b) *séparable par semi-norme* si elle est séparable pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$;

c) *séparable* si elle contient une partie dénombrable et dense dans A.

Proposition 5.1.1 a) *Toute partie d'un espace vectoriel E séparable pour la semi-norme q, est séparable pour q.*

b) *Si (E, P) est un espace à semi-normes dénombrables, toute partie séparable par semi-norme de E est séparable.*

En particulier, toute partie d'un espace à semi-normes dénombrables séparable par semi-norme est séparable.

Preuve. a) Adapter la preuve du paragraphe I.6 de [17].

b) Soient $P = \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ et A une partie séparable par semi-norme de E. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe une partie dénombrable D_m de A dense pour p_m dans

A. Cela étant, on vérifie de suite que $D = \cup_{m=1}^{\infty} D_m$ est une partie dénombrable de A, qui est dense dans A.▮

Exercice. Etablir que les espaces $\mathrm{C}_0(K)$, $\mathrm{C}_0(F)$ et $\mathrm{C}_L(\Omega)$ sont séparables. Qu'en est-il pour les espaces $\mathrm{L}^p(\Omega)$ et $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$?

Définitions. Soit E un espace localement convexe.

a) Si q est une semi-norme sur E, une *partie totale pour q dans E* est une partie de E dont l'enveloppe linéaire est dense pour q dans E.

b) Une *partie totale dans E* est une partie de E dont l'enveloppe linéaire est dense dans E.

Exercice. Etablir que :
a) $\{ x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n \}$ est total dans $\mathrm{C}_L(\mathbb{R}^n)$ quel que soit $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
b) $\left\{ \mathrm{e}^{imx} : m \in \mathbb{N} \right\}$ est total dans $\mathrm{L}^2(]0, 2\pi[)$.

(Se rappeler les propriétés de totalité des polynômes de Legendre, des fonctions de Laguerre et des fonctions d'Hermite.)

5.2 Bornés

Définition. Un *borné* de l'espace localement convexe E est une partie B de E telle que

$$\sup_{e \in B} p(e) < \infty, \quad \forall p \in \mathrm{cs}(E).$$

(Il ne s'agit pas d'une propriété topologique mais bien d'une propriété localement convexe.) Un partie de E est donc bornée si et seulement si elle est absorbée par toute semi-boule de E centrée en 0.

Bien sûr,
a) toute partie finie de E est bornée;
b) pour toute suite de Cauchy $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de E, $\{ e_m : m \in \mathbb{N} \}$ est un borné de E;
c) toute réunion finie de bornés est bornée;
d) toute partie d'un borné est bornée;
e) l'enveloppe absolument convexe fermée d'un borné est bornée;
f) toute combinaison linéaire de bornés est bornée;
g) toute image linéaire continue d'un borné est bornée.

Les notions de suites convergentes et de bornés sont intimement liées.

Proposition 5.2.1 *Si B est une partie de l'espace localement convexe E, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *B est borné;*

(b) *pour toute suite $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{K}$ qui converge vers 0 et toute suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de B, on a $c_m e_m \to 0$ dans E;*

(c) *il existe une suite $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{K}_0$ qui converge vers 0 telle que, pour toute suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de B, on a $c_m e_m \to 0$ dans E.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) et (b) $\Rightarrow$ (c) sont triviaux.

(c) $\Rightarrow$ (a) : par contraposition. Si B n'est pas borné, il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ et une suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de B tels que $p(e_m) \geq 1/\left|c_m\right|$ donc telle que $p(c_m e_m) \geq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.∎

Bien sûr, si E est un espace normé, toutes ses boules sont bornées. En fait, cette propriété caractérise les espaces normés.

Proposition 5.2.2 *Si une semi-boule de la semi-norme q sur l'espace localement convexe E est bornée dans E, alors q est une norme sur E et $\{q\}$ est plus fort que $\mathrm{cs}(E)$.*

Preuve. Si $e + b_q(r)$ est borné dans E, $b_q(r)$ l'est également. Dès lors, pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, il existe $C_p > 0$ tel que $(q(e) \leq r \Rightarrow p(e) \leq C_p)$ donc tel que $p \leq (C_p/r)q$.∎

Corollaire 5.2.3 *Pour tout borné absolument convexe B de l'espace localement convexe E, p_B est une norme sur l'enveloppe linéaire de B et y est plus forte que $\mathrm{cs}(E)$.*∎

Définitions. Ce dernier corollaire nous conduit à introduire les notions suivantes où B désigne un borné absolument convexe de l'espace localement convexe E.

a) On utilise la notation $\|\cdot\|_B$ en lieu et place de p_B et on désigne par E_B l'espace normé $(\mathrm{span}(B), \|\cdot\|_B)$.

b) On dit que B est *complétant* ou encore que B est un *disque de Banach* si E_B est un espace de Banach.

c) Une suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est
c.i) *Mackey convergente vers $e \in E$* s'il existe un borné absolument convexe B de E tel que $e_m \to e$ dans E_B;
c.ii) *très convergente vers $e \in E$* s'il existe un disque de Banach B de E tel que $e_m \to e$ dans E_B.

Proposition 5.2.4 *Soit B un borné absolument convexe de l'espace localement convexe E.*

a) *Si B est complétant, alors, pour tout $C > 1$ et toute suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de B, la série $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}e_m$ converge dans E_B, donc dans E, vers un élément de CB.*

b) *S'il existe $C > 1$ tel que, pour toute suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de B, la série $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}e_m$ converge dans E vers un élément de CB, alors B est complétant.*

En particulier, tout borné absolument convexe sq-*complet est un disque de Banach.*

Preuve. a) D'une part, la série est de Cauchy dans E_B car on a

$$\sum_{m=r}^{s} 2^{-m}e_m \in \sum_{m=r}^{s}(2^{-m}B) = (\sum_{m=r}^{s} 2^{-m})B$$

donc $\|\sum_{m=r}^{s} 2^{-m}e_m\|_B \leq \sum_{m=r}^{s} 2^{-m}$ pour tous r, $s \in \mathbb{N}_0$ tels que $r \leq s$. D'autre part, pour tout $C > 1$, sa limite appartient à CB car la majoration précédente donne notamment $\left\|\sum_{m=1}^{M} 2^{-m}e_m\right\|_B \leq 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ donc $\|\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}e_m\|_B \leq 1$.

b) Soit $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy dans E_B. Par une extraction à la Cauchy, on en obtient une sous-suite $(e_{k(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ telle que $\left\|e_{k(m+1)} - e_{k(m)}\right\|_B < 2^{-m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dans ces conditions, la suite

$$e_{k(M+1)} = e_{k(1)} + \sum_{m=1}^{M} 2^{-m}2^{m}(e_{k(m+1)} - e_{k(m)}), \quad \text{pour } M \in \mathbb{N}_0,$$

converge dans E vers un point du type $e_{k(1)} + e$ avec $e \in CB$. En fait, cette convergence a lieu dans E_B car on a alors

$$\begin{aligned}&\left\|e_{k(1)} + e - e_{k(1)} - \sum_{m=1}^{M} 2^{-m}2^{m}(e_{k(m+1)} - e_{k(m)}\right\|_B \\ &\qquad = 2^{-M}\left\|\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}2^{M+m}(e_{k(M+m+1)} - e_{k(M+m)})\right\|_B \leq 2^{-M}C\end{aligned}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$.∎

Bien sûr, toute suite très convergente est Mackey convergente vers la même limite et toute suite Mackey convergente converge vers la même limite.

Proposition 5.2.5 *Si E est un espace à semi-normes dénombrables, toute suite convergente est Mackey convergente vers la même limite.*

Si E est un espace de Fréchet, toute suite convergente est très convergente vers la même limite.

Preuve. Il suffit de prouver que si la suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E, alors il existe une suite $r_m \uparrow \infty$ telle que la suite $(r_m e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ soit bornée car alors la suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E_B pour $B = \overline{\Gamma}(\{\, r_m e_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\})$.

Or, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un entier M_j tel que $p_j(e_m) \leq 2^{-2j}$ pour tout $m \geq M_j$ et nous pouvons évidemment supposer ces M_j strictement croissants. On vérifie alors sans peine que les nombres r_m suivants

$$r_m = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq m \leq M_1, \\ 2^j & \text{si} \quad M_j < m \leq M_{j+1} \quad (j \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

conviennent.∎

Remarque. Une démonstration analogue établit que *si E est un espace à semi-normes dénombrables, alors, pour toute suite $(B_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de bornés de E, il existe un borné absolument convexe B de E qui absorbe chacun des B_m.*

Définition. Une partie absolument convexe de l'espace localement convexe E est *bornivore* si elle absorbe tout borné de E.

Une telle partie est nécessairement absorbante puisque toute partie finie est bornée.

Proposition 5.2.6 *Une partie absolument convexe d'un espace localement convexe E est bornivore si et seulement si elle absorbe toutes les suites Mackey convergentes vers* 0.

De manière équivalente, une semi-norme sur E est bornée sur tous les bornés de E si et seulement si elle est bornée sur toutes les suites Mackey convergentes vers 0*.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante. Si une telle partie A n'absorbe pas le borné B, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $e_m \in B$ tel que $e_m \notin m^2 A$. Cela étant, la suite $(e_m/m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E_B et ne peut être absorbée par A. D'où une contradiction.∎

5.3 Précompacts

Définition. Une partie K de l'espace localement convexe E est

a) *précompacte pour la semi-norme q sur E* si, pour tout $r > 0$, il existe une partie finie A de E telle que $K \subset A + b_q(r)$;

b) *précompacte* si elle est précompacte pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$. (Il ne s'agit pas d'une propriété topologique mais bien d'une propriété uniforme, c'est-à-dire liée à la structure d'espace uniforme de E.)

Remarque. Dans la définition précédente, on peut remplacer $b_q(r)$ par $b_q(< r)$ et supposer $A \subset K$ ou $A \subset D$ si D est dense pour q dans K.

Bien sûr,
a) pour toute suite de Cauchy $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dans E, $\{\, e_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ est un précompact de E;
b) tout borné de dimension finie est précompact;
c) toute partie d'un précompact (pour q) est précompacte (pour q);
d) toute réunion finie de précompacts (pour q) est précompacte (pour q);
e) toute image linéaire continue d'un précompact (pour q) est précompacte (pour q).

Proposition 5.3.1 a) *Toute combinaison linéaire de précompacts (pour q) est précompacte (pour q).*

b) *L'enveloppe absolument convexe fermée d'un précompact (pour q) est précompacte (pour q).*

Preuve. a) Soient K_1 et K_2 deux précompacts pour q. D'une part, K_1+K_2 est précompact pour q car, pour tout $r > 0$, il existe des parties finies A_1 et A_2 de E telles que $K_j \subset A_j+b_q(r/2)$ pour $j = 1$ et $j = 2$ donc telles que $K_1+K_2 \subset (A_1+A_2)+b_q(r)$. D'autre part, pour $c = 0$, $cK_1 = \{0\}$ est précompact pour q et, pour tous $c \in \mathbb{K}_0$ et $r > 0$, il existe une partie finie A de E telle que $K_1 \subset A + b_q(r/|c|)$ donc telle que $cK_1 \subset cA + b_q(r)$.

b) Soit K un précompact pour q. Pour tout $r > 0$, il existe une partie finie A de E telle que $K \subset A + b_q(r/2)$. Comme $\Gamma(A)$ est un borné de dimension finie, il est précompact pour q et il existe une partie finie B de E telle que $\Gamma(A) \subset B + b_q(r/2)$ donc telle que $\overline{\Gamma}(K) \subset B + b_q(r)$ car ce dernier ensemble est fermé comme réunion finie de fermés et que $\Gamma(K) \subset \Gamma(A + b_q(r/2)) \subset \Gamma(A) + b_q(r)$.∎

Proposition 5.3.2 a) *Tout précompact est borné.*

b) *Tout précompact pour q est séparable pour q.*

Dès lors tout précompact est séparable par semi-norme et tout précompact d'un espace à semi-normes dénombrables est séparable.∎

Critère 5.3.3 *Une partie K est précompacte pour q si et seulement si, de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite de Cauchy pour q.*

En particulier, si E est un espace à semi-normes dénombrables, une partie K de E est précompacte si et seulement si, de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite de Cauchy.

Preuve. Adapter la preuve de la propriété correspondante des espaces métriques (cf. [17]).∎

Théorème 5.3.4 (Riesz) *L'espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement s'il existe une norme sur E dont une boule est précompacte pour cette norme.*

Preuve. La nécessité de la condition est connue.

La condition est suffisante. Si la boule $e + b(r)$ est précompacte, il est clair que la boule $b(1)$ l'est également. Choisissons $\varepsilon \in]0, 1[$. Il existe alors une partie finie $A = \{e_1, \ldots, e_J\}$ de E telle que $b(1) \subset A + b(\varepsilon)$, donc telle que

$$b(1) \subset A + \varepsilon A + \cdots + \varepsilon^m A + \varepsilon^{m+1} b(1), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Il s'ensuit que, pour tout $e \in b(1)$, il existe une suite $(n(m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que

$$e = e_{n(1)} + \varepsilon e_{n(2)} + \cdots + \varepsilon^m e_{n(m+1)} + \varepsilon^{m+1} h_m$$

avec $h_m \in b(1)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors la série $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m e_{n(m)}$ converge vers e alors que sa limite est aussi égale à

$$(\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ n(m)=1}} \varepsilon^m) e_1 + \cdots + (\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ n(m)=J}} \varepsilon^m) e_J. ∎$$

Théorème 5.3.5 *Si E est un espace à semi-normes dénombrables, alors, pour tout précompact K de E et toute partie D partout dense dans E, il existe une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de D qui converge vers 0 et telle que, pour tout $e \in K$, il existe une suite $(r_m(e))_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $[0, \infty[$ telle que*

a) *la série $\sum_{m=1}^{\infty} r_m(e) e_m$ converge vers e;*

b) $\sum_{m=1}^{\infty} r_m(e) \leq 1$ *et même* $\sup_{e \in K} \sum_{m=M}^{\infty} r_m(e) \to 0$ *si* $M \to \infty$.

En particulier, si E est un espace à semi-normes dénombrables, tout précompact est inclus dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite convergente vers 0.

Preuve. Soit $\{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ un système de semi-normes compatible avec la topologie de E. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons $b_m = b_{p_m}(< 2^{-2m})$ et remarquons que $2^{-m} D$ est aussi partout dense dans E.

Comme K est précompact, il existe $m_1 \in \mathbb{N}_0$ et $f_1, \ldots, f_{m_1} \in 2^{-1} D$ tels que $K \subset \{f_1, \ldots, f_{m_1}\} + b_1$. Cela étant, posons $e_j = 2^1 f_j$ pour $j = 1, \ldots, m_1$ et, pour tout $e \in K$, $r_j(e) = 2^{-1}$ si j est le premier entier $\leq m_1$ tel que $e - 2^{-1} e_j \in b_1$ et $r_j(e) = 0$ sinon. De la sorte, nous avons

$$p_1(e - \sum_{j=1}^{m_1} r_j(e) e_j) < 2^{-2.1}, \quad \forall e \in K.$$

Il est alors aisé de déterminer de proche en proche des $m_k \in \mathbb{N}_0$, des $e_j \in D$ pour $m_{k-1} < j \leq m_k$ et des $r_j(e)$ pour $m_{k-1} < j \leq m_k$ et $e \in K$ au moyen de la récurrence suivante.Si les $m_1, \ldots, m_k$, les e_j pour $j \leq m_k$ et les $r_j(e)$ pour $j \leq m_k$ et $e \in K$ sont déterminés,

$$K_k = \left\{ e - \sum_{j=1}^{m_k} r_j(e)e_j : e \in K \right\}$$

est précompact car inclus dans $K - \Gamma(\{e_1, \ldots, e_{m_k}\})$. Dès lors, il existe $m_{k+1} > m_k$ et des $f_{m_k+1}, \ldots, f_{m_{k+1}} \in 2^{-k-1}D$ tels que

$$K_k \subset \{f_{m_k+1}, \ldots, f_{m_{k+1}}\} + b_{k+1}.$$

De plus, comme K_k est inclus dans b_k, nous pouvons supposer que $f_{m_k+1}, \ldots, f_{m_{k+1}}$ appartiennent à b_k. Cela étant, posons $e_j = 2^{k+1}f_j$ pour $m_k < j \leq m_{k+1}$ et, pour tout $e \in K$ et tout $j_0 \in \{m_k + 1, \ldots, m_{k+1}\}$, $r_{j_0}(e) = 2^{-k-1}$ si j_0 est le premier de ces entiers pour lequel

$$e - \sum_{j=1}^{m_k} r_j(e)e_j - 2^{-k-1}e_{j_0} \in b_{k+1}$$

et $r_{j_0} = 0$ sinon.

On vérifie alors aisément que les e_j et $r_j(e)$ ainsi choisis conviennent.∎

5.4 Extractables

Définition. Un espace topologique K est *extractable* s'il est séparé et si, de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

On établit aussitôt les exemples suivants :
a) toute partie finie d'un espace topologique séparé est extractable;
b) si la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de l'espace topologique séparé T converge vers t_0, alors $\{ t_m : m \in \mathbb{N} \}$ est extractable.

On établit aisément les propriétés suivantes :
a) toute partie sq-fermée d'un extractable est extractable;
b) toute partie extractable d'un espace topologique séparé est sq-fermée;
c) toute réunion finie de parties extractables d'un espace topologique séparé est extractable;
d) toute intersection dénombrable d'extractables non vides emboîtés en décroissant est extractable et non vide (théorème de Cantor);
e) toute image sq-continue et séparée d'un extractable est extractable;
f) toute bijection sq-continue entre deux extractables a un inverse sq-continu;
g) tout produit dénombrable d'extractables est extractable.

5.5 Compacts

Rappelons tout d'abord quelques résultats relatifs aux parties compactes ou extractables d'un espace métrisable (cf. [17]).

Théorème 5.5.1 *Si l'espace topologique (K, τ) est métrisable, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *K est compact;*

(b) *K est extractable;*

(c) *pour toute métrique d équivalente à τ sur K, (K, d) est précompact et séquentiellement complet,*

(d) *il existe une métrique d équivalente à τ sur K pour laquelle (K, d) est précompact et séquentiellement complet.*■

Corollaire 5.5.2 *Si l'espace topologique (K, τ) est extractable et si d est une métrique sur K moins fine que τ, alors d est équivalent à τ et (K, τ) est compact.*

Preuve. Pour tout $x \in K$ et tout τ-ouvert Ω contenant x, $K \setminus \Omega$ est τ-extractable donc d-extractable et par conséquent d-compact. Il s'ensuit que Ω est d-ouvert, ce qui suffit.■

Cela étant, dans le cas où E est à semi-normes dénombrables, on a donc le résultat suivant.

Théorème 5.5.3 *Si E est un espace à semi-normes dénombrables, les assertions suivantes portant sur une partie K de E sont équivalentes :*

(a) *K est compact;*

(b) *K est extractable;*

(c) *K est précompact et séquentiellement complet.*

En particulier, si E est un espace de Fréchet, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *K est compact;*

(b) *K est extractable;*

(c) *K est précompact et fermé.*■

Théorème 5.5.4 *Tout borné fermé de dimension finie d'un espace localement convexe est compact et extractable.*■

Passons à présent aux propriétés générales des compacts et des extractables dans les espaces localement convexes.

Proposition 5.5.5 *Toute combinaison linéaire de compacts* (resp. *d'extractables*) *d'un espace localement convexe est compacte* (resp. *extractable*).

Preuve. Avec des notations claires par elles-mêmes, il suffit de remarquer que $\sum_{j=1}^{J} c_j K_j$ est l'image de l'application continue

$$u\colon \prod_{j=1}^{J} K_j \to E \quad (e_1, \ldots, e_J) \mapsto \sum_{j=1}^{J} c_j e_j. \blacksquare$$

Lemme 5.5.6 *Si le compact K et l'ouvert Ω de l'espace localement convexe E sont tels que $K \subset \Omega$, il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ tel que $K + b_p(1) \subset \Omega$.*

Preuve. Pour tout $e \in K$, il existe $p_e \in \mathrm{cs}(E)$ tel que $e + b_{p_e}(1) \subset \Omega$. Du recouvrement ouvert $\{ b_{p_e}(e, < 1/2) : e \in K \}$, on peut extraire un recouvrement fini. S'il correspond aux éléments $e_1, \ldots, e_J$, il suffit de poser $p = 2 \sup\{p_{e_1}, \ldots, p_{e_J}\}$.$\blacksquare$

Proposition 5.5.7 *Dans un espace localement convexe E, la somme d'un compact et d'un fermé est fermée, celle d'un extractable et d'un séquentiellement fermé est séquentiellement fermée.*

Preuve. Soient K un compact et F un fermé de E. Pour tout $e \in E \setminus (F + K)$, le fermé $e - F$ est disjoint de K. Cela étant, le lemme précédent procure $p \in \mathrm{cs}(E)$ tel que $(e - F) \cap (K + b_p(1) = \emptyset$ donc tel que $(e + b_p(1)) \cap (K + F) = \emptyset$, ce qui suffit.

Soient K un extractable et F un séquentiellement fermé de E. Pour toutes suites $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de K et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de F telles que la suite $e_m + f_m$ converge vers g dans E, il existe une sous-suite $(e_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément e de K. Dès lors, la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans E vers $g - e \in F$, ce qui suffit.$\blacksquare$

Proposition 5.5.8 *L'enveloppe absolument convexe d'une réunion finie de compacts* (resp. *d'extractables*) *absolument convexes est compacte* (resp. *extractable*).

Preuve. De fait, si $J \in \mathbb{N}_0$ et si $K_1, \ldots, K_J$ sont des compacts (resp. extractables) absolument convexes de E, l'enveloppe absolument convexe de $\cup_{j=1}^{J} K_j$ est égale à l'image par l'opérateur linéaire continu

$$T\colon \mathbb{K}^J \times E^J \to E \quad (c_1, \ldots, c_J, e_1, \ldots, e_J) \mapsto \sum_{j=1}^{J} c_j e_j$$

du compact (resp. de l'extractable)

$$\left\{ (c_1, \ldots, c_J) \in \mathbb{K}^J : \sum_{j=1}^{J} |c_j| \leq 1 \right\} \times K_1 \times \cdots \times K_J. \blacksquare$$

Proposition 5.5.9 a) *L'enveloppe absolument convexe d'un compact de dimension finie est compacte.*

b) *Dans un espace de Fréchet, l'enveloppe absolument convexe fermée d'un compact est compacte.*

Preuve. a) Soit $n \in \mathbb{N}_0$ la dimension de l'enveloppe linéaire du compact K de E. On sait alors que l'enveloppe absolument convexe de K est l'image par l'opérateur linéaire continu

$$T : \mathbb{K}^{p+1} \times E^{p+1} \to E; \quad (c_1, \ldots, c_{p+1}, e_1, \ldots, e_{p+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{p+1} c_j e_j$$

du compact

$$\left\{ (c_1, \ldots, c_{p+1}) : \sum_{j=1}^{p+1} |c_j| \leq 1 \right\} \times K^{p+1}$$

avec $p = n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $p = 2n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

b) De fait, c'est une partie précompacte et fermée d'un espace de Fréchet.$\blacksquare$

Remarque. En général, l'enveloppe absolument convexe fermée d'un compact n'est pas compacte.

Exercice. Etablir que tout extractable dénombrable d'un espace localement convexe est compact et qu'il existe sur l'enveloppe linéaire de K un système de semi-normes dénombrable et plus faible que $\mathrm{cs}(E)|_{\mathrm{span}(K)}$, donc équivalent à $\mathrm{cs}(E)$ sur K. (difficile)

Terminons ces propriétés par le résultat suivant dont la partie relative aux compacts est particulièrement importante.

Théorème 5.5.10 a) *Une partie d'un espace localement convexe est compacte si et seulement si elle est précompacte et complète.*

b) *Tout extractable d'un espace localement convexe est précompact et séquentiellement complet.*

Preuve. a) La condition est nécessaire. Tout compact K de E est précompact car, pour tous $p \in \mathrm{cs}(E)$ et $r > 0$, $\{ b_p(e, < r) : e \in K \}$ est un recouvrement ouvert de K. Tout compact K de E est complet car tout filtre de Cauchy sur K a un point d'adhérence, qui est nécessairement limite de ce filtre.

La condition est suffisante. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur le précompact complet K de E. Comme K est précompact, $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy car, pour tous $p \in \mathrm{cs}(E)$ et $r > 0$, il existe un recouvrement fini de K au moyen de semi-boules du type $e + b_p(r/2)$ et l'une d'entre elles au moins doit appartenir à $\mathcal{F}$. Comme K est complet, $\mathcal{F}$ converge. Au total, tout ultrafiltre sur K converge, ce qui suffit.

b) Tout extractable de E est évidemment séquentiellement complet. En procédant par l'absurde, on établit aisément qu'il est aussi précompact.∎

Chapitre 6

Fonctionnelles linéaires continues

6.1 Fonctionnelles linéaires continues

Définition. Le *dual* ou *dual topologique* de l'espace localement convexe E est l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur E; il est noté E' et ses éléments sont désignés par $\cdot'$.

Il est clair qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E^* et que la propriété suivante a lieu.

Théorème 6.1.1 *Une fonctionnelle linéaire e^* sur l'espace localement convexe (E, P) est continue si et seulement s'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $|\langle \cdot, e^* \rangle| \leq Cp(\cdot)$ sur E.* ∎

Remarque. Si e' est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$, on a tôt fait de vérifier que

$$\|e'\| = \sup_{\|e\| \leq 1} |\langle e, e' \rangle|$$

est une norme sur E'.

Dans le cas d'un espace localement convexe, la situation est un peu plus délicate et sera examinée plus tard.

Proposition 6.1.2 a) *Si e^* est une fonctionnelle linéaire non nulle sur un espace localement convexe E, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *e^* est continu;*

(2) $\ker(e^*)$ *est fermé;*

(3) *il existe une semi-boule b de E telle que $\langle b, e^* \rangle \neq \mathbb{K}$.*

b) *Une fonctionnelle linéaire non nulle e^* sur un espace localement convexe E n'est pas continue si et seulement si son noyau est partout dense dans E.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) est bien connu.

(2) $\Rightarrow$ (3). De fait, tout $e \in E \setminus \ker(e^*)$ est le centre d'une semi-boule b disjointe de $\ker(e^*)$ donc telle que $\langle b, e^* \rangle \neq \mathbb{K}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). De fait, si $c \notin \langle b_p(e_0; r), e^* \rangle$, alors il vient $c - \langle e_0, e^* \rangle \notin \langle b_p(r), e^* \rangle$ donc

$$p(e) \leq r \Rightarrow |\langle e, e^* \rangle| \leq |c - \langle e_0, e^* \rangle| \,,$$

ce qui suffit.

b) La condition est nécessaire. De fait, si $\ker(e^*)$ n'est pas partout dense, il existe $e \in E \setminus (\ker(e^*))^-$ et e est alors le centre d'une semi-boule b telle $\langle b, e^* \rangle \neq \mathbb{K}$.

La condition est suffisante car, si e^* est continu et a un noyau partout dense, on doit avoir $\ker(e^*) = E$, c'est-à-dire $e^* = 0$.∎

Remarque. Si l'espace normé E est de dimension finie, nous savons que toute fonctionnelle linéaire sur E est continue: on a $E' = E^*$.

Par contre, si l'espace normé E n'est pas de dimension finie, l'inclusion $E' \subset E^*$ est stricte. Il existe en effet une suite e_m d'éléments de E qui sont linéairement indépendants. Il existe donc une base de Hamel B de E contenant $\{\, e_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$. Cela étant, la fonctionnelle linéaire e^* sur E définie par $\langle e, e^* \rangle = 0$ si $e \in B \setminus \{\, e_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ et $\langle e_m, e^* \rangle = m \, \|e_m\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ n'est pas continue.□

Théorème 6.1.3 (structure du dual) a) *Pour tout* $\beta \in \ell^1$ (resp. ℓ^∞, ℓ^2, ℓ^1),

$$\tau_\beta \colon c_0 \text{ (resp. } \ell^1,\, \ell^2,\, \ell^\infty) \to \mathbb{C} \quad \alpha \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur c_0 (resp. ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞) *telle que* $\|\tau_\beta\| = \|\beta\|$.

b) *En fait, l'application*

$$\tau \colon \ell^1 \text{ (resp. } \ell^\infty,\, \ell^2) \to (c_0)' \text{ (resp. } (\ell^1)',\, (\ell^2)') \quad \beta \mapsto \tau_\beta$$

est une isométrie.

Preuve. a) est aisé et laissé en guise d'exercice.

b) est plus délicat et sera traité aux séances de répétition.∎

Remarque. D'autres théorèmes de structure du dual d'espaces localement convexes seront examinés selon les disponibilités horaires et les besoins.

En cas de besoin, on peut recourir à la bibliographie et notamment au troisième tome de [5].

La question de l'"ouverture" des fonctionnelles linéaires est régie par la propriété suivante.

Proposition 6.1.4 *Toute fonctionnelle linéaire non nulle sur un espace localement convexe est ouverte.*

Preuve. Nous savons déjà que toute fonctionnelle linéaire non nulle e^* sur un espace localement convexe (E, P) est surjective. De plus, si $e_0 \in E$ est tel que $\langle e_0, e^* \rangle \neq 0$, nous savons aussi que E est somme directe des sous-espaces vectoriels algébriquement complémentaires $\ker(e^*)$ et $\operatorname{span}(\{e_0\})$ et qu'il existe $c \in \mathbb{K}$ non nul et tel que $\langle e, e^* \rangle = cc_e$ pour tout $e \in E$ si $e = h_e + c_e e_0$ est la décomposition canonique de e. Dès lors, pour tout $e \in E$, nous avons successivement

$$\inf_{h \in \ker(e^*)} p(e+h) = \inf_{h \in \ker(e^*)} p(c_e e_0 + h) \leq |c_e|\, p(e_0) \leq \frac{p(e_0)}{|c|} \left| \langle e, e^* \rangle \right|, \quad \forall e \in E,$$

ce qui suffit pour conclure.∎

6.2 Théorème de Hahn-Banach, analytique

Lemme 6.2.1 *Soit L un sous-espace $\mathbb{R}$-vectoriel de l'espace $\mathbb{R}$-vectoriel E. Si $p\colon E \to \mathbb{R}$ vérifie*

$$p(re) = rp(e) \text{ et } p(e+f) \leq p(e) + p(f), \quad \forall e, f \in E, \forall r \geq 0,$$

et si $l^*\colon L \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et tel que $\langle \cdot, l^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur L, alors il existe un prolongement $\mathbb{R}$-linéaire $e^*\colon E \to \mathbb{R}$ de l^* tel que $\langle \cdot, e^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur E.

Preuve. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (f^*, F) où F est un sous-espace $\mathbb{R}$-vectoriel de E contenant L et où f^* est une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire sur F qui prolonge l^* et telle que $\langle \cdot, f^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur F.

Cet ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas vide car il contient (l^*, L). De plus, la relation interne $\leq$ définie par

$$((f_1^*, F_1) \leq (f_2^*, F_2)) \iff (F_1 \subset F_2 \text{ et } f_2^*|_{F_1} = f_1^*)$$

y est une relation d'ordre. Enfin toute partie totalement ordonnée A de $(\mathcal{E}, \leq)$ est bien sûr majorée par (f^*, F) où $F = \cup\{\, G : (g^*, G) \in A \,\}$ et où $f^*|_G = g^*$ pour tout $(g^*, G) \in A$. Vu le lemme de Zorn, $(\mathcal{E}, \leq)$ a un élément maximal (f^*, F) et, pour conclure, il suffit de prouver que $F = E$.

Si F diffère de E, choisissons un point $e_0 \in E \setminus F$. Cela étant, nous allons établir l'existence d'un élément de $\mathcal{E}$ du type (f_0^*, F_0) tel que $F_0 = F + \operatorname{span}(\{e_0\})$ et $f_0^*|_F = f^*$, ce qui est contradictoire avec la maximalité de (f^*, F^*).

Nous savons que tout élément e de F_0 admet une décomposition unique

$$e = f_e + r_e e_0 \text{ avec } f_e \in F \text{ et } r_e \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, f_s^* défini sur F_0 par

$$\langle e, f_s^* \rangle = \langle f_e, f^* \rangle + r_e s, \quad \forall e \in F_0,$$

est bien sûr une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire sur F_0 qui prolonge f^*. Tout revient donc à prouver l'existence de $s \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \cdot, f_s^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur F_0.

Or, pour tous f_1, $f_2 \in F$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle f_1, f^* \rangle + \langle f_2, f^* \rangle \;=\; \langle f_1 + f_2, f^* \rangle &\leq p(f_1 + f_2) \\ &\leq p(f_1 - e_0) + p(e_0 + f_2) \end{aligned}$$

donc

$$\langle f_1, f^* \rangle - p(f_1 - e_0) \leq p(e_0 + f_2) - \langle f_2, f^* \rangle, \quad \forall f_1, f_2 \in F.$$

Pour $s_0 = \sup \{ \langle f_1, f^* \rangle - p(f_1 - e_0) : f_1 \in F \}$, il vient alors

$$\langle f, f^* \rangle - s_0 \leq p(f - e_0) \;\text{ et }\; \langle f, f^* \rangle + s_0 \leq p(e_0 + f), \quad \forall f \in F.$$

Pour conclure, il suffit alors de noter que
a) pour $r > 0$, il vient successivement

$$\left\langle f + re_0, f_{s_0}^* \right\rangle = r(\langle f/r, f^* \rangle + s_0) \leq rp(f/r + e_0) = p(f + re_0),$$

b) pour $r < 0$, il vient successivement

$$\left\langle f + re_0, f_{s_0}^* \right\rangle = |r| \left(\langle f/|r|, f^* \rangle - s_0\right) \leq |r| \, p(f/|r| - e_0) = p(f + re_0). \blacksquare$$

Théorème 6.2.2 (Hahn-Banach) *Soient p une semi-norme sur l'espace vectoriel E et L un sous-espace vectoriel de E.*

Pour toute fonctionnelle linéaire l' sur L pour laquelle $|\langle \cdot, l' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur L, il existe une fonctionnelle linéaire e' sur E qui prolonge l' et telle que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E.

Preuve.

1. *Cas des espaces $\mathbb{R}$-vectoriels*

Vu le lemme, l' admet un prolongement $\mathbb{R}$-linéaire e' sur E tel que $\langle \cdot, e' \rangle \leq p(\cdot)$ sur E. Pour tout $e \in E$, on a donc

$$\langle e, e' \rangle \leq p(e) \;\text{ et }\; -\langle e, e' \rangle = \langle -e, e' \rangle \leq p(-e) = p(e),$$

ce qui suffit.

2. *Cas des espaces $\mathbb{C}$-vectoriels*

Etablissons d'abord deux résultats auxiliaires.

Proposition 6.2.3 *Si e' est une fonctionnelle $\mathbb{C}$-linéaire sur l'espace $\mathbb{C}$-vectoriel E, alors*

$$\Re e' \colon E \to \mathbb{R} \quad e \mapsto \langle e, \Re e' \rangle = \Re \langle e, e' \rangle$$

est une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire telle que

a) $\langle \cdot, e' \rangle = \langle \cdot, \Re e' \rangle - i \langle i \cdot, \Re e' \rangle$,

b) *si la semi-norme p sur E est telle que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E, alors on a aussi $|\langle \cdot, \Re e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E.*∎

Proposition 6.2.4 *Si $e'_{\mathbb{R}}$ est une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace $\mathbb{C}$-vectoriel E, alors*

$$e' \colon E \to \mathbb{C} \quad e \mapsto \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle$$

est une fonctionnelle $\mathbb{C}$-linéaire sur E telle que

a) $\Re e' = e'_{\mathbb{R}}$,

b) *si la semi-norme p sur E est telle que $|\langle \cdot, e'_{\mathbb{R}} \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E, alors on a aussi $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E.*

Preuve. D'une part, pour tous $e \in E$ et $c \in \mathbb{C}$, on a successivement

$$\begin{aligned} \langle ce, e' \rangle &= \langle ce, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ice, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \Re c \cdot \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle + \Im c \cdot \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle + i \Im c \cdot \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \Re c \cdot \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \Re c \cdot \langle e, e' \rangle + i \Im c \cdot \langle e, e' \rangle . \end{aligned}$$

D'autre part, pour tous e_1, $e_2 \in E$, on a successivement

$$\begin{aligned} \langle e_1 + e_2, e' \rangle &= \langle e_1 + e_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie_1 + ie_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \langle e_1, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie_1, e'_{\mathbb{R}} \rangle + \langle e_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \langle e_1, e' \rangle + \langle e_2, e' \rangle \end{aligned}$$

Au total, e' est une fonctionnelle $\mathbb{C}$-linéaire sur E.

Cela étant,

a) est trivial,

b) de fait, pour tout $e \in E$ tel que $\langle e, e' \rangle \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} |\langle e, e' \rangle| &= \mathrm{e}^{-i \arg \langle e, e' \rangle} \langle e, e' \rangle \\ &= \left\langle \mathrm{e}^{-i \arg \langle e, e' \rangle} e, e'_{\mathbb{R}} \right\rangle \leq p(e). \end{aligned}$$∎

Etablissons à présent le théorème de Hahn-Banach dans le cas des espaces $\mathbb{C}$-vectoriels.

Preuve. L'application $\Re l'$ est une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace $\mathbb{R}$-vectoriel sous-jacent à L. Vu le théorème de Hahn-Banach relatif aux espaces $\mathbb{R}$-vectoriels, il existe donc une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire $e'_{\mathbb{R}}$ sur l'espace $\mathbb{R}$-vectoriel sous-jacent à E, qui prolonge $\Re l'$ et telle que $|\langle \cdot, e_{\mathbb{R}} \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E. On en déduit de suite que la fonctionnelle $\mathbb{C}$-linéaire

$$e' \colon E \to \mathbb{C} \quad e \mapsto \langle e, e' \rangle = \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \, \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle$$

convient.∎

6.3 Premières conséquences

Commençons par énoncer un cas particulier du théorème de Hahn-Banach, suffisant la plupart du temps.

Théorème 6.3.1 *Toute fonctionnelle linéaire continue sur un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe E admet un prolongement linéaire continu sur E.*∎

Voici à présent quelques conséquences aisées mais fort importantes du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 6.3.2 *Pour tout élément non nul e de l'espace localement convexe (E, P) et tout $p \in P$ tel que $p(e) \neq 0$, il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e, e' \rangle = p(e)$ et $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$.*

Preuve. On vérifie de suite que

$$l' \colon \mathrm{span}(\{e\}) \to \mathbb{K} \quad ce \mapsto cp(e)$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathrm{span}(\{e\})$ telle que $|\langle \cdot, l' \rangle| \leq p(\cdot)$. Le théorème de Hahn-Banach permet alors de conclure aussitôt.∎

Théorème 6.3.3 a) *Tout sous-espace vectoriel L de dimension finie d'un espace localement convexe E a un complément topologique.*

b) *Tout sous-espace vectoriel L fermé et de codimension finie d'un espace localement convexe E admet un complément topologique.*

Preuve. a) Soit $\{e_1, \ldots, e_J\}$ une base de L. On sait qu'il existe $l'_1, \ldots, l'_J \in L'$ tels que $\langle e_j, l'_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous j, $k \in \{1, \ldots, J\}$. Si, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, e'_j est un prolongement linéaire continu de l'_j sur E, on vérifie de suite que

$$P \colon E \to E \quad e \mapsto \sum_{j=1}^{J} \langle e, e'_j \rangle \, e_j$$

est un projecteur linéaire continu sur E, d'image égale à L.

b) Soit $\{e_1, \ldots, e_J\}$ une cobase de L dans E. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$,

$$L_j = L + \operatorname{span}(\{\, e_k : 1 \leq k \leq J, k \neq j \,\})$$

est un sous-espace vectoriel fermé et de codimension 1 dans E. Il s'ensuit que, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, l'application

$$e'_j \colon E \to \mathbb{K} \quad e \mapsto c_{j,e}$$

si $e = l_{j,e} + c_{j,e} e_j$ est la décomposition unique de e selon $L_j + \operatorname{span}(\{e_j\})$ est une fonctionnelle linéaire continue car son noyau $\ker(e'_j) = L_j$ est fermé. Cela étant, on vérifie de suite que

$$P \colon E \to E \quad e \mapsto \sum_{j=1}^{J} \langle e, e'_j \rangle \, e_j$$

est un projecteur linéaire continu sur E, de noyau égal à L.∎

Proposition 6.3.4 *Pour tout sous-espace vectoriel fermé L de l'espace localement convexe E et tout $e \in E \setminus L$, il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e, e' \rangle = 1$ et $\langle L, e' \rangle = \{0\}$.*

En particulier, une partie D de E est totale dans E si et seulement si 0 est la seule fonctionnelle linéaire continue sur E qui s'annule identiquement sur D.

Preuve. Comme L est un sous-espace vectoriel fermé de codimension 1 dans l'espace vectoriel $L_0 = L + \operatorname{span}(\{e_0\})$,

$$l' \colon L_0 \to \mathbb{K} \quad e \mapsto c_e$$

si $e = l_e + c_e e_0$ est la décomposition unique de $e \in L_0$ selon $L + \operatorname{span}(\{e_0\})$, est une fonctionnelle linéaire continue sur L_0 car son noyau est égal à L. Cela étant, tout prolongement linéaire continu de l' sur E convient en guise de e'.∎

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 6.3.5 *Si F est un fermé absolument convexe de l'espace localement convexe (E, P), alors, pour tout $e_0 \in E \setminus F$, il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e_0, e' \rangle > 1$ et $|\langle e, e' \rangle| \leq 1$ pour tout $e \in F$.*

Preuve. Il existe $p \in P$ et $r > 0$ tel que $b_p(e_0; r) \cap F = \emptyset$ donc tel que

$$b_p(e_0; r/2) \bigcap (F + b_p(r/2)) = \emptyset.$$

Comme $A = F + b_p(r/2)$ est une partie absolument convexe et absorbante de E, p_A est une semi-norme sur E. Comme on a $b_p(r/2) \subset A$, p_A est même une semi-norme continue sur (E, P). Enfin il est clair que e_0 n'appartient pas à $b_{p_A}(1)$. Dès lors, toute fonctionnelle linéaire e' sur E telle que $\langle e_0, e' \rangle = p_A(e_0)$ et $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p_A(\cdot)$ sur E convient.∎

Proposition 6.3.6 *Si le dual E' de l'espace normé E est séparable, alors E est séparable.*

Preuve. Soit $D' = \{ e'_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ une partie dénombrable dense de la sphère $\{ e' : \|e'\| = 1 \}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe alors $e_m \in E$ tel que $\|e_m\| = 1$ et $|\langle e_m, e'_m \rangle| \geq 3/4$. Pour conclure, nous allons établir par contradiction que $L = \overline{\mathrm{span}}(\{ e_m : m \in \mathbb{N}_0 \})$ est égal à E. Si ce n'est pas le cas, il existe $e'_0 \in E'$ tel que $\|e'_0\| = 1$ et $\langle l, e'_0 \rangle = 0$ pour tout $l \in L$. Cela étant, il vient

$$\frac{3}{4} \leq |\langle e_m, e'_m \rangle| = |\langle e_m, e'_m - e'_0 \rangle| \leq \|e_m\| \, \|e'_m - e'_0\|$$

alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|e'_m - e'_0\| \leq \varepsilon$. D'où une contradiction.∎

Remarque. $* \rightarrow$ La réciproque de celle propriété est fausse: $E = \ell^1$ est un espace séparable et son dual ℓ^∞ n'est pas séparable.□ $\leftarrow *$

6.4 Théorème de Hahn-Banach, géométrique

Théorème 6.4.1 (Mazur) *Soient L un sous-espace vectoriel et Ω un ouvert non vide et convexe de l'espace localement convexe E.*

Si $\Omega \cap L = \emptyset$, alors il existe un $\mathbb{R}$-hyperplan fermé H de E tel que $L \subset H$ et $\Omega \cap H = \emptyset$.

Preuve. Quitte à remplacer E par son espace $\mathbb{R}$-vectoriel sous-jacent, nous pouvons supposer que E est un espace $\mathbb{R}$-vectoriel.

Choisissons un point e_0 de Ω; $\Omega - e_0$ est alors une partie ouverte et convexe de E, contenant 0. On a tôt fait de vérifier que, d'une part, l'application

$$\varphi \colon E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto \inf \{ r > 0 : e \in r(\Omega - e_0) \}$$

est telle que $\varphi(re) = r\varphi(e)$ et $\varphi(e_1 + e_2) \leq \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$ pour tous e, e_1, $e_2 \in E$ et $r \in [0, +\infty[$, et que, d'autre part, $\Omega - e_0 = \{ e \in E : \varphi(e) < 1 \}$.

Comme L est un sous-espace vectoriel de codimension 1 dans l'espace vectoriel $M = L + \operatorname{span}(\{e_0\})$, nous pouvons définir une fonctionnelle linéaire m' sur M par $\langle e_0, m' \rangle = -1$ et $\langle L, m' \rangle = \{0\}$.

Prouvons que $\langle \cdot, m' \rangle \leq \varphi(\cdot)$ sur M. Il suffit pour cela d'établir que, pour tout $m \in M$ tel que $\varphi(m) < 1$, on a $\langle m, m' \rangle < 1$. Or $\varphi(m) < 1$ avec $m \in M$ a lieu si et seulement si $m \in (\Omega - e_0) \cap M$. Dès lors, il vient

$$\langle m, m' \rangle = \langle -e_0, m' \rangle + \langle m + e_0, m' \rangle = 1 + \langle m + e_0, m' \rangle$$

avec $m + e_0 \in \Omega \cap M$. Pour conclure, prouvons que $\langle m + e_0, m' \rangle < 0$. De fait, si ce n'est pas le cas, l'élément

$$\frac{\langle m + e_0, m' \rangle}{1 + \langle m + e_0, m' \rangle} e_0 + \frac{1}{1 + \langle m + e_0, m' \rangle}(m + e_0)$$

appartient à $\Omega \cap M$ et annule m', ce qui est contradictoire avec $\Omega \cap L = \emptyset$.

Vu le lemme préparatoire au théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement linéaire e' sur E de m' tel que $\langle \cdot, e' \rangle \leq \varphi(\cdot)$ sur E. En fait e' appartient à E' car $0 \in \Omega - e_0$ est le centre d'une semi-boule $b_p(r)$ incluse dans l'ouvert $\Omega - e_0$ sur laquelle φ est majoré par 1: on a donc

$$p(e) \leq r \Longrightarrow (\langle e, e' \rangle \leq \varphi(e) \leq 1 \text{ et } \langle -e, e' \rangle \leq \varphi(-e) \leq 1),$$

ce qui suffit. Cela étant, $\ker(e')$ est un $\mathbb{R}$-hyperplan fermé contenant L. De plus, pour tout $e \in \Omega$, on a

$$\langle e, e' \rangle = \langle e_0, e' \rangle + \langle e - e_0, e' \rangle \leq -1 + \varphi(e - e_0)$$

avec $\varphi(e - e_0) < 1$ donc $\langle e, e' \rangle < 0$, ce qui suffit pour conclure.∎

Théorème 6.4.2 (séparation 1) *Si l'ouvert convexe et non vide Ω, ainsi que la partie convexe et non vide A de l'espace localement convexe E sont disjoints, alors il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\langle e, e' \rangle < r \leq \langle f, e' \rangle, \quad \forall e \in \Omega, \forall f \in A.$$

Si, de plus, A est ouvert, alors il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle e, e' \rangle < r < \langle f, e' \rangle, \quad \forall e \in \Omega, \forall f \in A.$$

Preuve. Comme $L = \{0\}$ est un sous-espace $\mathbb{R}$-vectoriel disjoint de la partie ouverte et convexe $\Omega - A$ de E, il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que $\ker(e') \cap (\Omega - A) = \emptyset$. Comme $\langle \Omega, e' \rangle$ et $\langle A, e' \rangle$ sont des parties convexes et disjointes de $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}$ qui les sépare. D'où la conclusion, quitte à prendre $-e'$ car e' et $-e'$ sont des opérateurs linéaires ouverts.∎

Corollaire 6.4.3 *Pour toute partie convexe et non vide C de l'espace localement convexe E et tout $e \in E \setminus C^-$, il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que $\langle e, e' \rangle \notin (\langle C, e' \rangle)^-$.*

En particulier, pour toute partie non vide A de E, $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est l'intersection des demi-espaces réels fermés contenant A.

Preuve. Soit b une semi-boule ouverte de centre 0 dans E telle que $(e+b) \cap C = \emptyset$. Comme $e + b$ est un ouvert convexe et non vide de E, le premier théorème de séparation donne l'existence de $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que $\langle e + b, e' \rangle \cap \langle C, e' \rangle = \emptyset$, ce qui suffit car $\langle e + b, e' \rangle$ est un voisinage de $\langle e, e' \rangle$ dans $\mathbb{R}$.∎

Théorème 6.4.4 (séparation 2) *Si le compact convexe non vide K et le fermé convexe non vide F de l'espace localement convexe E sont disjoints, alors il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que*

$$\sup_{f \in F} \langle f, e' \rangle < \inf_{e \in K} \langle e, e' \rangle .$$

Preuve. Il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ et $r > 0$ tels que $(K + b_p(< r)) \cap (F + b_p(< r)) = \emptyset$. Comme $K + b_p(< r)$ et $F + b_p(< r)$ sont deux ouverts convexes et non vides de E, le premier théorème de séparation permet aussitôt de conclure.∎

Définition. Un $\mathbb{R}$-*hyperplan d'appui* d'une partie non vide A de l'espace normé E est un $\mathbb{R}$-hyperplan H de E contenant au moins un point de A et tel que tous les points de A soient d'un même côté de H, c'est-à-dire qu'il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{ e \in E : \langle e, e' \rangle = r \}$ contienne un point de A au moins et que soit $A \subset \{ e \in E : \langle e, e' \rangle \leq r \}$, soit $A \subset \{ e \in E : \langle e, e' \rangle \geq r \}$.

On vérifie de suite que, si la partie A de E est d'intérieur non vide et admet un $\mathbb{R}$-hyperplan d'appui H, alors H est déterminé par une fonctionnelle $\mathbb{R}$-linéaire continue sur E et dès lors H est fermé.

Proposition 6.4.5 *Si F est une partie convexe, fermée et d'intérieur non vide de l'espace localement convexe E, tout point frontière de F appartient à un $\mathbb{R}$-hyperplan d'appui.*

Il s'ensuit que F est l'intersection des demi-espaces réels fermés qui le contiennent et qui sont déterminés par ses $\mathbb{R}$-hyperplans d'appui fermés.

Preuve. Pour tout $e_0 \in F^\bullet$, F° est un ouvert convexe non vide et e_0 un convexe fermé non vide disjoint de F°. D'où la conclusion par le premier théorème de séparation.∎

Proposition 6.4.6 *Tout compact convexe et non vide d'un espace localement convexe est égal à l'intersection des demi-espaces réels fermés qui le contiennent et qui sont déterminés par ses $\mathbb{R}$-hyperplans d'appui fermés.*

Preuve. Cela résulte aussitôt du deuxième théorème de séparation.∎

6.5 Deux espaces localement convexes théoriques

Exemples. Soit (E, P) un espace localement convexe.

Le dual topologique de E est l'ensemble E' des fonctionnelles linéaires continues sur E. Nous savons que E' est un espace vectoriel et qu'une fonctionnelle linéaire e' sur E est continue si et seulement si la semi-norme $|\langle \cdot, e' \rangle|$ est continue sur E, donc si et seulement s'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq Cp(\cdot)$ sur E.

a) Remarquons bien que, pour tout $e' \in E'$, $|\langle \cdot, e' \rangle|$ est une semi-norme sur E. De plus, pour tout $e \in E$ non nul, il existe $p \in P$ tel que $p(e) \neq 0$ donc, vu le théorème de Hahn-Banach, $e' \in E'$ tel que $\langle e, e' \rangle \neq 0$. Dès lors, les semi-normes

$$\sup \{ |\langle \cdot, e' \rangle| : e' \in A' \}, \; A' = \text{ partie finie de } E',$$

constituent un système de semi-normes P_a sur E, plus faible que P.

L'espace faible E_a est l'espace localement convexe séparé (E, P_a). Souvent sa topologie est notée $\sigma(E, E')$.

Afin d'alléger les expressions, nous référons aux ouverts, fermés, compacts, ... de E_a en les qualifiant de a-ouverts, a-fermés, a-compacts, ...

b) Remarquons que, pour tout $e \in E$, $|\langle e, \cdot \rangle|$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel E'. Cela étant, il est clair que les semi-normes

$$\sup \{ |\langle e, \cdot \rangle| : e \in A \}, \; A = \text{ partie finie de } E,$$

constituent un système de semi-normes P_s sur E'.

Le dual topologique simple E'_s est l'espace localement convexe (E', P_s). Souvent sa topologie est notée $\sigma(E', E)$.

Afin d'alléger les expressions, nous référons aux ouverts, fermés, compacts, ... de E'_s en les qualifiant de s-ouverts, s-fermés, s-compacts, ...

Vis-à-vis d'un espace normé, les deux derniers exemples que nous venons d'introduire donnent lieu à la situation suivante.

Application. Soit E un espace normé.

1) Nous avons maintenant deux systèmes de semi-normes sur E, à savoir $\|\cdot\|$ et P_a. Il est clair que E_a est muni d'une topologie moins fine que E.

Quand a-t-on la réciproque? Si la réciproque a lieu, il existe des fonctionnelles linéaires continues $e'_1, \ldots, e'_J$, en nombre fini et une constante $C > 0$ telles que

$$\|\cdot\| \leq C \sup \left\{ \left|\left\langle ., e'_j \right\rangle\right| : j = 1, \ldots, J \right\}$$

sur E. En particulier, il vient alors

$$\langle e, e'_1 \rangle = \ldots = \langle e, e'_J \rangle = 0 \Rightarrow e = 0$$

et, dans ce dernier cas, nous pouvons supposer les $e'_1, \ldots, e'_J$ linéairement indépendants. Dans ces conditions, la Proposition 1.9.3 assure l'existence d'éléments $e_1, \ldots, e_J$ de E tels que $\langle e_j, e'_k \rangle = \delta_{j,k}$. On en déduit de suite que E est de dimension finie: on a en effet $e = \sum_{j=1}^{J} \left\langle e, e'_j \right\rangle e_j$.

2) Nous avons aussi à présent deux systèmes de semi-normes sur E', à savoir $\|\cdot\|$ et P_s. Il est clair que $P_s \leq \|\cdot\|$. On établit aussitôt que la réciproque a lieu si et seulement si E est de dimension finie.

Chapitre 7

Théorèmes du graphe fermé et de l'opérateur ouvert

Convention. Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, $E = (E, P)$ et $F = (F, Q)$ désignent deux espaces localement convexes séparés.

7.1 Espaces ultrabornologiques

Définition. L'espace E est *ultrabornologique* si toute semi-norme sur E qui est bornée sur les compacts absolument convexes de E, est continue.

Un recours aux semi-normes p_A permet aussitôt d'établir qu'un espace localement convexe est ultrabornologique si et seulement si toute partie absolument convexe de E qui absorbe les compacts absolument convexes de E, est un voisinage de 0.

Proposition 7.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *E est ultrabornologique,*

(b) *toute semi-norme sur E qui est bornée sur les bornés absolument convexes complétants de E, est continue,*

(c) *toute semi-norme sur E qui est bornée sur toutes les suites très convergentes vers 0, est continue.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) car tout compact absolument convexe est borné et complet, donc complétant.

(b) $\Rightarrow$ (c). Soit q une semi-norme sur E qui est bornée sur les suites très convergentes vers 0 de E et soit B un borné absolument convexe complétant de E. Alors q est borné sur toute suite qui converge vers 0 dans E_B, donc est borné sur tout borné de E_B et en particulier sur B.

(c) $\Rightarrow$ (a). Il suffit d'établir que toute suite très convergente vers 0 dans E est incluse dans un compact absolument convexe de E. Cela résulte aussitôt du résultat suivant.∎

Proposition 7.1.2 *Si la suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E et si, pour tout $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m e_m$ converge dans E, alors*

$$K = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} c_m e_m : \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| < \infty \right\}$$

est absolument convexe, compact et extractable dans E. C'est aussi l'enveloppe absolument convexe fermée de $\{ e_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$.

Preuve. Désignons par L l'espace vectoriel ℓ^1 muni du système dénombrable de semi-normes $\{ \pi_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ où, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, π_m est défini par

$$\pi_m(x) = \sum_{j=1}^{m} |x_m| , \quad \forall x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1.$$

Cela étant, établissons que l'ensemble absolument convexe

$$H = \left\{ x \in L : \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| \leq 1 \right\}$$

est extractable donc compact dans L. Soit $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de H. Comme pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $\left\{ x_j^{(m)} : m \in \mathbb{N}_0 \right\}$ est un borné de $\mathbb{K}$, on peut extraire au moyen d'une extraction diagonale une sous-suite $(x^{(k(m))})_{m\in\mathbb{N}_0}$ telle que $x_j^{(k(m))} \to x_j$ dans $\mathbb{K}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. En fait, la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ ainsi construite appartient à H car, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sum_{j=1}^{J} \left| x_j^{(k(m))} \right| \to \sum_{j=1}^{J} |x_j| .$$

Il est alors clair alors que la suite $(x^{(k(m))})_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers x dans L.

Pour conclure, il suffit alors d'établir que

$$T \colon H \to E \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$$

est une application continue. Pour tous $p \in P$ et $r > 0$ et quels que soient $x, y \in H$, il vient

$$\begin{aligned} p(Tx - Ty) &\leq \sum_{m=1}^{M} |x_m - y_m|\, p(e_m) + \sum_{m=M+1}^{\infty} |x_m - y_m|\, p(e_m) \\ &\leq \sup_{m \leq M} p(e_m) \cdot \pi_M(x-y) + 2 \sup_{m>M} p(e_m) \end{aligned}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$. Or il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sup_{m>M} p(e_m) \leq r/4$ donc tel que

$$\left.\begin{array}{r} x, y \in H \\ \pi_M(x-y) \leq \frac{r}{2(1+\sup_{m\in\mathbb{N}_0} p(e_m))} \end{array}\right\} \Rightarrow p(Tx - Ty) \leq r.$$

Enfin comme il est clair que

$$\Gamma(\{ e_m : m \in \mathbb{N}_0 \}) \subset K \subset \overline{\Gamma}(\{ e_m : m \in \mathbb{N}_0 \}),$$

la conclusion est triviale car K, étant compact, est fermé.∎

Exemple. *Tout espace de Fréchet est ultrabornologique.* Soit q une semi-norme sur l'espace de Fréchet E, bornée sur tout compact absolument convexe de E. Soit $\{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ un système de semi-normes sur E, équivalent à $\mathrm{cs}(E)$. Si q n'est pas continu sur E, il existe une suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de E telle que $p_m(e_m) \leq 1/m^2$ et $q(e_m) \geq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, la suite $(me_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E. De plus, on vérifie directement que la série $\sum_{m=1}^{\infty} mc_m e_m$ est de Cauchy donc converge dans E pour tout $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1$. Dès lors, la proposition précédente signale que $\overline{\Gamma}(\{ me_m : m \in \mathbb{N}_0 \})$ est un compact absolument convexe de E sur lequel q n'est pas borné. D'où une contradiction.□

7.2 Espaces bornologiques

Définition. L'espace E est *bornologique* si toute semi-norme sur E qui est bornée sur les bornés de E est continue. Bien sûr, E est bornologique si et seulement si toute partie absolument convexe et bornivore de E est un voisinage de 0.

Vu les propriétés des suites Mackey convergentes, E est bornologique si et seulement si toute semi-norme sur E qui est bornée sur les suites Mackey convergentes vers 0, est continue.

Exemples. (1) *Tout espace ultrabornologique est bornologique.*

(2) *Tout espace localement convexe à semi-normes dénombrables est bornologique.* Soit $(E, \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \})$ un tel espace et soit q une semi-norme sur E, bornée sur

les bornés de E. Si q n'est pas une semi-norme continue sur E, il existe une suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de E telle que $p_m(e_m) \leq 1/m$ et $q(e_m) \geq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, on vérifie aisément que $(me_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite bornée de E sur laquelle q n'est pas borné. D'où une contradiction.□

7.3 Espaces tonnelés

Définitions. Un *tonneau* d'un espace localement convexe E est une partie absolument convexe, absorbante et fermée de E.

Une fonction f sur un espace topologique T est *semi-continue inférieurement* (en abrégé *s.c.i.*) sur T si elle est réelle et telle que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]r, +\infty[)$ est un ouvert de T. Il revient évidemment au même de dire qu'une fonction f sur T est s.c.i. si et seulement si elle est réelle et telle que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, r])$ est un fermé de T.

Pour toute partie $\mathcal{F}$ ponctuellement bornée de $\mathrm{C}_0(T;\mathbb{R})$, $\sup\{\, f : f \in \mathcal{F}\,\}$ est bien sûr une fonction s.c.i. sur T.

Proposition 7.3.1 *Une partie T d'un espace localement convexe E est un tonneau si et seulement s'il existe une semi-norme s.c.i. q telle que $T = b_q(1)$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si T est un tonneau de E, p_T est une semi-norme sur $\mathrm{span}(T) = E$ telle que $b_{p_T}(< 1) \subset T \subset b_{p_T}(1)$. De plus, si on a $p_T(e) = 1$, la suite $((1 - 1/m)e)_{m\in\mathbb{N}_0}$ appartient à $b_{p_T}(< 1)$ donc à T et converge vers e; il s'ensuit que T est égal à $b_{P_T}(1)$. Dès lors $q = p_T$ convient car q est s.c.i. vu qu'alors

$$
\begin{aligned}
&q^{-1}(]-\infty, r]) = b_q(r) = rT, \forall r > 0;\\
&q^{-1}(]-\infty, r]) = \emptyset, \forall r < 0;\\
&q^{-1}(]-\infty, 0]) = \cap_{r>0} rT.
\end{aligned}
$$

La condition est suffisante car $b_q(1) = q^{-1}(]-\infty, 0])$ est absolument convexe, absorbant et fermé.∎

Proposition 7.3.2 *Une semi-norme q sur E est une fonction s.c.i. sur E si et seulement s'il existe une partie $\mathcal{F}$ de $\mathrm{C}_0(E;\mathbb{R})$ telle que $q = \sup\{\, f : f \in \mathcal{F}\,\}$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Il suffit de prouver que, pour tout $e_0 \in E$ et tout $r < q(e_0)$, il existe $f \in \mathrm{C}_0(E;\mathbb{R})$ tel que $f \leq q$ et $r \leq f(e_0)$. Pour $r \leq 0$, c'est trivial: $f = 0$ convient. Pour $r > 0$, on procède comme suit: il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ tel que $b_p(e_0; 1) \subset q^{-1}(]r, +\infty[)$ et alors

$$f = r\chi_E - r \inf\{p(\cdot - e_0), \chi_E\}$$

convient.

La suffisance de la condition est connue.∎

Proposition 7.3.3 *Dans un espace localement convexe, tout tonneau absorbe tout borné absolument convexe complétant.*

Il revient au même de dire que, dans un espace localement convexe, toute semi-norme s.c.i. est bornée sur tout disque de Banach.

Preuve. Soient T un toneau et B un borné absolument convexe complétant de l'espace localement convexe E. Il est clair que $T \cap E_B$ est alors un tonneau de l'espace de Banach E_B. Comme nous avons $E_B = \cup_{m=1}^{\infty} m(T \cap E_B)$, le théorème de Baire assure que $T \cap E_B$ est un voisinage de 0 dans E_B donc contient un multiple de B. D'où la conclusion.∎

Définition. Un espace *tonnelé* est un espace localement convexe dans lequel toute semi-norme s.c.i. est continue; il revient au même de dire dans lequel tout tonneau est voisinage de l'origine.

Exemples. 1) *Tout espace ultrabornologique est tonnelé.*

2) *Tout espace localement convexe de Baire est tonnelé.* De fait, pour tout tonneau T d'un tel espace E, on a $E = \cup_{m \in \mathbb{N}_0} mT$ et ainsi un des mT est voisinage de 0, ce qui suffit.□

7.4 Espaces quasi-tonnelés

Définition. L'espace E est *quasi-tonnelé* si toute semi-norme sur E qui est s.c.i. et bornée sur les bornés est continue; il revient au même de dire si tout tonneau bornivore de E est voisinage de 0.

Exemples. 1) *Tout espace bornologique est quasi-tonnelé.*

2) *Tout espace tonnelé est quasi-tonnelé.*□

Proposition 7.4.1 *Tout espace quasi-tonnelé et séquentiellement complet est tonnelé.*

Preuve. Soient T un tonneau et B un borné d'un espace quasi-tonnelé et séquentiellement complet. Comme $\overline{\Gamma}(B)$ est un borné absolument convexe séquentiellement complet donc un disque de Banach, il est absorbé par le tonneau T. Dès lors, T absorbe B, ce qui suffit.∎

7.5 Espaces à réseau

Définition. L'espace E est *à réseau* s'il a un *réseau*, c'est-à-dire un ensemble

$$\mathcal{R} = \{ A_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0 \}$$

de parties de E telles que

($\mathcal{R}1$) chaque élément de $\mathcal{R}$ est absolument convexe,

($\mathcal{R}2$) $E = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ et, pour tout $k \geq 2$ et tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$,

$$A_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k,n},$$

($\mathcal{R}3$) pour toute suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{N}_0$, il existe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ telle que, pour toute suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ vérifiant $e_k \in A_{n_1,\ldots,n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$ converge dans E et est telle que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k e_k \in A_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \quad \forall k_0 \in \mathbb{N}_0.$$

Remarque. Dans la définition d'un réseau $\mathcal{R}$, on peut supposer avoir $r_k \downarrow 0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < 1$ car on vérifie directement qu'on peut remplacer la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ par toute suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ vérifiant $s_k \in]0, r_k[$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ vu qu'alors on a

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} s_k e_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k \left(\frac{s_k}{r_k} e_k \right)$$

pour tout $k_0 \in \mathbb{N}_0$ avec $(s_k/r_k)e_k \in A_{n_1,\ldots,n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.□

Exemples. 1) *Tout espace de Banach* $(E, \|\cdot\|)$ *est à réseau*: il suffit de poser

$$A_{n_1,\ldots,n_k} = b(n_1), \quad \forall k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0.$$

2) *Tout espace de Fréchet* $(E, \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \})$ *est à réseau*: il suffit de poser

$$A_{n_1,\ldots,n_k} = b_{p_1}(n_1) \cap \ldots \cap b_{p_k}(n_k), \quad \forall k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0.\square$$

Proposition 7.5.1 *Soit E un espace à réseau.*

a) *Si Q est un système de semi-normes sur E, plus faible que* $\mathrm{cs}(E)$, *alors (E, Q) est aussi un espace à réseau.*

b) *Tout sous-espace vectoriel séquentiellement fermé L de E est à réseau.*

c) *Si T est un opérateur linéaire séquentiellement continu de E dans F, alors le sous-espace* $\mathrm{im}(T)$ *de F est à réseau.*

En particulier, pour tout sous-espace vectoriel fermé L de E, l'espace quotient E/L est à réseau.

Preuve. Soit $\mathcal{R}$ un réseau de E.
a) De fait, $\mathcal{R}$ est aussi un réseau de (E, Q).
b) De fait, $\{ A \cap L : A \in \mathcal{R} \}$ est un réseau sur L.
c) De fait, $\{ TA : A \in \mathcal{R} \}$ est un réseau sur $\operatorname{im}(T)$.∎

Proposition 7.5.2 *Soit E un espace localement convexe et soit $(E_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite d'espaces localement convexes tels que $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$.*

Si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $\operatorname{cs}(E)|_{E_m} \leq \operatorname{cs}(E_m)$ sur E_m et si chacun des E_m est à réseau, alors E est à réseau.

Preuve. Si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\left\{ A^{(m)}_{k,n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

est un réseau de E_m, on vérifie aussitôt que les ensembles

$$A_n = E_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

et

$$A_{n_1,\ldots,n_k} = A^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}, \quad \forall k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0, k \geq 2,$$

constituent un réseau sur E.∎

Exercice. Etablir que tout produit dénombrable d'espaces à réseau est un espace à réseau.□

Mentionnons aussi l'information suivante.

Exercice. Si E est métrisable, établir que l'espace E'_b est à réseau.

Suggestion. En fait, si $E = (E, \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \})$, alors les ensembles

$$A_{n_1,\ldots,n_k} = \left\{ e' : \left| \langle \cdot, e' \rangle \right| \leq n_1 p_{n_1}(\cdot) \right\}, \quad \forall k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0,$$

constituent un réseau de E'_b.□

7.6 Théorème du graphe sq-fermé

Théorème 7.6.1 (localisation, De Wilde) *Si T est un opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé de E de Fréchet dans F à réseau, alors il existe une semi-boule b de E et $n \in \mathbb{N}_0$ tels que $Tb \subset A_n$.*

Preuve. Comme F est égal à $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, il vient $E = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-1} A_n$ et, vu le théorème de Baire, il existe un entier n_1 tel que $T^{-1} A_{n_1}$ ne soit inclus dans aucune réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Une récurrence aisée permet alors de déterminer une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{N}_0$ telle que $T^{-1} A_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soit jamais inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide: si les $n_1, \ldots, n_k$ sont déterminés, l'égalité $T^{-1} A_{n_1,\ldots,n_k} = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-1} A_{n_1,\ldots,n_k,n}$ assure l'existence de n_{k+1}.

Cela étant, soit $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $]0, +\infty[$ dont l'existence est assurée par la notion de réseau.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $r_k (T^{-1} A_{n_1,\ldots,n_k})^-$ est alors un fermé absolument convexe d'intérieur non vide et il existe une semi-boule b_k de E centrée en 0, incluse dans cet ensemble. Si b_k s'écrit $b_{p_{m(k)}}(s_k)$, nous pouvons supposer la suite $(m(k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ strictement croissante et avoir $s_k \downarrow 0$.

Etant donné $e \in b_1$, on a $e \in r_1 (T^{-1} A_{n_1})^-$ et il existe $e_1 \in T^{-1} A_{n_1}$ tel que $e - r_1 e_1 \in b_2$. Par récurrence, on obtient une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de E telle que $e_{k_0} \in T^{-1} A_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ et $e - \sum_{k=1}^{k_0} r_k e_k \in b_{k_0+1}$ pour tout $k_0 \in \mathbb{N}_0$. Au total, la série $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$ converge vers e dans E alors que la suite $(T(\sum_{k=1}^{M} r_k e_k) = \sum_{k=1}^{M} r_k T e_k)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge dans F car F est à réseau. Si f désigne la limite de la série $\sum_{k=1}^{\infty} r_k T e_k$, on a $Te = f$ car le graphe de T est séquentiellement fermé. Au total, nous avons ainsi établi que $Tb_1 \subset A_{n_1}$, ce qui suffit.∎

Théorème 7.6.2 (graphe fermé, De Wilde) *Tout opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé d'un espace ultrabornologique dans un espace à réseau est continu.*

Preuve. Soit T un opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé de E ultrabornologique dans F ayant le réseau $\{ A_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0 \}$.

a) Supposons d'abord que E est un espace de Fréchet.

Soit b une semi-boule fermée de F centrée en 0. On vérifie alors directement que les ensembles

$$\begin{aligned} &A'_n = nb, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ &A'_{n_1,\ldots,n_k} = (n_1 b) \cap A_{n_2,\ldots,n_k}, \quad \forall k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0, k \geq 2, \end{aligned}$$

constituent également un réseau de F: pour les conditions $(\mathcal{R}1)$ et $(\mathcal{R}2)$, c'est trivial. Pour la condition $(\mathcal{R}3)$, on vérifie que si la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ convient pour la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, alors la suite $(r'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ définie par $r'_1 > 0$, $r'_k = r_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$ convient pour la suite $(n'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ où $n'_k = n_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$, pour autant que $\sum_{k=1}^{\infty} r'_k \leq 1$, ce qui peut facilement être réalisé: il suffit d'exiger que $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < 1$.

Cela étant, le théorème de localisation procure une semi-boule b_0 de E et $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tels que $Tb_0 \subset n_0 b$, ce qui suffit.

b) Passons au cas général: E est ultrabornologique.

Pour tout disque de Banach B de E, E_B est un espace de Banach et $T|_{E_B}: E_B \to F$ est un opérateur linéaire dont le graphe est séquentiellement fermé car

$$\left.\begin{array}{r} e_m \to e_0 \text{ dans } E_B \\ Te_m \to f_0 \text{ dans } F \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e_m \to e_0 \text{ dans } E \\ Te_m \to f_0 \text{ dans } F \end{array}\right\} \Rightarrow Te_0 = f_0$$

donc est continu vu a). Dès lors TB est un borné de F.

Il s'ensuit que, pour tout $q \in \mathrm{cs}(F)$, $q(T\cdot)$ est une semi-norme sur E qui est bornée sur les disques de Banach de E. Comme E est ultrabornologique, $q(T\cdot)$ est donc une semi-norme continue sur E, ce qui suffit.∎

Théorème 7.6.3 (opérateur ouvert) *Toute surjection linéaire continue entre espaces de Fréchet est ouverte.*

En particulier toute bijection linéaire continue entre espaces de Fréchet est un isomorphisme.

Preuve. Soit $T: E \to F$ une surjection linéaire continue entre deux espaces de Fréchet. L'opérateur $T^{\sim}: E/\ker(T) \to F$ est alors une bijection linéaire continue entre deux espaces de Fréchet et il suffit d'appliquer le théorème du graphe séquentiellement fermé pour obtenir que $T^{\sim -1}: F \to E/\ker(T)$ est continu, ce qui suffit.∎

Chapitre 8

Espaces d'opérateurs et duaux

Convention. Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, E et F désignent des espaces localement convexes de systèmes de semi-normes P et Q respectivement.

De plus, le symbole $\mathfrak{S}$ désigne une famille de bornés de E filtrante et de réunion totale.

8.1 Définition

Proposition 8.1.1 *Pour tout $q \in Q$ et tout borné B de E,*

$$q_B \colon \mathrm{L}(E, F) \to \mathbb{R}; \quad T \mapsto \sup_{e \in B} q(Te)$$

est une semi-norme sur $\mathrm{L}(E, F)$.

Pour tout $\mathfrak{S}$,

$$Q_{\mathfrak{S}} = \{\, q_B : q \in \mathrm{cs}(F), B \in \mathfrak{S} \,\}$$

est un système de semi-normes sur $\mathrm{L}(E, F)$.∎

Notation. Pour tout $\mathfrak{S}$,

$$\mathrm{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$$

désigne l'espace localement convexe obtenu en munissant l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E, F)$ du système de semi-normes $Q_{\mathfrak{S}}$.

Exemples. 1) L'espace $\mathrm{L}_s(E, F)$ est l'espace localement convexe $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ obtenu en prenant pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties finies de E. On dit alors qu'on a muni $\mathrm{L}(E, F)$ de la *convergence ponctuelle* ou de la *convergence simple.*

2) L'espace $\mathrm{L}_b(E,F)$ est l'espace localement convexe $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ obtenu en prenant pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties bornées de E. On dit alors qu'on a muni $\mathrm{L}(E,F)$ de la *convergence bornée* ou de la *convergence forte*.

3) De nombreux autres exemples seront introduits par la suite.

Proposition 8.1.2 *Si E et F sont des espaces normés,*

$$\|\cdot\|_{:}\ \mathrm{L}(E,F) \to [0,\infty[; \quad T \mapsto \sup_{\|e\|_E \leq 1} \|Te\|_F$$

est une norme sur l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E,F)$*, équivalente au système de semi-normes de* $\mathrm{L}_b(E,F)$*.*∎

Théorème 8.1.3 *Si $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, la bijection linéaire*

$$\mathrm{id}\colon \mathrm{L}_{\mathfrak{S}_2}(E,F) \to \mathrm{L}_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$$

est continue.

En particulier, l'identité est une bijection linéaire continue de $\mathrm{L}_b(E,F)$ *dans* $\mathrm{L}_s(E,F)$*.*∎

Proposition 8.1.4 *Si $\cup\{B\colon B \in \mathfrak{S}_2\}$ contient $\cup\{B\colon B \in \mathfrak{S}_1\}$, alors toute semi-boule fermée de* $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ *est fermée dans* $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$*.*

En particulier, toute semi-boule fermée de $\mathrm{L}_b(E,F)$ *est fermée dans* $\mathrm{L}_s(E,F)$*.*

Preuve. Il suffit de noter que, pour tous $q \in Q$ et $B \in \mathfrak{S}_1$,

$$b_{q_B}(1) = \bigcap_{e \in B} q_{\{e\}}^{-1}(1)$$

alors que, pour tout $e \in E$, $q_{\{e\}}$ est une semi-norme continue sur $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$∎

Proposition 8.1.5 *Si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties bornées absolument convexes complétantes de E, alors toute partie bornée de* $\mathrm{L}_s(E,F)$ *est bornée dans* $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$*.*

En particulier, si E est séquentiellement complet, tout s-borné de $\mathrm{L}(E,F)$ *est b-borné.*

Preuve. De fait, pour tout borné $\mathcal{B}$ de $\mathrm{L}_s(E,F)$ et tout $q \in \mathrm{cs}(F)$, $\sup_{T\in\mathcal{B}} q(T\cdot)$ est une semi-norme semi-continue inférieurement sur E donc une semi-norme bornée sur tout borné absolument convexe complétant de E.∎

Corollaire 8.1.6 *Si E et F sont des espaces de Banach, tout s-borné de* $\mathrm{L}(E, F)$ *est b-borné : on a*

$$\left(\sup_{T\in\mathcal{B}} \|Te\|_F < \infty,\ \forall e \in E\right) \Rightarrow \left(\sup_{T\in\mathcal{B}} \|T\| < \infty\right). \blacksquare$$

Théorème 8.1.7 *L'opérateur*

$$J\colon \mathrm{L}_s(E, F) \to F^E; \quad T \mapsto (Te)_{e\in E}$$

est un isomorphisme entre $\mathrm{L}_s(E, F)$ *et son image* $J\mathrm{L}_s(E, F)$.$\blacksquare$

Convention. Afin de simplifier les écritures, nous allons identifier l'opérateur $T \in \mathrm{L}_s(E, F)$ avec son image $JT = (Te)_{e\in E} \in F^E$.

Le thérème précédent peut alors s'énoncer comme suit: $\mathrm{L}_s(E, F)$ *est un sous-espace topologique de* F^E.

8.2 Parties équicontinues de $\mathrm{L}(E, F)$

Nous savons déjà qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathrm{L}(E, F)$ est équicontinue si et seulement si, pour tout $q \in Q$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{T\in\mathcal{B}} q(T\cdot) \leq Cp(\cdot) \text{ sur } E.$$

Il est donc clair qu'alors $\Gamma\mathcal{B}$ est aussi une partie équicontinue. La propriété suivante est fondamentale.

Théorème 8.2.1 *L'adhérence dans F^E d'une partie équicontinue de* $\mathrm{L}(E, F)$ *est une partie équicontinue de* $\mathrm{L}(E, F)$.

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une partie équicontinue de $\mathrm{L}(E, F)$.

Pour tout $q \in Q$, il existe donc $p \in P$ et $C > 0$ tels que $\sup_{T\in\mathcal{B}} q(T\cdot) \leq Cp(\cdot)$ sur E. Pour conclure, il suffit alors de vérifier directement que, pour tout élément u de l'adhérence de $\mathcal{B}$ dans F^E, nous avons successivement
a) $q(u(e)) \leq Cp(e)$ pour tout $e \in E$;
b) $u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2)$ pour tous e_1, $e_2 \in E$;
c) $u(ce) = cu(e)$ pour tous $e \in E$ et $c \in \mathbb{K}$.$\blacksquare$

En voici déjà une conséquence fort importante.

Théorème 8.2.2 *Une partie équicontinue $\mathcal{B}$ de* $\mathrm{L}(E, F)$ *est relativement s-compacte si et seulement si, pour tout $e \in E$, l'ensemble $\{\, Te : T \in \mathcal{B} \,\}$ est relativement compact dans F.*

Preuve. La condition est nécessaire car, pour tout $e_0 \in E$, l'opérateur

$$\pi_{e_0} : F^E \to F; \quad (f_e)_{e\in E} \mapsto f_{e_0}$$

est continu.

La suffisance de la condition découle aussitôt du thérème de Tychonoff.∎

Théorème 8.2.3 *Sur une partie équicontinue $\mathcal{B}$ de* $\mathrm{L}(E, F)$*,*

(1) *la topologie $Q_{\mathfrak{S}}$ où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies d'une partie totale D de E,*

(2) *la topologie de* $\mathrm{L}_s(E, F)$*,*

(3) *la topologie $Q_{\mathfrak{S}}$ où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties précompactes de E,*

sont des topologies équivalentes.

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir que, sur $\mathcal{B}$, la topologie τ_{pc} introduite en (3) est moins fine que la topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$ introduite en (1).

Soient $T_0 \in \mathcal{B}$, $q \in Q$, $\varepsilon > 0$ et K un précompact de E. Il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $q(T\cdot) \leq Cp(\cdot)$ sur E pour tout $T \in \mathcal{B}$. Cela étant, il existe une partie finie A de D telle que $K \subset A + b_p(\varepsilon/(4C))$ donc telle que

$$\left(T \in \mathcal{B}, \sup_{e\in A} q((T - T_0)e) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\sup_{e\in K} q((T - T_0)e) \leq \sup_{e\in A} q((T - T_0)e) + \sup_{e\in b_p(\varepsilon/(4C))} (q(Te) + q(T_0e)) \leq \varepsilon\right),$$

ce qui suffit.∎

Proposition 8.2.4 a) *Toute partie équicontinue de* $\mathrm{L}(E, F)$ *est b-bornée.*

b) *Si E est tonnelé, toute partie s-bornée de* $\mathrm{L}(E, F)$ *est équicontinue.*

c) *Si E est quasi-tonnelé, toute partie b-bornée de* $\mathrm{L}(E, F)$ *est équicontinue.*

Preuve. a) est trivial.

b) (resp. c)) De fait, pour tout borné $\mathcal{B}$ de $\mathrm{L}_s(E, F)$ (resp. $\mathrm{L}_b(E, F)$) et tout $q \in Q$, $\sup_{T\in\mathcal{B}} q(T\cdot)$ est une semi-norme s.c.i. sur E (resp. s.c.i. et bornée sur les bornés de E) donc continue sur E.∎

Théorème 8.2.5 (Banach-Steinhaus) *Soit $(T_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de* $\mathrm{L}(E, F)$*.*

Si E est tonnelé et si, pour tout $e \in E$, la suite $T_m e$ converge vers un élément noté $T_0 e$ de F, alors la suite $(T_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge dans $\mathrm{L}_{pc}(E, F)$ *vers T_0; en particulier, T_0 est un élément de* $\mathrm{L}(E, F)$*.*

(N.B. $\mathrm{L}_{pc}(E, F)$ est évidemment l'espace obtenu en prenant pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties précompactes de E.)

Preuve. Etant s-bornée, la suite $(T_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est équicontinue, ce qui suffit vu ce qui précède.∎

8.3 Parties complètes de $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$

Proposition 8.3.1 *Si les ensembles $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont tels que*

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \ \text{et} \ \cup\{\,B : B\in\mathfrak{S}_2\,\} \subset \cup\{\,B : B\in\mathfrak{S}_1\,\},$$

alors toute partie complète (resp. sq-*complète*) *de* $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ *est* $\mathfrak{S}_2$-*complète* (resp. $\mathfrak{S}_2$-sq-*complète*).

Preuve. Etablissons par exemple cette propriété dans le cas de la complétion.

Soit $\mathcal{G}$ un filtre $\mathfrak{S}_2$-de Cauchy sur la partie $\mathfrak{S}_1$-complète $\mathcal{A}$ de $\mathrm{L}(E,F)$. Etant $\mathcal{S}_1$-de Cauchy, il $\mathfrak{S}_1$-converge vers un élément T_0 de $\mathcal{A}$. Etant $\mathfrak{S}_2$-de Cauchy, pour tout $q\in \mathrm{cs}(F)$ et tout $B\in\mathfrak{S}_2$, il existe $G\in\mathcal{G}$ tel que $\sup_{S,T\in G} q_B(S-T)\leq 1$ donc tel que $F\subset b_{q_B}(T_G;1)$ pour tout élément T_G de G. D'où $T_0\in b_{q_B}(T_G;1)$ car cette semi-boule est $\mathfrak{S}_1$-fermée.∎

Remarque. En fait, nous venons d'établir que si P_1 et P_2 sont deux systèmes de semi-normes sur E tels que $P_1\leq P_2$ et que toute semi-boule fermée de (E,P_2) est P_1-fermée, alors toute partie P_1-complète (resp. P_1-sq-complète) de E est P_2-complète (resp. P_2-sq-complète).

Définition. Un espace localement convexe E est *quasi-complet* si tous ses bornés fermés sont complets.

Proposition 8.3.2 *Si F est quasi-complet* (resp. sq-*complet*) *et si la réunion des éléments de $\mathfrak{S}$ est égale à E, alors toute partie équicontinue et fermée de* $\mathrm{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *est complète* (resp. sq-*complète*).

Preuve. Vu le résultat précédent, il suffit de prouver que, dans $\mathrm{L}_s(E,F)$, toute partie équicontinue et fermée est complète (resp. sq-complète).

Soit, par exemple $\mathcal{G}$ un filtre de s-de Cauchy sur une partie équicontinue et fermée $\mathcal{B}$ de $\mathrm{L}_s(E,F)$. Pour tout $e\in E$, $\{\,\{\,Te : T\in G\,\} : G\in\mathcal{G}\,\}$ est alors base d'un filtre de Cauchy sur F dont un élément est borné : il converge donc. Si on note T_0e sa limite, cela signifie que $\mathcal{G}$ converge vers $(T_0e)_{e\in E}$ dans F^E donc vers T_0 dans $\mathrm{L}_s(E,F)$, ce qui suffit.∎

Corollaire 8.3.3 a) *Si E est tonnelé et si F est* sq-*complet,* $\mathrm{L}_s(E,F)$ *est* sq-*complet et, par conséquent,* $\mathrm{L}_b(E,F)$ *est* sq-*complet.*

b) *Si E et F sont des espaces de Banach, alors* $\mathrm{L}_s(E,F)$ *est* sq-*complet et* $\mathrm{L}_b(E,F)$ *est un espace de Banach.*∎

8.4 Duaux

En particulier, pour $F = \mathbb{K}$, nous venons de définir différents systèmes de semi-normes sur le dual topologique $E' = \mathrm{L}(E, \mathbb{K})$ de E, donnant notamment lieu à l'espace E'_s que nous connaissons déjà mais aussi à l'espace E'_b.

Comme $\mathbb{K}$ est un espace de Banach, nous savons déjà que
a) toute partie équicontinue et s-fermée de E' est complète;
b) si E est tonnelé, E'_s est sq-complet;
c) si E est de Banach, E'_b est un espace de Banach.

En fait, on a bien plus; voici un petit échantillon de telles propriétés supplémentaires.

Théorème 8.4.1 a) *Le dual de E_a coïncide avec E'.*

b) *Le dual de E'_s est donné par $\{ \delta_e \colon e \in E \}$ où les fonctionnelles δ_e sont définies par $\langle e', \delta_e \rangle = \langle e, e' \rangle$.*

Preuve. a) est trivial.

b) résulte aussitôt du théorème 1.9.5 appliqué à $\mathcal{L} = E'$. ∎

Définition. Le *polaire* d'une partie non vide A de E est l'ensemble

$$A^{\triangle} = \{ e' \in E' \colon \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle| \leq 1 \}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires des polaires:
$\{0\}^{\triangle} = E'$; $E^{\triangle} = \{0\}$;
$(cA)^{\triangle} = \dfrac{1}{|c|} A^{\triangle}$ si $c \in \mathbb{K}$ diffère de 0;
$A \subset B \Rightarrow A^{\triangle} \supset B^{\triangle}$;
$A^{\triangle} = (\bar{\Gamma}(A))^{\triangle}$.

Proposition 8.4.2 *Pour toute partie non vide A de E, $A^{\triangle}$ est une partie absolument convexe et fermée de E'_s.*

De plus,
a) *si A est absorbant, $A^{\triangle}$ est un borné de E'_s;*
b) *$A^{\triangle}$ est absorbant si et seulement si A est a-borné.* ∎

Définition. L'*antipolaire* d'une partie non vide A' de E' est l'ensemble

$$A'^{\triangledown} = \{ e \in E \colon \sup_{e' \in A'} |\langle e, e' \rangle| \leq 1 \}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires des polaires:
$\{0\}^{\triangledown} = E$; $E'^{\triangledown} = \{0\}$;
$(cA')^{\triangle} = \dfrac{1}{|c|} A'^{\triangledown}$ si $c \in \mathbb{K}$ diffère de 0;
$A' \subset B' \Rightarrow A'^{\triangledown} \supset B'^{\triangledown}$;
$A'^{\triangledown} = (\bar{\Gamma}^s(A'))^{\triangledown}$.

Proposition 8.4.3 *Pour toute partie non vide A' de E', $A'^{\triangledown}$ est une partie absolument convexe et fermée de E_a.*

De plus,
a) *si A' est absorbant, $A'^{\triangledown}$ est un borné de E_a;*
b) *$A'^{\triangledown}$ est absorbant si et seulement si A' est s-borné.*∎

Cette symétrie des propriétés s'explique aussitôt si on recourt l'interprétation du dual de E'_s. Il en est de même pour le résultat fondamental suivant.

Théorème 8.4.4 (bipolaires) *Pour toutes parties non vides A de E et A' de E',*

$$A^{\triangle\triangledown} = \bar{\Gamma}(A) = \bar{\Gamma}^a(A) \text{ et } A'^{\triangledown\triangle} = \bar{\Gamma}^s(A').$$

En particulier, une partie absolument convexe de E est fermée si et seulement si elle est a-fermée.

Preuve. L'inclusion $A^{\triangle\triangledown} \supset A$ étant triviale, nous avons bien sûr $A^{\triangle\triangledown} \supset \bar{\Gamma}^a(A) \supset \bar{\Gamma}(A)$. L'inclusion $\bar{\Gamma}(A) \subset A^{\triangle\triangledown}$ est une conséquence immédiate du théorème de séparation 6.3.5.

Pour A', il suffit alors de noter que $(E'_s)'_s = \{\, \delta_e : e \in E \,\}$.∎

Théorème 8.4.5 (précompacité réciproque) *Soient A une partie non vide de l'espace localement convexe séparé E et B' une partie non vide de E'.*

Afin d'alléger les notations, posons $A' = A^{\triangle}$ et $B = B'^{\triangledown}$. Nous savons déjà que A' et B sont des parties absolument convexes et fermées de E'_s et E_a respectivement.

De plus, A est inclus dans span(B) *et est borné* (resp. *précompact*) *pour la semi-norme p_B si et seulement si B' est inclus dans* span(A') *et est borné* (resp. *précompact*) *pour $p_{A'}$.*

Preuve. Notons tout d'abord que, pour tout $e \in \text{span}(B)$, nous avons

$$p_B(e) = \sup_{e' \in B'} |\langle e, e' \rangle|$$

ainsi que

$$p_{A'}(e') = \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle| \,.$$

pour tout $e' \in \operatorname{span}(A')$.

Cela étant, la propriété relative à la bornation est directe. De fait, A est inclus dans $\operatorname{span}(B)$ et y est borné pour la semi-norme p_B signifie que

$$\sup_{e\in A}\sup_{e'\in B'}|\langle e,e'\rangle| = \sup_{e'\in B'}\sup_{e\in A}|\langle e,e'\rangle| < \infty,$$

c'est-à-dire que B' est inclus dans $\operatorname{span}(A')$ et y est borné pour $p_{A'}$.

Passons à la propriété relative à la précompacité.

La condition est nécessaire. Fixons $r > 0$. Il existe alors une partie finie $\{a_1, \ldots, a_J\}$ de A telle que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{J} b_{p_B}(a_j; r/3).$$

Cela étant, posons

$$C = \{ (\langle a_1, b'\rangle, \ldots, \langle a_J, b'\rangle) : b' \in B' \}.$$

Il est clair que C est un borné de $\mathbb{K}^J$ donc un précompact de cet espace. Dès lors, il existe une partie finie $\{b'_1, \ldots, b'_L\}$ de B' telle que

$$C \subset \{ (\langle a_1, b'_l\rangle, \ldots, \langle a_J, b'_l\rangle) : l = 1, \ldots, L \} + b(r/3).$$

Cela étant, pour tout $b' \in B'$, il existe $l \in \{1, \ldots, L\}$ tel que

$$|(\langle a_1, b'\rangle, \ldots, \langle a_J, b'\rangle) - (\langle a_1, b'_l\rangle, \ldots, \langle a_J, b'_l\rangle)| \le r/3$$

donc tel que, pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} |\langle a, b' - b'_l\rangle| &\le |\langle a - a_j, b'\rangle| + |\langle a_j, b' - b'_l\rangle| + |\langle a_j - a, b'_l\rangle| \\ &\le 2\sup_{b'\in B'}|\langle a - a_j, b'\rangle| + r/3 \end{aligned}$$

et cette dernière majorante est $\le r$ si on choisit $j \in \{1, \ldots, J\}$ tel que $a \in b_{p_B}(a_j; r/3)$. Au total, nous avons obtenu que

$$B' \subset \bigcup_{l=1}^{L} b_{p_{A'}}(b_k; r).$$

La suffisance de la condition s'établit de même.∎

Théorème 8.4.6 *Toute partie équicontinue et s-fermée de E' est pc-compacte. En particulier,*

a) *si E est tonnelé, toute partie s-bornée et s-fermée de E' est pc-compacte.*
b) *Si E est quasi-tonnelé, toute partie b-bornée et s-fermée est pc-compacte.*

Preuve. Sur une partie équicontinue de E', nous savons que E'_s et E'_{pc} induisent les mêmes topologies. Comme $\mathbb{K}$ est complet, nous savons que toute partie équicontinue et s-fermée est s-complète. Pour conclure, il suffit alors d'établir que toute partie équicontinue B' de E' est s-précompacte : cela résulte aussitôt du théorème précédent car toute partie finie A de E est bien sûr incluse dans $\text{span}(B'^{\triangledown})$ et précompacte pour $p_{B'^{\triangledown}}$.∎

En particulier, nous avons le théorème d'Alaoglu suivant.

Théorème 8.4.7 (Alaoglu) *Si (E, P) est un espace localement convexe, alors, pour tout $p \in P$, $b_p^{\triangle}(1)$ est un compact absolument convexe de E'_s.*

Voici enfin un résultat renforçant la bornation dans E.

Théorème 8.4.8 *Dans un espace localement convexe, les bornés et les a-bornés coïncident.*

Preuve. Bien sûr, tout borné est a-borné.

Inversement, si B est un a-borné de E, $B^{\triangle}$ est un s-tonneau de E' donc absorbe tout s-compact absolument convexe de E'. En particulier, vu le théorème d'Alaoglu, il absorbe $b_p^{\triangle}(1)$ quel que soit $p \in P$, c'est-à-dire que $b_p(1)$ absorbe B, ce qui suffit.∎

Appendice A

L'axiome du choix et quelques formes équivalentes

Un *espace préordonné* est un ensemble non vide A muni d'un *préordre*, c'est-à-dire d'une relation interne $\leq$ telle que

$$\begin{array}{rcl} a & \leq & a, \\ (a \leq b, b \leq c) & \Longrightarrow & (a \leq c). \end{array}$$

Il est noté $(A, \leq)$ ou même tout simplement A si aucune confusion sur $\leq$ n'est possible.

Un *espace ordonné* est un ensemble non vide A muni d'un *ordre*, c'est-à-dire d'un préordre $\leq$ tel que

$$(a \leq b, b \leq a) \Longrightarrow (a = b).$$

Un élément a de l'espace préordonné A est *maximal* (resp. *minimal*) si

$$a \leq b \Longrightarrow b \leq a \quad (\text{resp. } b \leq a \Longrightarrow a \leq b).$$

Une partie B de l'espace préordonné $(A, \leq)$ est *totalement ordonnée* si, pour tous a, $b \in B$, l'une des deux majorations $a \leq b$, $b \leq a$ a lieu.

Soit B une partie de l'espace préordonné $(A, \leq)$. L'élément a de A est un *majorant* (resp. un *minorant*) de B si on a $b \leq a$ (resp. $a \leq b$) pour tout $b \in B$.

Un *espace bien ordonné* est un espace ordonné où toute partie non vide contient un minorant.

Cela étant, on peut établir (cf. [4], pp 4–9) que les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) Axiome du choix: *tout produit non vide d'ensembles non vides est non vide*, c'est-à-dire que, si J est un ensemble non vide et si, pour tout $j \in J$, A_j est un ensemble non vide, alors l'ensemble $\prod_{j \in J} A_j$ est non vide,

(2) Théorème de maximalité de Hausdorff: *tout espace préordonné contient un sous-espace totalement ordonné maximal*,

(3) Lemme de Zorn: *si toute partie totalement ordonnée de l'espace préordonné A est majorée, alors A contient un élément maximal*,

(4) Théorème du bon ordre de Zermelo: *tout ensemble non vide peut être muni d'un bon ordre.*

Appendice B

Espaces topologiques

B.1 Définition

Il y a trois manières d'introduire la notion d'espace topologique: la première (par les ouverts) est préférée par les topologistes, la troisième (par les voisinages) par les analystes.

Définition. Un *espace topologique* est la donnée d'un ensemble T non vide et d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de T qui satisfait aux trois propriétés suivantes:

($\mathcal{O}_1$) $\emptyset$, $T \in \mathcal{O}$,

($\mathcal{O}_2$) $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}$ est stable pour les intersections finies,

($\mathcal{O}_3$) $\{\, \Omega_j : j \in J \,\} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \cup_{j \in J} \Omega_j \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}$ est stable pour les unions.

Il est noté $(T, \mathcal{O})$ ou même tout simplement T si aucune confusion sur $\mathcal{O}$ n'est possible. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* de l'espace topologique T.

Définition. Une partie F de l'espace topologique $(T, \mathcal{O})$ est *fermé* si $T \setminus F$ est ouvert.

Etant donné un espace topologique $(T, \mathcal{O})$, la donnée des familles $\mathcal{O}$ ou $\mathcal{F} = \{\, T \setminus \Omega : \Omega \in \mathcal{O} \,\}$ de parties de T revient évidemment au même.

Cela étant, un espace topologique peut aussi être défini comme étant la donnée d'un ensemble non vide T et d'une famille $\mathcal{F}$ de parties de T qui satisfait aux trois propriétés suivantes:

($\mathcal{F}_1$) $\emptyset$, $T \in \mathcal{F}$,

($\mathcal{F}_2$) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable pour les unions finies,

$(\mathcal{F}_3)$ $\{ F_j : j \in J \} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable pour les intersections.

Il suffit d'appeler *fermés* les éléments de $\mathcal{F}$ et de qualifier d'*ouverts* les ensembles $T \setminus F$ avec $F \in \mathcal{F}$.

Définition. Une partie V de l'espace topologique $(T, \mathcal{O})$ est un *voisinage* de $t \in T$ s'il existe un ouvert Ω tel que $t \in \Omega \subset V$.

Cela étant, l'ensemble $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de $t \in T$ satisfait aux cinq conditions suivantes:

$(\mathcal{V}_1)$ pour tout $t \in T$, $\mathcal{V}(t) \neq \emptyset$,

$(\mathcal{V}_2)$ $t \in V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(t)$,

$(\mathcal{V}_3)$ $V \in \mathcal{V}(t), V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(t)$,

$(\mathcal{V}_4)$ $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(t) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(t)$,

$(\mathcal{V}_5)$ $V \in \mathcal{V}(t) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}(t)$ tel que, pour tout $w \in W$, on a $V \in \mathcal{V}(w)$.

Inversement, *si $\mathcal{V}$ est une application de l'ensemble non vide T dans l'ensemble des parties de $\wp(T)$ telle que, pour tout $t \in T$, $\mathcal{V}(t)$ satisfait aux conditions $(\mathcal{V}_1)$ à $(\mathcal{V}_5)$, alors l'ensemble*

$$\mathcal{O}' = \{ \Omega' \subset T : \forall t \in \Omega', \Omega' \in \mathcal{V}(t) \}$$

définit un espace topologique $(T, \mathcal{O}')$ pour lequel $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que Ω' vérifie les conditions:
$(\mathcal{O}'_1)$: c'est trivial,
$(\mathcal{O}'_2)$: de fait, pour tout $t \in \Omega'_1 \cap \Omega'_2$, on a Ω'_1, $\Omega'_2 \in \mathcal{V}(t)$ donc $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 \in \mathcal{V}(t)$.
$(\mathcal{O}'_3)$: c'est trivial.

Remarquons ensuite que, pour tout $t \in T$, on a $\mathcal{V}'(t) \subset \mathcal{V}(t)$. De fait, si $V' \in \mathcal{V}'(t)$, il existe $\Omega' \in \mathcal{O}'$ tel que $t \in \Omega' \subset V'$ donc tel que $\Omega' \in \mathcal{V}(t)$ et par conséquent $V' \in \mathcal{V}(t)$.

Etablissons enfin que, pour tout $t \in T$, on a $\mathcal{V}(t) \subset \mathcal{V}'(t)$. Soit $V \in \mathcal{V}(t)$. Considérons

$$U = \{ s \in T : V \in \mathcal{V}(s) \}.$$

Comme on a bien sûr $t \in U \subset V$, il suffit pour conclure de prouver que $U \in \mathcal{O}'$. Or, pour tout $s \in U$, on a $V \in \mathcal{V}(s)$. Dès lors, vu $(\mathcal{V}_5)$, il existe $W \in \mathcal{V}(s)$ tel que $V \in \mathcal{V}(r)$ pour tout $r \in W$. En particulier, on a donc $W \subset U$, ce qui implique $U \in \mathcal{V}(s)$. ∎

Cela étant, il y a donc trois manières équivalentes d'introduire la notion d'espace topologique: par les ouverts, par les fermés ou par les voisinages.

Définition. Bien souvent, lors de l'étude d'un espace topologique, on ne souhaite pas privilégier une manière (par les ouverts, par les fermés, par les voisinages) de le définir: on dit alors que l'espace T est muni d'une topologie τ, on écrit (T, τ) ou même T si aucune confusion sur τ n'est possible et on parle des ouverts, des fermés et des voisinages de (T, τ).

Définitions. Si A est une partie de l'espace topologique (T, τ),

a) $t \in T$ est un *point intérieur de* A si A est un voisinage de t,

b) l'*intérieur de* A, noté A°, est l'ensemble des points intérieurs de A. C'est le plus grand ouvert inclus dans A,

c) $t \in T$ est un *point adhérent à* A si tout voisinage de t est d'intersection non vide avec A,

d) l'*adhérence de* A, notée A^-, est l'ensemble des points adhérents à A. C'est le plus petit fermé contenant A,

e) $t \in T$ est un *point frontière de* A si tout voisinage de t est d'intersection non vide avec A et avec $T \setminus A$,

f) la *frontière de* A, notée $A^\bullet$, est l'ensemble des points frontière de A. On a donc $A^\bullet = A^- \cap (T \setminus A)^-$ et $A^\bullet$ est un fermé.

La notion d'espace topologique est parfaitement adaptée à l'introduction de la continuité des applications.

Définition. Soient T, S deux espaces topologiques.
Une application $f : T \to S$ est

a) *continue en* $t_0 \in T$ si, pour tout voisinage V de $f(t_0)$, il existe un voisinage U de t_0 tel que $f(U) \subset V$,

b) *continue* si elle est continue en tout point de T.

Théorème B.1.1 *Soient T, R, S des espaces topologiques et des applications $f : T \to S$ et $g : S \to R$.*

a) *L'application f est continue si et seulement si l'image inverse par f de tout ouvert de S est un ouvert de T, donc si et seulement si l'image inverse par f de tout fermé de S est un fermé de T.*

b) *Si f est continu, alors on a $f(A^-) \subset (f(A))^-$ pour tout $A \subset T$.*

c) *Si f et g sont continus, alors $g(f) : T \to R$ est continu.* ∎

Définition. Si (T, τ_1) et (T, τ_2) sont deux espaces topologiques, on dit que la topologie de (T, τ_1) est *moins fine que* celle de (T, τ_2) — ou que la topologie de (T, τ_2) est *plus fine que* celle de (T, τ_1) — si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. Cela a donc lieu si et seulement si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, ou encore si et seulement si, pour tout $t \in T$, on a $\mathcal{V}_1(t) \subset \mathcal{V}_2(t)$ donc si et seulement si $\mathrm{id}\colon (T, \tau_2) \to (T, \tau_1)$ est une application continue.

Dans un premier temps, contentons-nous d'introduire la notion de produit de deux espaces topologiques. Cette notion sera généralisée lors de l'étude du théorème de Tychonoff.

Définition. Soient (T_1, τ_1) et (T_2, τ_2) deux espaces topologiques.

On vérifie de suite que l'application $\mathcal{V}$ qui, à tout $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$, associe l'ensemble des parties de $T_1 \times T_2$ qui contiennent un ensemble du type $V_1 \times V_2$ avec $V_1 \in \mathcal{V}_1(t_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}_2(t_2)$ définit une topologie τ sur $T_1 \times T_2$.

On vérifie directement qu'une partie de $T_1 \times T_2$ est ouverte pour cette topologie si et seulement si elle est réunion d'ensembles du type $\Omega_1 \times \Omega_2$ avec $\Omega_1 \in \mathcal{O}_1$ et $\Omega_2 \in \mathcal{O}_2$.

On dit que (T, τ) est *le produit topologique* des espaces topologiques (T_1, τ_1) et (T_2, τ_2).

B.2 Parties compactes

Définition. Une partie K d'un espace topologique T est *compacte* si, de tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un recouvrement fini.

Par passage aux complémentaires, on obtient de suite la condition nécessaire et suffisante suivante: *une partie K d'un espace topologique est compacte si et seulement si l'intersection de toute famille de parties fermées ayant la propriété d'intersection finie est non vide.*

Théorème B.2.1 a) *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

b) *Toute union finie de compacts est compacte.*

c) *Toute image continue d'un compact est compacte.* ∎

Définition. Un espace topologique T est *séparé* si deux points distincts de T admettent des voisinages disjoints. (Cette propriété est toujours satisfaite dans les espaces métriques mais pas nécessairement dans les espaces topologiques. Donner un exemple.)

Théorème B.2.2 *Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

Preuve. Si t_1 et t_2 sont des points distincts d'un espace topologique séparé T, remarquons que t_1 a un voisinage fermé ne contenant pas t_2.

Cela étant, soit K un compact de l'espace topologique séparé T. Si K n'est pas fermé, il existe $t_0 \in K^- \setminus K$. Dès lors,

$$\{\, T \setminus V : V = \text{ voisinage fermé de } t_0 \,\}$$

est un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un recouvrement fini: il existe alors des voisinages fermés $V_1, \ldots, V_J$ de t_0, en nombre fini et tels que $K \subset T \setminus (V_1 \cap \ldots \cap V_J)$, ce qui est absurde.∎

Théorème B.2.3 *Si K et H sont des espaces topologiques compacts et si H est séparé, alors toute bijection continue de K dans H a un inverse continu.*

Preuve. De fait, si f est la bijection, l'image par f de tout fermé de K est un compact donc un fermé de H.∎

B.3 Filtres

Remarque. La notion de convergence des suites n'est guère adaptée aux espaces topologiques non métrisables, c'est-à-dire dont la topologie ne peut être associée à une métrique. Il faut par exemple généraliser la notion de convergence par exemple au moyen de la notion de filtre.□

Définitions. Soit A un ensemble non vide. Un *filtre sur A* est un ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de A tel que

($\mathcal{F}1$) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

($\mathcal{F}2$) $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$,

($\mathcal{F}3$) $A_1 \in \mathcal{F}, A_1 \subset A_2 \subset A \Rightarrow A_2 \in \mathcal{F}$.

On vérifie de suite qu'un ensemble non vide $\mathcal{B}$ de parties non vides de A est tel que

$$\mathcal{F} = \{\, B \subset A : \exists B_0 \in \mathcal{B} \text{ tel que } B_0 \subset B \,\}$$

est un filtre sur A si et seulement si, pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset B_1 \cap B_2$. On dit alors que $\mathcal{F}$ est le *filtre engendré par $\mathcal{B}$* et que $\mathcal{B}$ est *base du filtre $\mathcal{F}$*.

Si u est une application de A dans l'ensemble B et si $\mathcal{F}$ est un filtre sur A, on vérifie de suite que $\{\, uF : F \in \mathcal{F} \,\}$ est une base de filtre sur B dont le filtre engendré est appelé *filtre image de $\mathcal{F}$ par u* et noté $u\mathcal{F}$.

Etant donné deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur A, on dit que $\mathcal{F}_1$ est *plus fin que* $\mathcal{F}_2$ (ou que $\mathcal{F}_2$ est *moins fin que* $\mathcal{F}_1$) si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Passons à quelques exemples élémentaires.

Exemples. L'exemple le plus simple mais aussi le plus trivial de filtre sur un ensemble non vide A est l'ensemble des parties de A qui contiennent une partie non vide B de A.

Voici deux exemples supplémentaires nettement plus intéressants.

Si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de l'ensemble non vide A, on vérifie aisément que l'ensemble des parties de A qui contiennent une queue de cette suite est un filtre sur A, appelé *filtre associé à la suite* $(a_m)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Soit (T,τ) un espace topologique. Pour tout $t \in T$, l'ensemble $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de t dans (T,τ) est évidemment un filtre sur T, appelé *filtre des voisinages de* t.

Définitions. Soit (T,τ) un espace topologique.

Un filtre $\mathcal{F}$ sur (T,τ) *converge vers* $t \in T$ si $\mathcal{F}$ est plus fin que le filtre $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de t, c'est-à-dire si, pour tout $V \in \mathcal{V}(t)$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset V$. On dit alors que t est *limite du filtre* $\mathcal{F}$. Remarquons de suite que

a) *si un filtre converge dans un espace topologique séparé, sa limite est unique.*

b) *une suite* $(t_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *de* T *converge vers* $t \in T$ *si et seulement si le filtre associé à cette suite converge vers* t.

Un *point d'adhérence au filtre* $\mathcal{F}$ sur T est un point de T qui appartient à l'adhérence de chacun des éléments de $\mathcal{F}$. Il suffit évidemment pour cela que ce point appartienne à l'adhérence de chacun des éléments d'une base de $\mathcal{F}$.

Remarques. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'espace topologique (T,τ).

a) Si $\mathcal{F}$ converge vers $t \in T$, alors t est bien sûr point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

b) Le point $t \in T$ est d'adhérence à $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe un filtre $\mathcal{F}_0$ sur T à la fois plus fin que $\mathcal{F}$ et que le filtre $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de t.□

Passons à l'étude des liens entre les notions de compact et de filtre.

Théorème B.3.1 *Un espace topologique séparé* (T,τ) *est compact si et seulement si tout filtre sur* T *a un point d'adhérence.*

En particulier, toute suite d'un compact séparé a un point d'accumulation.

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'espace compact séparé (T,τ). L'ensemble $\{\, A^- : A \in \mathcal{F} \,\}$ a alors la propriété d'intersection finie; on a donc $\cap_{A\in\mathcal{F}} A^- \neq \emptyset$ et tout point de cette intersection convient.

La condition est suffisante. Si l'espace topologique séparé (T,τ) n'est pas compact, c'est qu'il existe un ensemble $\mathcal{A}$ de fermés de T ayant la propriété d'intersection finie et tel que $\cap_{F\in\mathcal{A}} F = \emptyset$. Cela étant, la famille $\mathcal{B}$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ est base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur T qui n'a évidemment pas de point d'adhérence.∎

Définition. Un *ultrafiltre* sur un ensemble non vide A est un filtre sur A qui est égal à tout filtre sur A, plus fin que lui.

Une application directe du lemme de Zorn assure que tout filtre sur un ensemble non vide est inclus dans un ultrafiltre sur cet ensemble.

Proposition B.3.2 *Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur l'ensemble non vide A, alors, pour toute partie B de A, on a $B \in \mathcal{F}$ ou $A \setminus B \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Si on a $B \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\{ B \cap F : F \in \mathcal{F} \}$ est base d'un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ donc égal à $\mathcal{F}$ et B appartient à $\mathcal{F}$.

Si cette condition n'a pas lieu, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $B \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire tel que $A \setminus B \supset F$ et alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$.∎

Proposition B.3.3 *Si un ultrafiltre sur un espace topologique a un point d'adhérence, il converge vers ce point.*∎

Théorème B.3.4 *Un espace topologique séparé est compact si et seulement si tout ultrafiltre y converge.*∎

B.4 Théorème de Tychonoff

Comme annoncé, commençons par introduire la notion de produit (non nécessairement fini) d'espaces topologiques.

Définition. Soient J un ensemble non vide et, pour tout $j \in J$, (T_j, τ_j) un espace topologique. Pour tout $t = (t_j)_{j \in J}$ élément de $T = \prod_{j \in J} T_j$, on vérifie directement que l'ensemble $\mathcal{V}(t)$ des parties de T qui contiennent un ensemble du type

$$\left(\prod_{j \in J'} V_j \right) \times \left(\prod_{j \in J \setminus J'} T_j \right)$$

où J' est une partie finie de J et où $V_j \in \mathcal{V}_{\tau_j}(t_j)$ pour tout $j \in J'$, munit T d'une topologie τ par les voisinages; (T, τ) est alors appelé *espace produit topologique* des (T_j, τ_j) pour $j \in J$.

Il est clair que *cet espace est séparé si et seulement si chacun des espaces (T_j, τ_j) est séparé.*

Cela étant, voici le célèbre théorème de Tychonoff.

Théorème B.4.1 (Tychonoff) *Tout produit de compacts séparés est un compact séparé.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur l'espace $(T, \tau) = \prod_{j \in J}(T_j, \tau_j)$.

Pour tout $j \in J$, $\{\pi_j(F) : F \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre sur (T_j, τ_j) et même d'un ultrafiltre $\mathcal{F}_j$ qui converge; soit t_j sa limite. Comme t_j est un point adhérent à $\pi_j(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, on obtient que, pour tout voisinage V_j de t_j dans (T_j, τ_j), $\pi_j^{-1}(V_j) \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ donc que $\pi_j^{-1}(V_j) \in \mathcal{F}$. La conclusion s'ensuit aussitôt.∎

B.5 Espaces de Baire

Définition. Un espace topologique est de *Baire* si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Par passage aux complémentaires, il revient au même de dire “si toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense”.

Théorème B.5.1 (Baire) *Tout espace métrique complet est de Baire.*
En particulier, tout espace de Banach est de Baire.

Preuve. Soit F_m une suite de fermés d'intérieur vide de l'espace métrique complet (M, d).

Procédons par l'absurde: supposons $F = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$ d'intérieur non vide. Il existe alors $e_0 \in F$ et $r > 0$ tels que $b(e_0; r) \subset F$. Comme F_1 est d'intérieur vide et fermé, il existe $e_1 \in b(e_0; < r)$ tel que $e_1 \notin F_1$, donc $r_1 \in]0, r/2[$ tel que $b(e_1; r_1) \subset b(e_0; r)$ et $b(e_1; r_1) \cap F_1 = \emptyset$. Comme F_2 est d'intérieur vide et fermé, il existe $e_2 \in b(e_1; < r_1)$ tel que $e_2 \notin F_2$, donc $r_2 \in]0, r_1/2[$ tel que $b(e_2; r_2) \subset b(e_1; r_1)$ et $b(e_2; r_2) \cap F_2 = \emptyset$. En continuant de la sorte, on met en évidence des suites e_m de M et r_m de $]0, +\infty[$ telles que

$$\begin{aligned} 0 \ < \ & r_{m+1} < r_m/2 \\ b(e_{m+1}; r_{m+1}) & \subset b(e_m; r_m) \\ b(e_{m+1}; r_{m+1}) & \cap F_{m+1} = \emptyset. \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt que $r_m \to 0$ et que la suite e_m est de Cauchy donc converge; soit f_0 sa limite. D'une part, f_0 doit appartenir au fermé $b(e_0; r)$ donc à F car chacun des e_m appartient à $b(e_0; r)$. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, f_0 doit appartenir à $b(e_m; r_m)$ car, pour tout $k \geq m$, on a $e_k \in b(e_m; r_m)$; il s'ensuit que f_0 n'appartient à aucun des F_m. D'où une contradiction.∎

$* \rightarrow$ Signalons le résultat plus général suivant.

Proposition B.5.2 *Tout produit d'espaces métriques complets est un espace de Baire.*

En particulier, pour tout ensemble J non vide, $\mathbb{K}^J$ est un espace de Baire.

Preuve. Soit $(M_j, \mathrm{d}_j)_{j\in J}$ une famille non vide d'espaces métriques complets. Posons $M = \prod_{j\in J}(M_j, \mathrm{d}_j)$ et considérons une suite $(F_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fermés de M, d'intérieurs vides. Tout revient à établir que $F = \cap_{m=1}^{\infty} F_m$ est d'intérieur vide.

Si ce n'est pas le cas, il existe un ouvert non vide Ω_1 inclus dans F. Comme F_1 est d'intérieur vide, Ω_1 n'est pas inclus dans F_1: il existe donc $m^{(1)} \in \Omega_1 \setminus F_1$ et par conséquent une partie finie J_1 de J et des nombres $r_j^{(1)} \in]0,1[$ pour les $j \in J_1$ tels que le voisinage fermé

$$V_1 = \prod_{j\in J_1} b_j(m_j^{(1)}; r_j^{(1)}) \times \prod_{j\in J\setminus J_1} M_j$$

de $m^{(1)}$ soit inclus dans Ω_1 et disjoint de F_1. Comme F_2 est d'intérieur vide, l'ouvert

$$\Omega_2 = \prod_{j\in J_1} b_j(m_j^{(1)}; < r_j^{(1)}) \times \prod_{j\in J\setminus J_1} M_j$$

n'est pas inclus dans F_2: il existe donc $m^{(2)} \in \Omega_2 \setminus F_2$ et par conséquent une partie finie J_2 de J, disjointe de J_1 et des nombres $r_j^{(2)} \in]0, r_j^{(1)}/2[$ pour les $j \in J_1$ et $r_j^{(2)} \in]0, 2^{-1}[$ pour les $j \in J_2$ tels que le voisinage fermé

$$V_2 = \prod_{j\in J_1\cup J_2} b_j(m_j^{(2)}; r_j^{(2)}) \times \prod_{j\in J\setminus(J_1\cup J_2)} M_j$$

de $m^{(2)}$ soit inclus dans Ω_2 et disjoint de F_2. En continuant de la sorte, on met en évidence une suite $(m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ de points de M, une suite $(J_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de parties finies et deux à deux disjointes de J et des nombres $r_j^{(k)} \in]0, 2^{-k+1}[$ pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $j \in \cup_{l=1}^{k} J_l$ tels que les ensembles

$$V_k = \prod_{j\in J_1\cup\ldots\cup J_k} b_j(m_j^{(k)}; r_j^{(k)}) \times \prod_{j\in J\setminus(J_1\cup\ldots\cup J_k)} M_j$$

soient inclus dans F, emboîtés en décroissant et tels que $V_k \cap F_k = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $j \in J_k$, la suite $(m_j^{(l)})_{l\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans M_j; soit m_j sa limite. Pour tout $j \in J \setminus \cup_{k=1}^{\infty} J_k$, choisissons $m_j \in M_j$. Il est alors clair que le point m de M ainsi défini appartient à F et n'appartient à aucun de F_m. D'où une contradiction.∎← ∗

Exercice. Adapter la démonstration du théorème de Baire pour établir que, *si une partie d'un espace métrique complet est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé, c'est un espace de Baire.*□

Exercice. Adpater la démonstration du théorème de Baire pour établir que *tout espace localement compact et séparé est de Baire.*□

Remarque. Le théorème de Baire est un des piliers de l'analyse fonctionnelle. Ses applications sont nombreuses et profondes. Nous en verrons plusieurs dans la suite. Cependant à ce stade, nous devons nous contenter de quelques conséquences surprenantes.□

Application. *Si Ω est une partie ouverte et non vide de $\mathbb{R}$, il n'existe pas de suite K_m de parties compactes de Ω dont l'union soit égale à l'ensemble des points irrationnels appartenant à Ω.*

Suggestion. Procédons par l'absurde. Quitte à remplacer chacun des K_m par $\cup_{j=1}^m K_j$, nous pouvons supposer les K_m emboîtés en croissant. Soit alors r_m une numérotation des points rationnels appartenant à Ω. Cela étant, les ensembles $H_m = K_m \cup \{r_1, \ldots, r_m\}$ constituent une suite de compacts d'union égale à Ω. Comme Ω est un espace de Baire, l'un d'entre eux doit contenir un intervalle de $\mathbb{R}$, ce qui est contradictoire car un tel intervalle doit contenir une infinité de points rationnels distincts.□

Application. Déduire de l'application précédente qu'*il n'existe pas de fonction $f\colon]-1,1[\to \mathbb{C}$ continue en tout point rationnel et discontinue en tout point irrationnel de $]-1,1[$.*

Suggestion. Si une fonction $f\colon]-1,1[\to \mathbb{C}$ est continue en tout point rationnel de $]-1,1[$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in]-1,1[$ rationnel, il existe $\eta(x,1/m) > 0$ tel que

$$(y \in]-1,1[, |x-y| < \eta(x,1/m)) \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1/m.$$

Si, en plus, f est discontinu en tout point irrationnel de $]-1,1[$,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left([-1+\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}] \setminus \bigcup_{\substack{-1+\frac{1}{m} \leq x \leq 1-\frac{1}{m} \\ x \text{ rationnel}}} b(x; < \eta(x,1/m)) \right)$$

est égal à l'ensemble des points irrationnels de $]-1,1[$. Comme il s'agit d'une réunion dénombrable de compacts, nous sommes arrivés à une contradiction.□

Application. *Il existe une fonction continue et réelle sur $[0,1]$ qui n'est monotone sur aucun intervalle inclus dans $[0,1]$.*

Suggestion. L'ensemble des intervalles inclus dans $[-1,1]$ et ayant des extrémités rationnelles est dénombrable; soit $\{ I_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ une numérotation de ces intervalles. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_m = \{ f \in \mathrm{C}_{0,\mathbb{R}}([0,1]) : f \text{ non monotone sur } I_m \}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on vérifie aisément que A_m est une partie ouverte et partout dense de $\mathrm{C}_{0,\mathbb{R}}([0,1])$. Cela étant, vu le théorème de Baire, $\cap_{m=1}^{\infty} A_m$ est partout dense. Pour conclure, il suffit alors de constater que les éléments de cette intersection ne sont monotones sur aucun intervalle inclus dans $[0,1]$.$\square$

Remarque. En recourant au théorême de Baire, on peut établir les propriétés suivantes :
a) *si* $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ *donne lieu à l'égalité* $\mathbb{R} = \cup_{m=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \colon \mathrm{D}^m f(x) = 0\}$, *alors* f *est un polynôme.* (cf. [3], p. 58)
b) *si* $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}^2)$ *est tel que pour tous* x, $y \in \mathbb{R}$, *les fonctions* $f(x,.)$ *et* $f(.,y)$ *sont des polynômes, alors la fonction* f *elle-même est un polynôme.*$\square$

Application. *Si* M *est un espace métrique complet et si* $\mathcal{F}$ *est une partie ponctuellement bornée de* $\mathrm{C}_0(M)$, *alors il existe* $x_0 \in M$ *et* $r > 0$ *tels que*

$$\sup\{\, |f(x)| : f \in \mathcal{F}, \mathrm{d}(x,x_0) \le r \,\} < \infty.$$

Suggestion. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$F_m = \{x \in X \colon \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| \le m\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}([0,m])$$

est un fermé de M et la réunion de ces fermés est égale à M.$\square$

Application. *Soit* L_m *une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel* E. *Si leur union* L *est un espace vectoriel, alors*

a) *soit il existe* $m_0 \in \mathbb{N}_0$ *tel que* $L = L_{m_0}$,

b) *soit il en existe une sous-suite* $L_{k(m)}$ *strictement croissante et telle que, pour tout* $j \in \mathbb{N}_0$, L_j *soit inclus dans un des* $L_{k(m)}$.

Suggestion. Supposons avoir $L_k \neq \cup_{m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{k\}} L_m$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Il existe alors un premier entier $k \ge 2$ tel que $L_k \not\subset L_1$. Cela étant, $L_1 + L_k$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie — donc un espace de Banach — dont $\{\, (L_1 + L_k) \cap L_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ est un recouvrement dénombrable fermé. Vu le théorème de Baire, il existe alors un premier entier $k(1)$ tel que $(L_1 + L_k) \cap L_{k(1)}$ soit d'intérieur non vide dans $L_1 + L_k$ donc tel que $L_1 + L_k \subset L_{k(1)}$. En continuant de la sorte, on obtient la suite annoncée en b).$\square$

Application. *Il n'existe pas d'espace de Banach ayant une base de Hamel dénombrable infinie.*

Suggestion. Sinon $E = \cup_{m=1}^{\infty} \mathrm{span}(\{\, e_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\})$ serait union dénombrable de fermés d'intérieurs vides.$\square$

Développons un point de vue plus général.

Définitions. Soit (T, τ) un espace topologique séparé.

Une partie B de T est *rare* si l'intérieur de son adhérence est vide.

Une partie B de T est de *première catégorie* — on dit aussi que B est *maigre* — si elle est réunion dénombrable de parties rares de T.

Une partie B de T est de *deuxième catégorie* si elle n'est pas de première catégorie. Il est clair que si $B \subset T$ est de deuxième catégorie, alors toute partie de T contenant B est aussi de deuxième catégorie.

Cela étant, l'espace (T, τ) est de *Baire* si tout ouvert non vide de T est de deuxième catégorie; en particulier, T lui-même est alors de deuxième catégorie.

Théorème B.5.3 *Si (T, τ) est un espace topologique séparé, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *l'espace (T, τ) est de Baire;*

(b) *toute intersection dénombrable d'ouverts partout dense de T est partout dense;*

(c) *toute réunion dénombrable de fermés rares est d'intérieur vide.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). Soit $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts partout denses. Pour conclure, il suffit de prouver que, pour tout ouvert non vide Ω de T, on a

$$\Omega \cap (\cup_{m=1}^{\infty} \Omega_m) \neq \emptyset.$$

Soit donc Ω un ouvert non vide de T. Comme, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T \setminus \Omega_m$ est un fermé rare, $(T \setminus \Omega_m) \cap \Omega$ est une partie rare. Comme Ω est de deuxième catégorie, on a $\Omega \neq \cup_{m=1}^{\infty} ((T \setminus \Omega_m) \cap \Omega)$, ce qui signifie l'existence d'un point de Ω appartenant à chacun des Ω_m.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soient Ω un ouvert non vide de T et $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de parties rares de T incluses dans Ω. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Omega_m = T \setminus B_m{}^-$ est alors un ouvert partout dense; par conséquent, $\cap_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ est une partie partoiut dense de T et on a donc $\Omega \cap (\cap_{m=1}^{\infty} \Omega_m) \neq \emptyset$. Ceci signifie clairement que Ω ne peut être réunion des B_m.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) s'obtient directement par passage aux complémentaires.∎

En voici une application.

Proposition B.5.4 *Soit E un espace localement convexe de Baire.*

Si $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels partout denses de E et de réunion égale à E, alors un des E_m est un espace de Baire.

Preuve. Procédons par l'absurde.

Supposons qu'aucun des E_m ne soit de Baire. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace topologique E_m contient alors un ouvert non vide Ω_m de première catégorie; on en déduit aisément que E_m lui-même est un espace de première catégorie et il existe donc une suite $(B_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de parties rares de E_m dont la réunion est égale à E_m.

Cela étant, il vient

$$E = \cup_{m=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} B_{m,k}$$

et, comme E est un espace de Baire, il existe m_0, $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que B_{m_0,k_0} ne soit pas une partie rare de E. Il existe donc un ouvert non vide Ω de E tel que $\Omega \subset (B_{m_0,k_0})^{-E_{m_0}}$ donc tel que $\Omega \cap E_{m_0} \subset (B_{m_0,k_0})^{-E_{m_0}}$. D'où une contradiction.∎

Bibliographie

[1] Banach S., *Théorie des opérations linéaires*, Monografjie Matematyczne, **1**, Warszawa, 1932.

[2] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques*, Paris, 2ème édition, Tome **1**: 1966, Tome **2**: 1967.

[3] Boas R., *A primer of real functions*, The Carus Mathematical Monographs **13**, Math. Assoc. Amer., John Wiley ans Sons, 1960.

[4] Dunford N., Schwartz J. T., *Linear Operators*, Interscience, New York, part **I**: 1952, part **II**: 1963, part **III**: 1971.

[5] Garnir H. G., De Wilde M., Schmets J., *Analyse fonctionnelle*, **I** & **II**, Birkhâuser, Basel, 1968 & 1973.

[6] Grothendieck A., *Topological vector spaces*, Gordon and Breach, New York, 1973.

[7] Heuser H., *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1975.

[8] Horváth J., *Topological Vector Spaces and Distributions* **1**, Addison-Wesley, Reading, 1966.

[9] Jarchow H., *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart, 1981.

[10] Kelley J. L., Namioka I., *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[11] Kőthe G., *Topological Vector Spaces* **1**, Springer, Berlin, 1969. (Traduction de *Topologische lineare Răume* **1**, Springer, Berlin, 1966).

[12] Meise R., Vogt D., *Einfűhrung in die Funktionalanalysis*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1992; traduit par Ramanujan M. S.: *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **2**, 1997.

[13] Pérez Carreras P., Bonet J., *Barrelled Locally Convex Spaces*, North-Holland Mathematics Studies **131**, 1991.

[14] Rudin W., *Functional Analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1991.

[15] Schaefer H., *Topological Vector Spaces*, Springer, Berlin, 1971.

[16] Schmets J., *Analyse mathématique*, Notes de cours, Université de Liège, Année académique 1996–1997.

[17] Schmets J., *Analyse mathématique, Introduction aux espaces fonctionnels*, Notes de cours, Université de Liège, Année académique 1994–1995.

[18] Schwartz L., *Analyse: topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, **11**, Hermann, Paris, 1970.

[19] Taylor A. E., Lay D., *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1980.

[20] Trèves F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.

Index terminologique

Index des notations

Table des matières