

UNIVERSITE DE LIEGE

Faculté des Sciences

Institut de Mathématique

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Introduction aux espaces fonctionnels

Notes du cours de la seconde candidature
en sciences mathématiques ou en sciences physiques

Jean SCHMETS

Année académique 2004–2005

Introduction

Ce livre contient les notes du cours d'analyse mathématique que j'enseigne à la deuxième candidature en sciences mathématiques ou en sciences physiques.

La première partie est une introduction aux espaces de fonctions continues et aux espaces de fonctions dérivables. Elle fut à une époque réservée aux étudiants de la deuxième candidature en sciences mathématiques, cela m'amenait à en effectuer quelques rappels dans la seconde partie. A présent, cette matière ne figure plus explicitement au programme de la deuxième candidature en sciences mathématiques. Elle est vue au fur et à mesure des besoins. Les rappels en sont d'autant plus justifiés.

Son premier chapitre est consacré aux espaces métriques. Après l'étude de l'espace \mathbb{R}^n en première candidature, il sert de tremplin à l'étude de la topologie générale en première licence.

Dans le deuxième chapitre, les espaces normés et de Banach, de même que les espaces à semi-normes dénombrables et de Fréchet, sont introduits. On ne peut évidemment pas y procéder à une étude en profondeur de ces espaces: les cours d'analyse fonctionnelle de la licence y sont consacrés. Cependant le traitement de la convergence des séries y est assez fouillé.

Le troisième chapitre, de loin le plus important à ce stade, est consacré aux espaces de fonctions continues $C_0(K)$, $C_0(F)$ et $C_0(\Omega)$ ainsi qu'aux espaces $C_p(\Omega)$ ($p \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$) des fonctions p fois continûment dérivables. On y trouve par exemple les théorèmes de permutation des limites, de Dini, de Stone-Weierstrass (cas réel et cas complexe, en insistant sur ses applications aux espaces de fonctions périodiques), de dérivation terme à terme des séries de fonctions, ...

La deuxième partie est relative aux espaces de fonctions mesurables. Elle est destinée aux étudiants en sciences mathématiques ou en sciences physiques.

Il n'est pas possible de développer, en un cours de trente heures, une introduction substantielle à ces espaces. Je dois donc limiter mon objectif aux propriétés essentielles des espaces L^1 , L^2 et L^∞ , du produit de convolution, des transformations de Fourier et de Laplace dans L^1 et dans L^2 , des séries de Fourier et de quelques suites orthonormées totales remarquables dans L^2 . Afin d'ouvrir quelques perspectives, j'ai cependant jugé bon d'inclure dans ces notes des compléments à la matière

vue au cours: cela permettra aux étudiants qui le souhaitent, d'avoir de nombreux renseignements supplémentaires.

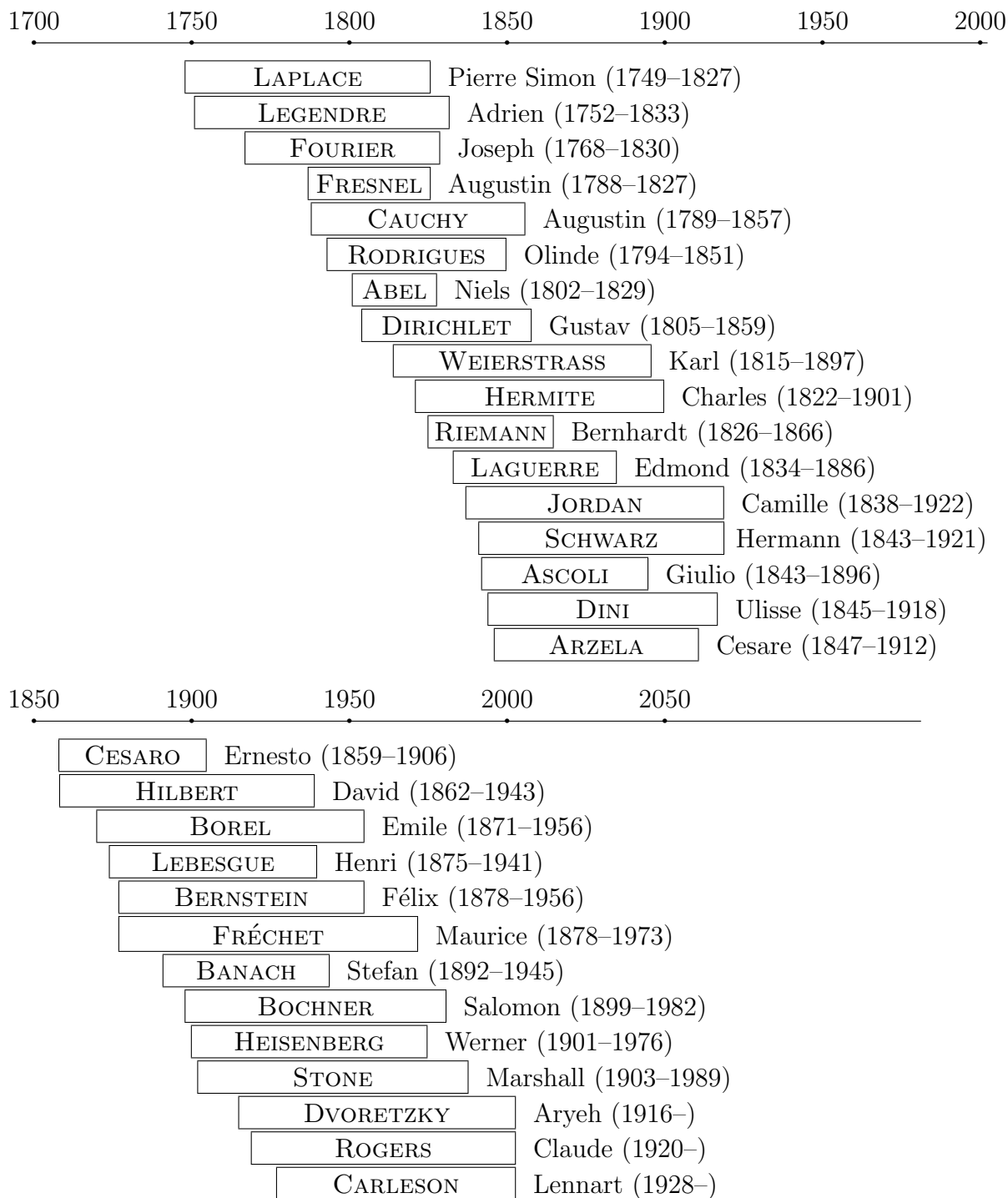
Par rapport à l'édition précédente, quelques améliorations ont été apportées (par exemple, une deuxième démonstration du théorème d'existence d'une partition D_∞ et localement finie subordonnée à un recouvrement ouvert d'un ouvert de \mathbb{R}^n) ainsi que quelques compléments dont le théorème de léthargie de Bernstein (qui montre clairement les limites du théorème de Stone-Weierstrass), le théorème de Borel, une introduction à l'inégalité de Heisenberg, ...

Ces notes sont complétées par un "Cahier d'exercices et d'applications". C'est la raison pour laquelle elles ne contiennent que peu d'exemples, exercices et applications malgré l'importance que je leur accorde.

Je remercie très vivement Madame F. Bastin qui a corrigé les épreuves avec grand soin lors de l'édition originale.

J. Schmets

Quelques repères chronologiques de mathématiciens cités



Partie I
ESPACES C_p

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Définitions générales

Définitions. Une *distance* sur un ensemble non vide X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes:

a) $d(x, y) \geq 0$

b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, propriété connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*: tout côté d'un triangle est inférieur ou égal à la somme des deux autres.

Un *espace métrique* est un ensemble non vide X muni d'une distance d ; il est noté (X, d) ou même tout simplement X si aucune ambiguïté sur d n'est possible.

Théorème 1.1.1 Si (X, d) est un espace métrique, on a

a) $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ (i.e. tout côté d'un triangle est supérieur ou égal à la différence des deux autres);

b) $|d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t)$.

Preuve. a) résulte directement des inégalités

$$d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y) \text{ et } d(y, z) - d(z, x) \leq d(y, x)$$

qu'on déduit aussitôt de la propriété d) de d ,

b) résulte directement des inégalités

$$d(x, y) - d(z, t) \leq d(x, z) + d(z, t) + d(t, y) - d(z, t)$$

$$d(z, t) - d(x, y) \leq d(z, x) + d(x, y) + d(y, t) - d(x, y)$$

qu'on déduit également aussitôt de la propriété d) de d . ■

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, l'espace euclidien réel de dimension n est l'espace métrique (\mathbb{R}^n, d) , à savoir l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne d définie par $d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$. \square

Exemple. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, l'espace euclidien complexe de dimension n est l'espace métrique (\mathbb{C}^n, d) , à savoir l'espace vectoriel \mathbb{C}^n muni de la distance euclidienne d définie par $d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$. \square

Exemple. Pour tout ensemble non vide X , l'application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur X , appelée *distance discrète* sur X . L'espace métrique (X, d) est appelé *l'espace discret associé à X* . \square

Exemple. Sur tout ensemble de plus d'un élément, il existe une infinité de distances! De fait, si d est une distance sur un tel ensemble X , rd est aussi une distance sur X quel que soit $r > 0$.

Notons aussi que

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \quad \text{et} \quad d_\infty(x, y) = \sup_{j \leq n} |x_j - y_j|$$

définissent des distances sur \mathbb{R}^n et sur \mathbb{C}^n . \square

Définitions. Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $a \in X$ et tout $r > 0$, on appelle

a) $b(a; < r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ et $b(a; r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ les *boules* de centre a et de rayon r . (Bientôt nous distinguerons ces deux ensembles en désignant le premier par l'expression *boule ouverte* et le second par *boule fermée*);

b) $\{x \in X : d(x, a) = r\}$ la *sphère* de centre a et de rayon r .

Remarque. Nous venons tout simplement de généraliser aux espaces métriques les notions de boules et de sphère introduites dans les espaces \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n .

Il convient cependant de se montrer prudent vis-à-vis des analogies: ainsi, dans l'espace discret (X, d) et pour tout $a \in X$, on a

$$b(a; < r) = \begin{cases} X & \text{pour tout } r \in]1, \infty[\\ \{a\} & \text{pour tout } r \in]0, 1] \end{cases}$$

$$b(a; \leq r) = \begin{cases} X & \text{pour tout } r \in [1, \infty[\\ \{a\} & \text{pour tout } r \in]0, 1[\end{cases} \quad \square$$

1.2 Topologie d'un espace métrique

Définitions. Une partie A de l'espace métrique (X, d) est

- a) *ouverte* (on dit aussi un *ouvert*) si tout point de A est le centre d'une boule incluse dans A ;
- b) *fermée* (on dit aussi un *fermé*) si $X \setminus A$ est ouvert;
- c) un *voisinage* de $a \in X$ si a appartient à un ouvert inclus dans A .

Cela étant, pour tous $a \in X$ et $r > 0$, on vérifie de suite que $b(a; < r)$ est un ouvert et $b(a; \leq r)$ un fermé de X . Il s'ensuit que $A \subset X$ est un voisinage de $a \in X$ si et seulement si a est le centre d'une boule incluse dans A . De plus, une partie de X est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.

Théorème 1.2.1 Dans un espace métrique (X, d) ,

- a) X et \emptyset sont ouverts et fermés;
- b) toute union d'ouverts est ouverte; toute intersection de fermés est fermée;
- c) toute intersection finie d'ouverts est ouverte; toute union finie de fermés est fermée. ■

Proposition 1.2.2 Dans un espace métrique (X, d) ;

- a) tout voisinage de $a \in X$ contient a ;
- b) toute partie de X qui contient un voisinage de $a \in X$ est un voisinage de a ;
- c) toute intersection finie de voisinages de $a \in X$ est un voisinage de a ;
- d) tout voisinage V de $a \in X$ contient un voisinage W de a tel que V soit voisinage de tout $b \in W$. ■

Théorème 1.2.3 Tout espace métrique (X, d) est séparé, (c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe des voisinages V_x de x et V_y de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$).

Preuve. En posant $r = d(x, y)$, on vérifie de suite que les ensembles $V_x = b(x; < r/2)$ et $V_y = b(y; < r/2)$ conviennent. ■

Corollaire 1.2.4 Dans un espace métrique, toute partie finie est fermée. ■

Remarque. Dans un espace discret, toute partie est à la fois ouverte et fermée. □

1.3 Parties bornées

Définition. Une partie B de l'espace métrique (X, d) est *bornée* (on dit aussi un *borné*) si elle est incluse dans une boule de X .

Remarquons que l'espace X lui-même peut être borné; c'est d'ailleurs toujours le cas pour un espace discret. Une boule est toujours bornée.

Définition. Si A est une partie non vide de l'espace métrique (X, d) et si $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ est une partie majorée de \mathbb{R} , on appelle *diamètre de A* et on note $\text{diam}(A)$ la borne supérieure de $\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

On établit aisément le résultat suivant.

Proposition 1.3.1 *Une partie non vide d'un espace métrique admet un diamètre si et seulement si elle est bornée. ■*

Remarque. Il convient de se montrer prudent: si (X, d) est un espace discret, on a $\text{diam}(b(x; r)) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $r \in]0, 1[$. □

1.4 Distance de deux parties

Définition. Etant donné deux parties non vides A et B d'un espace métrique (X, d) , la *distance de A à B* est le nombre $d(A, B)$ défini par

$$d(A, B) = \inf \{ d(a, b) : a \in A, b \in B \}.$$

Si A est réduit au seul point a , $d(\{a\}, B)$ est noté plus simplement $d(a, B)$ et est appelé distance de a à B .

Bien sûr, on a $d(A, B) = d(B, A)$ mais d n'est cependant pas une distance sur $\mathcal{P}(X)$ car $d(A, B) = 0$ n'implique pas $A = B$ et l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite. Cependant si A, B et C sont des parties de X et si B est borné, alors on a la majoration

$$d(A, C) \leq d(A, B) + \text{diam}(B) + d(B, C).$$

Exercice. Pour toute partie non vide A de l'espace métrique (X, d) et tout $r > 0$, d'une part l'ensemble $\{x \in X : d(x, A) < (\text{resp. } >; \neq) r\}$ est ouvert et d'autre part l'ensemble $\{x \in X : d(x, A) \leq (\text{resp. } \geq; =) r\}$ est fermé. □

1.5 Intérieur, adhérence et frontière d'une partie

Définitions. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

Un point $a \in X$ est

- a) *intérieur* à A si A est un voisinage de a ;
- b) *adhérent* à A si tout voisinage de a est d'intersection non vide avec A ;
- c) *frontière* de A si tout voisinage de a est d'intersection non vide avec A et $X \setminus A$.

Cela étant,

- a) *l'intérieur* de A , noté A° ; est l'ensemble des points intérieurs à A ,
- b) *l'adhérence* de A , notée A^- ; est l'ensemble des points adhérents à A ,
- c) *la frontière* de A , notée A^\bullet est l'ensemble des points frontières de A .

Bien sûr, on a les résultats suivants.

Proposition 1.5.1 Soit A une partie de l'espace métrique (X, d) .

- a) *L'intérieur* de A est un ouvert inclus dans A et contient tout ouvert inclus dans A .
- b) *L'adhérence* de A est un fermé contenant A et est incluse dans tout fermé contenant A .
- c) On a $A^\bullet = A^- \cap (X \setminus A)^-$; en particulier, la frontière de A est un fermé. ■

Proposition 1.5.2 Pour toute partie A et tout ouvert Ω d'un espace métrique, on a $(A \cap \Omega)^- = (A^- \cap \Omega)^-$. ■

Proposition 1.5.3 Dans un espace métrique,

- a) *la frontière* d'une partie fermée (resp. ouverte) est toujours d'intérieur vide;
- b) *l'intérieur* d'une intersection finie de parties est égale à l'intersection des intérieurs; *l'adhérence* d'une réunion finie de parties est égale à la réunion des adhérences. ■

1.6 Densité et séparabilité

Définitions. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie D de X est *dense* dans $A \subset X$ si on a $D^- \supset A$; elle est *partout dense* si on a $D^- = X$. Une partie A de X est *séparable* si elle contient une partie dénombrable et dense dans A .

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n des espaces sont séparables car, dans chacun de ces espaces, l'ensemble des points rationnels est dénombrable et partout dense. □

Proposition 1.6.1 *Toute partie d'un espace métrique séparable est séparable.*

Preuve. Soit A une partie de l'espace métrique séparable (X, d) et soit x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une numérotation d'une partie dénombrable et partout dense.

Pour tous $k, m \in \mathbb{N}_0$, posons $A_{k,m} = \{x \in A : d(x, x_m) \leq 1/k\}$. L'ensemble des parties $A_{k,m}$ non vides est dénombrable; pour tous $k, m \in \mathbb{N}_0$ tels que $A_{k,m} \neq \emptyset$, on peut donc choisir un point $x_{k,m}$ de $A_{k,m}$ et l'ensemble D de ces points $x_{k,m}$ est dénombrable. De plus, on vérifie directement que D est inclus et dense dans A . D'où la conclusion. ■

1.7 Sous-espaces

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X . Il est clair que la restriction $d|_{A \times A}$ de d à $A \times A$ est une distance sur A , que nous allons noter plus simplement d si aucune ambiguïté ne peut en résulter. L'espace métrique (A, d) est appelé *sous-espace métrique* de (X, d) ; on dit que A est muni de la *distance induite*.

Remarque. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Une partie de A peut alors fort bien être ouverte (resp. fermée; partout dense; ...) dans A sans l'être dans X . Ainsi A est toujours ouvert et fermé dans (A, d) ! Il convient donc de toujours préciser l'espace de référence. □

Théorème 1.7.1 *Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X .*

a) *Une partie B de A est ouverte (resp. fermée) dans (A, d) si et seulement s'il existe un ouvert Ω (resp. un fermé F) de X pour lequel $B = \Omega \cap A$ (resp. $B = F \cap A$).*

b) *Une partie V de A est un voisinage de $a \in A$ dans (A, d) si et seulement s'il existe un voisinage W de a dans X tel que $V = W \cap A$.*

Preuve. a) cas ouvert. La condition est nécessaire. Notons respectivement b_A et b_X les boules de A et de X . Pour tout élément a de B , il existe $r_a > 0$ tel que $b_A(a; < r_a) \subset B$. Dès lors, $\bigcup_{a \in B} b_X(a; < r_a)$ est un ouvert de X dont l'intersection avec A est égale à B . La suffisance de la condition est immédiate.

a) cas fermé. C'est immédiat par passage aux complémentaires.

b) est immédiat. ■

Remarque. Sous les conditions de l'énoncé précédent, toute partie de A qui est ouverte (resp. fermée; voisinage de $a \in A$) dans X est bien sûr ouverte (resp. fermée; voisinage de a) dans A . □

Proposition 1.7.2 Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Si A est ouvert (resp. fermé; voisinage de $a \in A$) dans X , alors tout ouvert (resp. fermé; voisinage de a) dans A est ouvert (resp. fermé; voisinage de a) dans X . ■

1.8 Applications continues

Dans ce paragraphe (X, d_X) , (Y, d_Y) et (Z, d_Z) désignent trois espaces métriques.

Définitions. Une application $f : X \rightarrow Y$ est

- a) *continue en* $x_0 \in X$ si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que $f(W) \subset V$ ou, en d'autres termes, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ vérifiant $d_X(x, x_0) \leq \eta$, on a $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$;
 b) *continue* si elle est continue en tout $x \in X$.

Exemple. Pour toute partie non vide A de X , $d(\cdot, A)$ est une fonction continue sur X . Cela résulte aussitôt de ce que

$$d(x, A) \leq d(x, y) + \text{diam}(\{y\}) + d(y, A), \quad \forall x, y \in X. \square$$

Théorème 1.8.1 Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert (resp. fermé) est ouverte (resp. fermée).

Preuve. Cas ouvert. La condition est nécessaire. Si Ω est un ouvert de Y , il est voisinage de chacun de ses points. Il s'ensuit que tout $x \in f^{-1}(\Omega)$ admet $f^{-1}(\Omega)$ comme voisinage donc que $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert. La condition est suffisante. Etant donné $x \in X$ et un voisinage V de $f(x)$, il existe un ouvert Ω de Y contenant $f(x)$ et inclus dans V . Dès lors, $W = f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X contenant x , c'est-à-dire un voisinage de x tel que $f(W) \subset \Omega \subset V$.

Cas fermé. C'est direct par passage aux complémentaires. ■

Corollaire 1.8.2 Si $f : X \rightarrow Y$ est continu, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$.

Preuve. De fait, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est un fermé de X contenant A . ■

Théorème 1.8.3 La composition d'applications continues est continue, (i.e. si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont continus, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continu).

Preuve. De fait, pour tout ouvert Ω de Z , $(g \circ f)^{-1}(\Omega) = f^{-1}(g^{-1}(\Omega))$ est un ouvert de X . ■

Proposition 1.8.4 *Si F_0 et F_1 sont deux parties fermées et disjointes de (X, d) , il existe une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, à valeurs dans $[0, 1]$, égale identiquement à 0 en tout point de F_0 et à 1 en tout point de F_1 .*

*En particulier, il existe des ouverts disjoints $\Omega_0 \supset F_0$ et $\Omega_1 \supset F_1$. (On dit que tout espace métrique est *normal*).*

Preuve. On vérifie de suite que la fonction

$$f(\cdot) = \frac{d(\cdot, F_0)}{d(\cdot, F_0) + d(\cdot, F_1)}$$

et les ouverts $\Omega_0 = f^{-1}(] - \infty, 1/2[)$ et $\Omega_1 = f^{-1}(]1/2, \infty[)$ conviennent. ■

1.9 Convergence de suites

Définitions. Une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace métrique (X, d) *converge vers* (on dit aussi *tend vers*) $x_0 \in X$ si, pour tout voisinage V de x_0 , il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $x_m \in V$ pour tout $m \geq M$. Il revient au même de dire "si la suite $d(x_m, x_0)$ tend vers 0". Ce point x_0 est appelé *limite* de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et on écrit $x_m \rightarrow x_0$ ou $x_0 = \lim_m x_m$.

On dit que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace métrique X *converge* si elle a une limite.

Théorème 1.9.1 *Dans un espace métrique, si une suite converge, sa limite est unique.* ■

Théorème 1.9.2 *Un point de l'espace métrique X appartient à l'adhérence de $A \subset X$ si et seulement s'il existe une suite de A qui converge vers lui.*

En particulier, une partie d'un espace métrique est fermée si et seulement si elle contient la limite de chacune de ses suites convergentes. ■

Théorème 1.9.3 *Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques est continue si et seulement si, pour toute suite convergente $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans X , la suite $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans Y vers $f(x_0)$, x_0 étant la limite de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$.* ■

Définition. Une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace métrique (X, d) est *de Cauchy* dans X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $d(x_r, x_s) \leq \varepsilon$ pour tous $r, s \geq M$.

Proposition 1.9.4 *Dans un espace métrique,*

- a) *toute suite convergente est de Cauchy;*
- b) *toute suite de Cauchy est bornée;*
- c) *toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy;*
- d) *toute suite de Cauchy dont une sous-suite converge est convergente.* ■

Définition. Un espace métrique est *complet* si toutes ses suites de Cauchy convergent.

Exemple. Nous savons déjà que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, les espaces euclidiens \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont complets. \square

Remarque. Cependant il existe des espaces métriques qui ne sont pas complets: ainsi le sous-espace \mathcal{I} de \mathbb{R} constitué des nombres irrationnels n'est pas complet car la suite $(\sqrt{2}/m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans cet espace \mathcal{I} . \square

Proposition 1.9.5 *Toute partie complète d'un espace métrique est fermée. Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.* \blacksquare

1.10 Précompacts, compacts, extractables

Dans ce paragraphe, (X, d) désigne un espace métrique.

Définition. Une partie K de (X, d) est *précompacte* (on dit aussi un *précompact*) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $\{x_1, \dots, x_J\}$ de X telle que K soit inclus dans $\cup_{j=1}^J b(x_j; \varepsilon)$.

Remarquons de suite que nous pouvons exiger que ces points x_1, \dots, x_J appartiennent à K ou à une partie dense dans K et que les boules soient remplacées par les boules ouvertes correspondantes.

Critère 1.10.1 *Une partie K de (X, d) est précompacte si et seulement si, de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite du précompact K . Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une partie finie A_k de X telle que $K \subset \cup_{a \in A_k} b(a; 1/k)$. Il existe alors $a_1 \in A_1$ tel que

$$N_1 = \{m \in \mathbb{N}_0 : x_m \in b(a_1; 1)\}$$

soit infini. Dès lors, par récurrence, on obtient aisément une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on ait $a_k \in A_k$ et

$$N_k = \{m \in N_{k-1} : x_m \in b(a_k; 1/k)\}$$

infini. Cela étant, la suite dont le m -ème élément est l'élément de la suite de départ d'indice égal au m -ème élément de N_m est assurément une sous-suite de Cauchy de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$.

La condition est suffisante. De fait, si K n'est pas précompact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que de $\{b(x; \varepsilon) : x \in K\}$, on ne puisse pas extraire de partie finie dont l'union contient K . On en déduit aussitôt l'existence d'une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de K telle que $d(x_r, x_s) \geq \varepsilon$ pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ distincts, c'est-à-dire d'une suite dont aucune sous-suite n'est de Cauchy. ■

Proposition 1.10.2 *Tout précompact de (X, d) est séparable.*

Preuve. Si K est un précompact de X , pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe une partie finie A_m de K telle que $K \subset \bigcup_{x \in A_m} b(x; 1/m)$. On vérifie alors de suite que $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ est une partie dénombrable de K qui est dense dans K . ■

Définition. Une partie K de (X, d) est *extractable* si, de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite appartient à K .

Définitions. Une famille $\{A_j : j \in J\}$ de parties de X est un *recouvrement* de $A \subset X$ si $\bigcup_{j \in J} A_j$ contient A . Ce recouvrement est *fini* (resp. *dénombrable*) si J est fini (resp. dénombrable). Il est *ouvert* si chacun des A_j est ouvert.

Une partie K de (X, d) est *compacte* (on dit aussi un *compact*) si, de tout recouvrement ouvert de K , on peut extraire un recouvrement fini; cela a bien sûr lieu si et seulement si l'espace (K, d) lui-même est compact.

Par passage aux complémentaires, on obtient directement qu'une partie K de (X, d) est compacte si et seulement si toute famille $\{F_j : j \in J\}$ de fermés de K qui a la *propriété d'intersection finie* (c'est-à-dire que, pour toute partie finie J' de J , on a $\bigcap_{j \in J'} F_j \neq \emptyset$), est d'intersection non vide.

Exemple. Toute partie finie d'un espace métrique est compacte. □

Exemple. Si la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de (X, d) converge vers x_0 , alors l'ensemble $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ est compact. □

Proposition 1.10.3 *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

Preuve. Si $\{\Omega_j : j \in J\}$ est un recouvrement ouvert du fermé F du compact K de (X, d) , $\{X \setminus F\} \cup \{\Omega_j : j \in J\}$ est un recouvrement ouvert de K . On peut donc en extraire un recouvrement fini de K qui, à l'omission éventuelle près de $X \setminus F$, constitue un recouvrement fini de F , extrait de $\{\Omega_j : j \in J\}$. ■

Théorème 1.10.4 *Toute partie compacte de (X, d) est fermée.*

Preuve. Soit K une partie compacte de (X, d) . Si K n'est pas fermé, il existe $x \in K^- \setminus K$. Cela étant, $\{X \setminus V^- : x \in V, V = \text{ouvert}\}$ est un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un recouvrement fini. D'où une contradiction car ceci entraîne l'existence d'un ouvert V contenant x et tel que $K \cap V = \emptyset$. ■

Proposition 1.10.5 *Toute union finie de parties compactes de (X, d) est compacte.■*

Théorème 1.10.6 *Si $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est une application continue et si K est un compact de X , alors $f(K)$ est un compact de Y .*

Preuve. C'est direct: si $\{\Omega_j : j \in J\}$ est un recouvrement ouvert de $f(K)$, alors l'ensemble $\{f^{-1}(\Omega_j) : j \in J\}$ est un recouvrement ouvert de K . Il existe donc une partie finie J' de J telle que $\bigcup_{j \in J'} f^{-1}(\Omega_j) \supset K$, d'où on tire $\bigcup_{j \in J'} \Omega_j \supset f(K)$, ce qui suffit.■

Théorème 1.10.7 *Si les espaces métriques K et H sont compacts et si $f : K \rightarrow H$ est une bijection continue, alors $f^{-1} : H \rightarrow K$ est continu.*

Preuve. Pour tout fermé F de K , $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est compact vu le théorème précédent, donc fermé, vu ce qui précède. D'où la conclusion.■

Lemme 1.10.8 (Lebesgue) *Si $\{\Omega_j : j \in J\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace métrique précompact et complet (K, d) , il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe $j \in J$ tel que $b(x; r) \subset \Omega_j$.*

Preuve. Si ce n'est pas le cas, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_m \in K$ tel que $b(x_m; 1/m)$ ne soit inclus dans Ω_j pour aucune valeur de $j \in J$. De la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$, on peut extraire une sous-suite de Cauchy donc convergente; soit $x_{k(m)} \rightarrow x_0$. Cela étant, il existe $j \in J$ tel que $x_0 \in \Omega_j$, donc $r > 0$ tel que $b(x_0; r) \subset \Omega_j$. On en déduit aisément l'existence de $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $b(x_m; 1/m) \subset b(x_0; r) \subset \Omega_j$. D'où une contradiction.■

Théorème 1.10.9 *Si (K, d) est un espace métrique, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) K est compact;
- (b) K est extractable;
- (c) K est précompact et complet.

Preuve. (a) \Rightarrow (b). Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de K .

Comme $\{\{x_m : m \geq M\}^- : M \in \mathbb{N}_0\}$ est une famille de parties fermées de K qui a la propriété d'intersection finie, il existe un point $x_0 \in K$ appartenant à $\{x_m : m \geq M\}^-$ pour tout $M \in \mathbb{N}_0$. On en déduit de suite l'existence d'une sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui converge vers x_0 .

(b) \Rightarrow (c). La précompacité résulte aussitôt du critère de précompacité; la complétion est triviale.

(c) \Rightarrow (a). Soit $\{\Omega_j : j \in J\}$ un recouvrement ouvert de K . Vu le lemme de Lebesgue, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, $b(x; r)$ est inclus dans un des Ω_j avec $j \in J$. Comme il existe une partie finie A de K telle que $\bigcup_{x \in A} b(x; r) \supset K$, on conclut aussitôt. ■

Corollaire 1.10.10 *Si toutes les boules fermées de l'espace métrique X sont compactes, alors tout borné de X est précompact et tout borné fermé de X est compact.*

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, dans \mathbb{R}^n et dans \mathbb{C}^n , les compacts, les extractables et les bornés fermés coïncident. ■

1.11 Espaces connexes

Définitions. Un espace métrique X est *connexe* s'il n'admet pas de *disconnexion*, c'est-à-dire de partition en deux parties ouvertes et non vides ou, ce qui revient au même, s'il n'existe pas dans X d'autres parties à la fois ouvertes et fermées que \emptyset et X .

Il s'agit d'une propriété de (X, d) ; on dit cependant qu'une partie A de X est *connexe* si l'espace (A, d) est connexe.

Théorème 1.11.1 *Une partie de \mathbb{R} est connexe si et seulement s'il s'agit de \emptyset , d'un ensemble réduit à un point ou d'un intervalle.*

Preuve. La condition est nécessaire. Il suffit de prouver que si A est une partie connexe de \mathbb{R} qui contient deux points distincts, alors A est un intervalle de \mathbb{R} . Soit m la borne inférieure de A si A est minoré, sinon posons $m = -\infty$. De même, soit M la borne supérieure de A si A est majoré, sinon posons $M = +\infty$. Comme on a bien sûr $m < M$, pour conclure, il suffit de prouver que A contient l'intervalle $]m, M[$. Si ce n'est pas le cas, il existe $x_0 \in]m, M[\setminus A$ et alors $\{A \cap]-\infty, x_0[, A \cap]x_0, +\infty[\}$ est une disconnexion de A . D'où la conclusion.

La condition est suffisante. Il suffit bien sûr de prouver que tout intervalle de \mathbb{R} est connexe. Si ce n'est pas le cas, il existe un intervalle I de \mathbb{R} qui admet une disconnexion $\{\Omega_1, \Omega_2\}$. Soient alors a, b deux nombres réels tels que $a \in \Omega_1$ et $b \in \Omega_2$. Quitte à permuter les rôles de Ω_1 et Ω_2 , nous pouvons supposer avoir $a < b$. Cela étant, considérons $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} :]a, x[\subset \Omega_1\}$. Bien sûr, on doit avoir $a < x_0 < b$, $x_0 \notin \Omega_1$ et $x_0 \notin \Omega_2$, ce qui est contradictoire car alors x_0 est un point de I qui n'appartient pas à $\Omega_1 \cup \Omega_2$. ■

Théorème 1.11.2 *Toute image continue d'un espace connexe est connexe: si $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est une application continue et si C est une partie connexe de X , alors $f(C)$ est une partie connexe de Y .*

Preuve. De fait, s'il existe une disconnexion $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ de $(f(C), d_Y)$, on vérifie de suite que

$$\left\{ f^{-1}(\Omega_1) \cap C, f^{-1}(\Omega_2) \cap C \right\}$$

est une disconnexion de (C, d_X) . ■

Remarque. Bien sûr, le théorème des valeurs intermédiaires est un corollaire direct des deux théorèmes précédents. □

La définition suivante conduit à un critère très utile pour vérifier si un espace est connexe.

Définition. Un espace métrique (X, d) est *connexe par arc* si, pour tous $a, b \in X$, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ d'origine a et d'extrémité b (c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$).

Critère 1.11.3 *Tout espace métrique connexe par arc est connexe.*

Preuve. Procédons par l'absurde. Supposons l'espace métrique (X, d) connexe par arc et non connexe. Il existe alors une disconnexion $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ de X . Étant donné $a \in \Omega_1$ et $b \in \Omega_2$, il existe ensuite un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ d'origine a et d'extrémité b . Vu le théorème précédent, $\gamma([0, 1]) = \Gamma$ est une partie connexe de X . D'où une contradiction car $\{\Gamma \cap \Omega_1, \Gamma \cap \Omega_2\}$ est assurément une disconnexion de (Γ, d) . ■

Exemples. a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, toute partie convexe de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n est connexe par arc donc connexe.*

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, toute boule et tout intervalle de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n sont connexes par arc donc connexes.

b) *Pour tout entier $n \geq 2$, toute sphère de \mathbb{R}^n est connexe par arc donc connexe.* □

Exercice. Établir que l'espace métrique X est connexe par arc si et seulement s'il est connexe et tel que tout point ait un voisinage connexe par arc. □

Théorème 1.11.4 (Passage des douanes) *Si C est une partie connexe de l'espace métrique (X, d) , alors, pour toute partie A de X telle que $C \cap A \neq \emptyset$ et $C \setminus A \neq \emptyset$, on a $C \cap A^\bullet \neq \emptyset$.*

Preuve. De fait, sinon $\{C \cap A^\circ = C \cap A, C \setminus A^-\}$ est une disconnexion de (C, d) . ■

Théorème 1.11.5 *Si $\{C_j : j \in J\}$ est une famille de parties connexes de l'espace métrique (X, d) d'intersections deux à deux non vides, alors $C = \bigcup_{j \in J} C_j$ est une partie connexe de X .*

Preuve. Sinon il existe une disconnexion $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ de (C, d) . Il existe ensuite $j_1, j_2 \in J$ tels que $C_{j_1} \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ et $C_{j_2} \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Ceci entraîne bien sûr $C_{j_1} \subset \Omega_1$ et $C_{j_2} \subset \Omega_2$ car, par exemple, si C_{j_1} n'est pas inclus dans Ω_1 , $\{C_{j_1} \cap \Omega_1, C_{j_1} \cap \Omega_2\}$ est une disconnexion de (C_{j_1}, d) . D'où une contradiction car ceci entraîne $j_1 \neq j_2$ et $C_{j_1} \cap C_{j_2} = \emptyset$. ■

Théorème 1.11.6 *Soit C une partie connexe de l'espace métrique X . Alors toute partie A de X telle que $C \subset A \subset C^-$ est connexe.*

Preuve. De fait, on vérifie de suite que, si $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ est une disconnexion de (A, d) , alors $\{C \cap \Omega_1, C \cap \Omega_2\}$ est une disconnexion de (C, d) . ■

Définition. Deux points x, y de l'espace métrique X sont *connectés dans X* et on écrit $x \sim_X y$ s'il existe une partie connexe de X contenant x et y .

Théorème 1.11.7 *Si X est un espace métrique, \sim_X est une relation d'équivalence sur X .* ■

Définitions. Une *composante connexe* de l'espace métrique X est une classe d'équivalence de \sim_X . Bien sûr, l'ensemble des composantes connexes de X est une partition de X en parties connexes.

La *composante connexe* de $x \in X$ est la composante connexe de X contenant x ; c'est donc $\{y \in X : y \sim_X x\}$.

Théorème 1.11.8 *Soit X un espace métrique.*

a) *Si une composante connexe C de X contient $x \in X$, (c'est-à-dire si C est la composante connexe de x), C coïncide avec la réunion des parties connexes de X qui contiennent x .*

b) *Toute composante connexe de X est fermée.*

Preuve. C'est immédiat, vu ce qui précède. ■

Exercice. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n ,

a) établir que toute composante connexe de Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et aussi une partie ouverte et fermée de Ω ;

b) établir que l'ensemble des composantes connexes de Ω est dénombrable. □

Chapitre 2

Espaces de Banach (éléments)

Convention. A partir de ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou à \mathbb{C} .

2.1 Généralités

Définitions. Une *semi-norme* sur l'espace vectoriel E est une fonction $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- a) $p(ce) = |c|p(e)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$;
- b) $p(e_1 + e_2) \leq p(e_1) + p(e_2)$.

Une *norme* sur l'espace vectoriel E est une semi-norme p sur E telle que $p(e) = 0$ a lieu si et seulement si e est égal à 0. Le plus souvent, on abandonne alors la notation p pour une norme sur E , au profit de $\|\cdot\|$, le nombre $p(e)$ étant noté $\|e\|$.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, le module est une norme sur \mathbb{R}^n et sur \mathbb{C}^n . Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_K := \sup_{x \in K} |\cdot(x)|$ est une norme sur $C_0(K)$. \square

Voici les propriétés fondamentales des semi-normes.

Proposition 2.1.1 *Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E ,*

- a) $p(0) = 0$;
- b) $p(e) \geq 0$;
- c) $p(\sum_{j=1}^J c_j e_j) \leq \sum_{j=1}^J |c_j| p(e_j)$ pour toute combinaison linéaire d'éléments de E ;
- d) $|p(e_1) - p(e_2)| \leq p(e_1 - e_2)$.

Preuve. a) Il suffit de noter qu'on a $p(0) = p(c0) = |c|p(0)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.

b) De fait, pour tout $e \in E$, on a alors

$$0 = p(e - e) \leq p(e) + p(-e) = 2p(e).$$

c) est immédiat par récurrence.

d) résulte aussitôt des majorations

$$\begin{aligned} p(e_1) &= p(e_1 - e_2 + e_2) \leq p(e_1 - e_2) + p(e_2), \\ p(e_2) &= p(e_2 - e_1 + e_1) \leq p(e_2 - e_1) + p(e_1). \blacksquare \end{aligned}$$

Définition. Un *espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ (on écrit aussi E tout simplement si aucune confusion sur $\|\cdot\|$ n'est possible) est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E .

Exemples. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ et $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ sont des espaces normés. Pour tout compact K de \mathbb{R}^n , $(C_0(K), \|\cdot\|_K)$ est un espace normé. \square

Bien qu'immédiat, le résultat suivant est fondamental.

Théorème 2.1.2 a) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, l'application

$$d_{\|\cdot\|} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}; \quad (e_1, e_2) \mapsto \|e_1 - e_2\|$$

est une distance sur E vérifiant les deux propriétés (*) suivantes:

$$\begin{cases} d_{\|\cdot\|}(e_1 - e, e_2 - e) = d_{\|\cdot\|}(e_1, e_2), \\ d_{\|\cdot\|}(ce_1, ce_2) = |c| d_{\|\cdot\|}(e_1, e_2), \quad \forall c \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

b) Inversement si la distance d sur l'espace vectoriel E vérifie les deux propriétés (*) de a), alors la fonction

$$\|\cdot\|_d : E \rightarrow \mathbb{R}; \quad e \mapsto d(e, 0)$$

est une norme sur E telle que $d_{\|\cdot\|_d} = d$.

De plus, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, on a $\|\cdot\|_{d_{\|\cdot\|}} = \|\cdot\|$. \blacksquare

Remarque. Les espaces normés apparaissent donc comme des exemples privilégiés d'espaces métriques. \square

Définitions. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, pour tout $r > 0$, les ensembles

$$b(r) = \{e \in E : \|e\| \leq r\} \quad \text{et} \quad b(< r) = \{e \in E : \|e\| < r\}$$

sont bien sûr égaux respectivement à $b(0; r)$ et à $b(0; < r)$. Ils sont appelés respectivement *boule fermée* de rayon r et *boule ouverte* de rayon r (sans spécification du centre). Pour tout $e \in E$ et tout $r > 0$, on vérifie de suite que

$$b(e; r) = e + b(r) \quad \text{et} \quad b(e; < r) = e + b(< r).$$

Définition. Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont des espaces de Banach. \square

Exercice. Etablir que, si L est un sous-espace vectoriel de l'espace normé E , alors L^- est aussi un sous-espace vectoriel de E . \square

2.2 Séries

Définitions. Etant donné une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ d'un espace vectoriel E , la nouvelle suite $(s_m = \sum_{j=1}^m e_j)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est appelée *série associée à la suite* $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et est notée $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$. On parle tout simplement de la *série* $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$. Cela étant, e_m est appelé le *m-ème terme* et s_m la *m-ème somme partielle* de cette série.

Définition. Une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de l'espace normé E *converge* si la suite $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de ses sommes partielles converge. Par abus d'écriture, dans ce cas, la limite de la suite des sommes partielles est aussi notée $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$, l'ambiguïté de cette notation étant levée par le contexte.

Tout comme dans \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n , on est amené à distinguer plusieurs types de convergence des séries dans les espaces normés.

Définition. Une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est *absolument convergente* si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \|e_m\|$ converge.

Théorème 2.2.1 *Dans un espace de Banach, toute série absolument convergente converge.*

Preuve. De fait, si la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est absolument convergente, la suite $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de ses sommes partielles est de Cauchy car, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p < q$, on a

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{m=p+1}^q e_m \right\| \leq \sum_{m=p+1}^q \|e_m\|$$

et car la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \|e_m\|$ converge. \blacksquare

Remarque. Dans l'énoncé précédent, il est essentiel que l'espace normé E considéré soit complet car *si toute série absolument convergente de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ converge, alors E est de Banach.* Pour établir ce résultat, prouvons que toute suite de Cauchy $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de cet espace E contient une sous-suite convergente donc converge. Bien sûr, de

la suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$, on peut extraire une sous-suite $(e_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p < q$, on ait $\|e_{k(p)} - e_{k(q)}\| \leq 2^{-p}$. Cela étant, considérons la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ de E où on a posé $f_1 = e_{k(1)}$ et $f_m = e_{k(m)} - e_{k(m-1)}$ pour tout $m \geq 2$. D'une part, par construction, la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ est absolument convergente donc converge. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la m -ème somme partielle de cette série est égale à $e_{k(m)}$. D'où la conclusion. \square

Définition. Une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ d'un espace normé est *commutativement convergente* si, pour toute permutation π de \mathbb{N}_0 , la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_{\pi(m)}$ converge, les limites de toutes ces séries étant égales.

Théorème 2.2.2 *Dans un espace normé, toute série convergente et absolument convergente est commutativement convergente.*

En particulier, dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est commutativement convergente.

Preuve. Soit $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ une série convergente et absolument convergente de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit π une permutation de \mathbb{N}_0 . De plus, notons e_0 la limite de la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sum_{m=M}^{\infty} \|e_m\| \leq \varepsilon$ puis $K \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\{1, \dots, M\} \subset \pi(\{1, \dots, K\})$$

donc tel que

$$\left\| e_0 - \sum_{j=1}^p e_{\pi(j)} \right\| = \left\| \sum_{m=M+1}^{\infty} e_m - \sum_{m>M, \pi^{-1}(m) \leq K} e_m \right\| \leq \sum_{m=M+1}^{\infty} \|e_m\| \leq \varepsilon$$

pour tout $p \geq K$. Il s'ensuit que la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_{\pi(m)}$ converge vers e_0 . D'où la conclusion. \blacksquare

Remarque. La réciproque du théorème précédent est fautive. On peut même établir au prix d'une preuve délicate (cf. A. Dvoretzki, C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA **36**(1950), 192–197) que, dans tout espace normé de dimension infinie, il existe une série commutativement convergente et non absolument convergente. Cependant on a la réciproque partielle suivante. \square

Théorème 2.2.3 *Dans \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n , une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.*

Preuve. La nécessité de la condition est connue pour les séries de \mathbb{R}^n . Pour les séries de \mathbb{C}^n , elle résulte directement du cas des séries de \mathbb{R} , en passant aux parties réelle et imaginaire des différentes composantes des termes.

La suffisance de la condition a été établie au théorème précédent. ■

Définition. Une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est *sommable* s'il existe $s_0 \in E$ tel que, pour tout $r > 0$, il existe une partie finie J de \mathbb{N}_0 telle que, pour toute partie finie K de \mathbb{N}_0 telle que $J \subset K$, on a $\|s_0 - \sum_{m \in K} e_m\| \leq r$. Cet élément s_0 est alors appelé *somme de la série* $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$.

En fait, il ne s'agit pas d'un concept nouveau.

Théorème 2.2.4 *Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est sommable de somme s_0 si et seulement si elle est commutativement convergente de limite s_0 .*

Preuve. La condition est nécessaire. Soient π une permutation de \mathbb{N}_0 et $\varepsilon > 0$. Il existe alors une partie finie J de \mathbb{N}_0 telle que, pour toute partie finie K de \mathbb{N}_0 telle que $J \subset K$, on a $\|s_0 - \sum_{m \in K} e_m\| \leq \varepsilon$. Il existe ensuite $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $J \subset \pi(\{1, \dots, M\})$. Cela étant, pour tout $p \geq M$, on a $\|s_0 - \sum_{m=1}^p e_{\pi(m)}\| \leq \varepsilon$, ce qui suffit.

La condition est suffisante. Procédons par l'absurde. Supposons la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ commutativement convergente de limite s_0 et non sommable de somme s_0 . Il existe alors $r > 0$ tel que, pour toute partie finie J de \mathbb{N}_0 , il existe une partie finie K de \mathbb{N}_0 telle que $J \subset K$ et $\|s_0 - \sum_{m \in K} e_m\| \geq r$. Posons d'abord $J = \{1\}$ et soit K_1 l'ensemble K correspondant. Posons ensuite $J = K_1 \cup \{2\}$ et soit K_2 l'ensemble K correspondant. En continuant de la sorte, nous obtenons une suite strictement croissante $(K_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de parties finies de \mathbb{N}_0 telles que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on ait

$$\{1, \dots, m\} \subset K_m \text{ et } \left\| s_0 - \sum_{j \in K_m} e_j \right\| \geq r.$$

Soit $\text{card}(K_m)$ le nombre d'éléments de K_m ; on a donc $\text{card}(K_m) \uparrow +\infty$. Cela étant, il est aisé de construire de proche en proche une permutation π de \mathbb{N}_0 telle que $\pi(\{1, \dots, \text{card}(K_m)\}) = K_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On en déduit que $\sum_{m=1}^{\infty} e_{\pi(m)}$ ne converge pas vers s_0 : on a en effet

$$\left\| s_0 - \sum_{j=1}^{\text{card}(K_m)} e_{\pi(j)} \right\| \geq r, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

D'où une contradiction. ■

Critère 2.2.5 (Cauchy - sommabilité des séries) Dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$, une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est sommable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de \mathbb{N}_0 telle que $\|\sum_{m \in H} e_m\| \leq \varepsilon$ pour toute partie finie H de \mathbb{N}_0 disjointe de J .

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, si s_0 est la somme de cette série alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de \mathbb{N}_0 telle que, pour toute partie finie K de \mathbb{N}_0 , contenant J , $\|s_0 - \sum_{m \in K} e_m\| \leq \varepsilon/2$. Dès lors, pour toute partie finie H de \mathbb{N}_0 disjointe de J , $K = J \cup H$ est une partie finie de \mathbb{N}_0 contenant J donc telle que

$$\left\| \sum_{m \in H} e_m \right\| = \left\| \sum_{m \in K} e_m - \sum_{m \in J} e_m \right\| \leq \left\| s_0 - \sum_{m \in K} e_m \right\| + \left\| s_0 - \sum_{m \in J} e_m \right\| \leq \varepsilon.$$

La condition est suffisante. Bien sûr, la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est alors de Cauchy donc converge; soit s_0 sa limite. Pour tout $\varepsilon > 0$, comme il existe une partie finie J de \mathbb{N}_0 telle que $\|\sum_{m \in H} e_m\| \leq \varepsilon/2$ pour toute partie finie H de \mathbb{N}_0 disjointe de J , on obtient aisément $\|s_0 - \sum_{m=1}^p e_m\| \leq \varepsilon/2$ pour tout $p \geq \sup J$. Cela étant, pour toute partie finie K de \mathbb{N}_0 contenant J , il existe $p \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset \{1, \dots, p\}$. Comme $\{1, \dots, p\} \setminus K$ est une partie finie de \mathbb{N}_0 disjointe de J , il vient

$$\left\| s_0 - \sum_{m \in K} e_m \right\| \leq \left\| s_0 - \sum_{m=1}^p e_m \right\| + \left\| \sum_{m=1}^p e_m - \sum_{m \in K} e_m \right\| \leq \varepsilon$$

car on a $p \geq \sup J$. De là, la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est sommable de somme s_0 . ■

Définitions. Soit $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ une série de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit I une partie de \mathbb{N}_0 . Si I est fini, le symbole $\sum_{m \in I} e_m$ est clair. Si I n'est pas fini, on dit que la famille $\{e_m : m \in I\}$ est *sommable* ou encore que $\sum_{m \in I} e_m$ est *sommable* s'il existe $s_I \in E$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J , on a $\|s_I - \sum_{m \in K} e_m\| \leq \varepsilon$. Cet élément est alors appelé *somme* de $\sum_{m \in I} e_m$. Il s'agit assurément d'une extension des séries sommables et des sommes finies.

Théorème 2.2.6 (Somme par paquets) Soit $\{A_j : j \in J\}$ une partition de \mathbb{N}_0 telle que $J \subset \mathbb{N}_0$ (ce que nous pouvons toujours supposer car J est nécessairement dénombrable).

Si $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est une série sommable de l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$, alors

- pour tout $A \subset \mathbb{N}_0$, $\sum_{m \in A} e_m$ est sommable;
- si s_0 est la somme de $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ et si, pour tout $j \in J$, σ_{A_j} est la somme de $\sum_{m \in A_j} e_m$, alors $\sum_{j \in J} \sigma_{A_j}$ est sommable et sa somme est égale à s_0 .

Preuve. a) résulte aussitôt du critère de Cauchy pour la sommabilité.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de \mathbb{N}_0 telle que, pour toute partie finie H de \mathbb{N}_0 contenant K , on a $\|s_0 - \sum_{m \in H} e_m\| \leq \varepsilon/2$. Il s'ensuit aisément que, pour toute partie H de \mathbb{N}_0 (finie ou non) contenant K , $\sum_{m \in H} e_m$ est sommable et que sa somme σ_H est telle que $\|s_0 - \sigma_H\| \leq \varepsilon$. Il existe ensuite une partie finie B de J telle que $A_B = \bigcup_{j \in B} A_j$ contienne K . Cela étant, pour toute partie finie L de J telle que $B \subset L$, on a d'une part $\|s_0 - \sigma_{A_L}\| \leq \varepsilon$ car A_L contient K et d'autre part $\sigma_{A_L} = \sum_{l \in L} \sigma_{A_l}$ comme on le vérifie aisément (si n est le nombre d'éléments de L , pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $l \in L$, il existe une partie finie J_l de A_l telle que $\|\sigma_{A_l} - \sum_{m \in J_l} e_m\| \leq \varepsilon/n$ pour toute partie finie J_l de A_l telle que $J_l \subset L_l$). Dès lors, on a $\|\sum_{l \in L} \sigma_{A_l} - \sum_{m \in M} e_m\| \leq \varepsilon$ pour toute partie finie M de $A_L = \bigcup_{l \in L} A_l$ telle que $\bigcup_{l \in L} J_l \subset M$). D'où la conclusion. ■

Remarque. Soit $\{A_j : j \in J\}$ une partition de \mathbb{N}_0 telle que $J \subset \mathbb{N}_0$. Si $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est une série dans l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ et si, pour tout $j \in J$, la série $\sum_{m \in A_j} e_m$ est sommable de somme σ_{A_j} ,

a) on ne peut pas affirmer que $\sum_{j \in J} \sigma_{A_j}$ est sommable; il suffit de considérer le cas $J = \mathbb{N}_0$, $A_j = \{2j-1, 2j\}$ et $e_m = (-1)^m m$ dans $E = \mathbb{R}$;

b) et si $\sum_{j \in J} \sigma_{A_j}$ est sommable, on ne peut pas affirmer que $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est sommable: il suffit de considérer le cas $J = \mathbb{N}_0$, $A_j = \{2j-1, 2j\}$, $e_{2m} = m$ et $e_{2m-1} = -m$ dans $E = \mathbb{R}$. □

2.3 Opérateurs linéaires continus

Rappel. Si E et F sont deux espaces vectoriels, un opérateur linéaire de E dans F est une application $T : E \rightarrow F$ qui vérifie les propriétés suivantes:

a) $T(e_1 + e_2) = Te_1 + Te_2$;

b) $T(ce) = cTe$ pour tout $c \in \mathbb{K}$;

donc telle que $T\left(\sum_{j=1}^J c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^J c_j Te_j$ pour toute combinaison linéaire d'éléments de E .

Théorème 2.3.1 *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Un opérateur linéaire T de E dans F est continu si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $\|T\cdot\|_F \leq C \|\cdot\|_E$.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, l'image inverse par T de la boule ouverte de rayon 1 dans F est un ouvert de E contenant l'origine: il existe donc $r > 0$ tel que $\|e\|_E \leq r$ entraîne $\|Te\|_F \leq 1$. Dès lors, on a

$$\|Te\|_F \leq \frac{1}{r} \|e\|_E, \quad \forall e \in E,$$

car, d'une part, cette majoration est triviale pour $e = 0$ et, d'autre part, pour tout $e \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\left\| \frac{r}{\|e\|_E} e \right\|_E = r \text{ donc } \left\| T \left(\frac{r}{\|e\|_E} e \right) \right\|_F \leq 1 \text{ donc } \|Te\|_F \leq \frac{1}{r} \|e\|_E.$$

La condition est suffisante. De fait, pour tous $e_0 \in E$ et $r > 0$, l'image par T de $b_E(e_0; r/C)$ est incluse dans $b_F(Te_0; r)$ car on a

$$\|e - e_0\|_E \leq \frac{r}{C} \Rightarrow \|Te - Te_0\|_F = \|T(e - e_0)\|_F \leq C \|e - e_0\|_E \leq r. \blacksquare$$

Définition. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces normés et si T est un opérateur linéaire continu de E dans F , on a bien sûr

$$\sup_{e \neq 0} \frac{\|Te\|_F}{\|e\|_E} = \sup_{0 < \|e\|_E \leq 1} \|Te\|_F = \sup_{\|e\|_E=1} \|Te\|_F$$

et ce nombre, noté $\|T\|$, est la borne inférieure de l'ensemble des nombres $C > 0$ tels que $\|T \cdot\|_F \leq C \|\cdot\|_E$. Ce nombre $\|T\|$ est appelé *la norme de T* .

Théorème 2.3.2 *Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces normés, si T est un opérateur linéaire continu de E dans F et*

- a) *si la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de E converge, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} Te_m$ converge dans F vers $T(\sum_{m=1}^{\infty} e_m)$;*
- b) *si la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de E converge absolument, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} Te_m$ de F converge absolument et on a*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|_F \leq \|T\| \sum_{m=1}^{\infty} \|e_m\|_E;$$

- c) *si la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de E est commutativement convergente de somme s_0 , alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} Te_m$ de F est commutativement convergente de somme Ts_0 . \blacksquare*

2.4 Espaces de Fréchet (définition)

Définition. Un *espace à semi-normes dénombrables séparé* (E, P) (on écrit aussi E tout simplement si aucune confusion sur P n'est possible) est la donnée d'un espace vectoriel E et d'un ensemble dénombrable $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ de semi-normes sur E telles que

- a) $p_m \leq p_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- b) $p_m(e) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ entraîne $e = 0$.

Définition. Soit (E, P) un espace à semi-normes dénombrables séparé. Pour tous $e_0 \in E$, $p \in P$ et $r > 0$, les ensembles

$$b_p(e_0; r) = \{ e \in E : p(e - e_0) \leq r \}$$

et

$$b_p(e_0; < r) = \{ e \in E : p(e - e_0) < r \}$$

sont appelés *semi-boules* de *centre* e_0 , de *semi-norme* p et de *rayon* r . (Bientôt nous pourrons distinguer ces deux ensembles en désignant le premier par l'expression semi-boule fermée et le second par semi-boule ouverte). Remarquons qu'on a bien sûr

$$b_p(e; r) = e + b_p(0; r) \text{ et } b_p(e; < r) = e + b_p(0; < r)$$

pour tous $e \in E$, $p \in P$ et $r > 0$.

Théorème 2.4.1 Si (E, P) est un espace à semi-normes dénombrables séparé avec $P = \{ p_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$, l'application

$$d_P : E \times E \rightarrow \mathbb{R}; \quad (e_1, e_2) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(e_1 - e_2)}{1 + p_m(e_1 - e_2)}$$

est une distance sur E telle que

- a) $d_P(e_1 - e, e_2 - e) = d_P(e_1, e_2)$; on a donc $b_{d_P}(e; r) = e + b_{d_P}(0; r)$ ainsi que $b_{d_P}(e; < r) = e + b_{d_P}(0; < r)$ pour tous $e \in E$ et $r > 0$;
- b) pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, il existe $s > 0$ tel que $b_{d_P}(0; s) \subset b_{p_m}(0; r)$;
- c) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que $b_{p_m}(0; \eta) \subset b_{d_P}(0; \varepsilon)$.

Preuve. Remarquons d'abord que la fonction

$$f :] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x}{1 + x}$$

appartient à $C_\infty(] - 1, +\infty[)$, est strictement croissante et vérifie l'inclusion suivante $f(]0, +\infty[) \subset]0, 1[$. Il s'ensuit que l'application d_P est définie. C'est même une distance sur E car

- i) on a bien sûr $d_P(e_1, e_2) \geq 0$ pour tous $e_1, e_2 \in E$;
- ii) si $e_1, e_2 \in E$ vérifient $d_P(e_1, e_2) = 0$, on doit avoir $p_m(e_1 - e_2) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ donc $e_1 = e_2$;
- iii) on a bien sûr $d_P(e_1, e_2) = d_P(e_2, e_1)$ pour tous $e_1, e_2 \in E$;

iv) l'inégalité triangulaire résulte aussitôt des inégalités

$$\begin{aligned} \frac{p_m(e_1 - e_3)}{1 + p_m(e_1 - e_3)} &\leq \frac{p_m(e_1 - e_2) + p_m(e_2 - e_3)}{1 + p_m(e_1 - e_2) + p_m(e_2 - e_3)} \\ &\leq \frac{p_m(e_1 - e_2)}{1 + p_m(e_1 - e_2)} + \frac{p_m(e_2 - e_3)}{1 + p_m(e_2 - e_3)} \end{aligned}$$

valables pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tous $e_1, e_2 \in E$ (la première inégalité résulte du fait que f est croissant).

a) est immédiat.

b) De fait, $s = 2^{-m}r/(1+r)$ convient.

c) De fait, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^{-M} \leq \varepsilon/2$ et $\eta > 0$ tel que $\eta/(1+\eta) \leq \varepsilon/2$ donc tels que $p_M(e) \leq \eta$ entraîne

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(e)}{1 + p_m(e)} \leq \sum_{m=1}^M 2^{-m} \frac{\eta}{1 + \eta} + \sum_{m=M+1}^{\infty} 2^{-m} \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

Remarque. Les espaces à semi-normes dénombrables séparés (E, P) apparaissent donc comme des exemples privilégiés d'espaces métriques, à savoir (E, d_P) . Le tout est de savoir comment adapter à (E, P) les notions étudiées au chapitre I dans (E, d_P) . Vu le théorème précédent, il est aisé d'établir les résultats suivants, qui nous suffiront pour la suite:

a) une partie V de E est un voisinage de $e \in E$ si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ et $r > 0$ tels que $V \supset b_{p_m}(e; r)$;

b) une partie Ω de E est donc ouverte si et seulement si tout point de Ω est le centre d'une semi-boule incluse dans Ω ;

c) une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de E converge vers $e_0 \in E$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a $p_k(e_m - e_0) \rightarrow 0$;

d) une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de E est de Cauchy si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $p_k(e_r - e_s) \leq \varepsilon$ pour tous $r, s \geq M$;

e) une partie K de E est précompacte si et seulement si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $r > 0$, il existe une partie finie $\{e_1, \dots, e_J\}$ de E telle que $K \subset \bigcup_{j=1}^J b_{p_m}(e_j; r)$. □

Définition. Un *espace de Fréchet* est un espace à semi-normes dénombrables séparé et complet.

Chapitre 3

Espaces du type C_p

3.1 Convergence ponctuelle

Définition. Si A est une partie non vide de \mathbb{R}^n ,

$$F_{\mathbb{K}}(A) \quad (\text{resp. } FB_{\mathbb{K}}(A))$$

désigne l'ensemble des fonctions (resp. des fonctions bornées) sur A , à valeurs dans \mathbb{K} , muni des opérations habituelles de combinaison linéaire et de produit. Si aucun doute sur \mathbb{K} n'est possible ou si le résultat annoncé est valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on écrit plus simplement $F(A)$ (resp. $FB(A)$).

Il s'agit donc d'espaces vectoriels mais on a bien mieux.

Définitions. Une \mathbb{K} -algèbre (on dit aussi une *algèbre* si aucun doute sur \mathbb{K} n'est possible) est un espace \mathbb{K} -vectoriel $(L, +, \cdot)$ muni d'une multiplication interne $\times : L \times L \rightarrow L$ telle que

$$\begin{aligned} f \times (g \times h) &= (f \times g) \times h \\ f \times (g + h) &= (f \times g) + (f \times h) \\ (f + g) \times h &= (f \times h) + (g \times h) \\ c \cdot (f \times g) &= (c \cdot f) \times g = f \times (c \cdot g), \quad \forall c \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Bien souvent, on écrit fg au lieu de $f \times g$ et on parle de l'algèbre L .

Un telle algèbre L

- a) est *commutative* si $fg = gf$ pour tous $f, g \in L$;
- b) a une *unité dans une algèbre* s'il existe $e \in L$ tel que $ef = f = fe$ pour tout $f \in L$.

Remarquons de suite que si L a une unité, elle est unique: de fait, si e_1 et e_2 sont des unités de L , on a $e_1 = e_1e_2 = e_2$.

Théorème 3.1.1 *Les espaces $F(A)$ et $FB(A)$ sont toujours des algèbres commutatives avec unité.*

Preuve. C'est direct, l'unité étant égale à χ_A . ■

Définitions. Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ et f un élément de $F(A)$. La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur A vers f si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $f(x)$; on écrit

$$f_m \xrightarrow[A]{} f \text{ ou } f_m \rightarrow f \text{ sur } A.$$

Cette fonction f est appelée *limite ponctuelle sur A* de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$. (Parfois on dit *simplement* au lieu de ponctuellement).

La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ converge ponctuellement sur A s'il existe $f \in F(A)$ tel que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur A vers f .

Remarque. Vu le critère de Cauchy pour les suites numériques, une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ converge ponctuellement sur A si et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy. Il suffit en effet de définir $f \in F(A)$ par $f(x) = \lim f_m(x)$ pour tout $x \in A$ et de vérifier qu'on a effectivement $f_m \rightarrow f$ sur A .

Théorème 3.1.2 *Si les suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ convergent ponctuellement sur A vers f et g respectivement,*

- a) $f_m + g_m \xrightarrow[A]{} f + g$;
- b) $cf_m \xrightarrow[A]{} cf$ pour tout $c \in \mathbb{K}$;
- c) $f_m g_m \xrightarrow[A]{} fg$. ■

Proposition 3.1.3 *Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ et f un élément de $F(A)$. On a alors*

- a) $f_m \xrightarrow[A]{} f \iff \overline{f_m} \xrightarrow[A]{} \overline{f}$,
- b) $f_m \xrightarrow[A]{} f \iff \left\{ \begin{array}{l} \Re f_m \xrightarrow[A]{} \Re f \\ \Im f_m \xrightarrow[A]{} \Im f \end{array} \right\}$,
- c) $f_m \xrightarrow[A]{} f \implies |f_m| \xrightarrow[A]{} |f|$,
- d) $\left\{ \begin{array}{l} f_m \xrightarrow[A]{} f \\ f_m(x) \neq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \forall x \in A \\ f(x) \neq 0, \quad \forall x \in A \end{array} \right\} \implies \frac{1}{f_m} \xrightarrow[A]{} \frac{1}{f}$.

En particulier, si on a $f_m \xrightarrow[A]{} f$ et $f_m \in F_{\mathbb{R}}(A)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, alors on a $f \in F_{\mathbb{R}}(A)$. ■

Proposition 3.1.4 Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ deux suites de $F_{\mathbb{R}}(A)$ et f, g deux éléments de $F_{\mathbb{R}}(A)$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{a) } f_m \xrightarrow[A]{} f &\iff \left\{ \begin{array}{l} f_{m,+} \xrightarrow[A]{} f_+ \\ f_{m,-} \xrightarrow[A]{} f_- \end{array} \right\}, \\ \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} f_m \xrightarrow[A]{} f \\ g_m \xrightarrow[A]{} g \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} \sup\{f_m, g_m\} \xrightarrow[A]{} \sup\{f, g\} \\ \inf\{f_m, g_m\} \xrightarrow[A]{} \inf\{f, g\} \end{array} \right\}, \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} f_m \xrightarrow[A]{} f \\ g_m \xrightarrow[A]{} g \\ f_m(x) \leq g_m(x), \forall x \in A, \forall m \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\} &\implies f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in A. \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice. Etablir que, pour tout fermé propre F (resp. tout ouvert propre Ω) de \mathbb{R}^n , il existe une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(\mathbb{R}^n)$ qui converge ponctuellement sur \mathbb{R}^n vers χ_F (resp. χ_Ω).

Suggestion. Vérifier que la suite

$$\frac{\chi_{\mathbb{R}^n}}{\chi_{\mathbb{R}^n} + md(\cdot, F)} \quad \left(\text{resp. } \frac{md(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)}{\chi_{\mathbb{R}^n} + md(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)} \right)$$

convient. On remarque qu'en tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est décroissante (resp. croissante). On peut même modifier ces suites de façon à pouvoir supposer chacun des f_m à support compact dans le cas d'un ouvert et dans le cas où F est un compact. \square

Exercice. Si A est une partie non vide de \mathbb{R} , si les f_m sont des fonctions croissantes sur A pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur A vers $f \in F(A)$, établir que la fonction f est croissante sur A .

(On a bien sûr un énoncé analogue pour des fonctions décroissantes.) \square

Remarque. Etant donné une suite $(E_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de parties de \mathbb{R}^n , la notion de convergence que nous venons d'introduire s'applique notamment à la suite $(\chi_{E_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(\mathbb{R}^n)$. Comme chacune de ces fonctions est à valeurs dans $\{0, 1\}$, la limite ponctuelle éventuelle ne peut elle aussi qu'être à valeurs dans $\{0, 1\}$ et est par conséquent la fonction caractéristique d'une partie E de \mathbb{R}^n . Dans ce cas, par abus de langage, on dit aussi que la suite $(E_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur \mathbb{R}^n vers E .

Exercice. Si les parties E_m de \mathbb{R}^n sont emboîtées en décroissant (resp. en croissant), on a $\chi_{E_m} \rightarrow \chi_E$ sur \mathbb{R}^n avec $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ (resp. $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$). \square

Exercice. Etablir que la suite $(]a_m, b_m])_{m \in \mathbb{N}_0}$ de semi-intervalles dans \mathbb{R} converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers le semi-intervalle $]a, b]$ si et seulement si on a $a_m \rightarrow a^+$ et $b_m \rightarrow b^+$.

(Obtenir des résultats analogues pour les intervalles $[a_m, b_m]$ ou $]a_m, b_m[$ ou $[a_m, b_m[$ vis-à-vis de $[a, b]$ ou $]a, b[$ ou $[a, b[.)$ □

Exercice. Etablir que, pour toute partie propre E de \mathbb{R}^n , la suite d'ensembles $(\{x : d(x, E) < 1/m\})_{m \in \mathbb{N}_0}$ (resp. $(\{x : d(x, \mathbb{R}^n \setminus E) \geq 1/m\})_{m \in \mathbb{N}_0}$) converge ponctuellement sur \mathbb{R}^n vers E^- (resp. E°). □

Remarque. La convergence ponctuelle d'une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ sur A ne conserve guère les propriétés des f_m .

Voici divers exemples.

a) *La convergence ponctuelle ne préserve pas la continuité:* il existe des suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(A)$ qui convergent ponctuellement sur A vers $f \in F(A)$ avec $f \notin C_0(A)$. Exemple: la suite $(f_m(\cdot) = \exp(-m|\cdot|))_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(\mathbb{R})$ converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers $\chi_{\{0\}}$.

b) *La convergence ponctuelle ne préserve pas la bornation:* ainsi la suite $(f_m = \inf\{|\cdot|, m\})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $FB(\mathbb{R}^n)$ converge ponctuellement sur \mathbb{R}^n vers $|\cdot|$.

c) *La convergence ponctuelle ne préserve pas la bornation des supports et n'entraîne pas non plus la convergence des supports:* on a en effet $\chi_{]-m, m[} \rightarrow \chi_{\mathbb{R}}$ et $\chi_{]-m, m[}/m \rightarrow 0$ sur \mathbb{R} .

d) La convergence ponctuelle ne préserve pas non plus des notions plus élaborées. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, définissons f_m (resp. g_m) comme étant l'élément de $F([0, 1])$ dont le graphique est décrit par la construction suivante: à tout couple $((k/m, 0), ((k+1)/m, 0))$ avec $(k = 0, 1, \dots, m-1)$ et $m \in \mathbb{N}_0$, on associe le triangle équilatéral (resp. la demi-circonférence) de \mathbb{R}^2 situé dans le demi-plan des $y \geq 0$ ayant ces deux points pour sommets (resp. pour points diamétralement opposés); le graphique de f_m (resp. g_m) est l'union des côtés de ces triangles "moins $]0, 1[$ " (resp. est l'union de ces demi-circonférences). On vérifie alors aisément que les suites f_m et g_m convergent ponctuellement sur $[0, 1]$ vers 0 alors que la longueur de la courbe simple rectifiable $(\cdot, f_m(\cdot)), [0, 1]$ est égale à 2, celle de la courbe simple rectifiable $(\cdot, g_m(\cdot)), [0, 1]$ à $\pi/2$ et celle de la courbe simple rectifiable $(\cdot, 0), [0, 1]$ à 1.

La notion de convergence uniforme a été introduite pour pallier quelques-uns des handicaps signalés dans la remarque précédente.

3.2 Convergence uniforme

Notation. Si E est une partie non vide de $A \subset \mathbb{R}^n$ et si $f \in F(A)$ est borné sur E , on pose

$$\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Si E est égal à A et si aucune confusion ne peut en résulter, on écrit souvent $\|f\|$ à la place $\|f\|_A$.

Définition. Il est clair que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\text{FB}(A)$. L'espace normé $\text{FB}(A)$ est l'espace $(\text{FB}(A), \|\cdot\|_A)$.

De même, il est clair que $\|\cdot\|_E$ est une semi-norme sur l'algèbre des fonctions définies sur A et bornées sur E .

Définitions. Soit E une partie non vide de $A \subset \mathbb{R}^n$.

Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ et f un élément de $F(A)$. La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur E vers f s'il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $m \geq M$, $f_m - f$ soit borné sur E et si la suite $\|f_m - f\|_E$ converge vers 0. Une telle fonction f est appelée *limite uniforme sur E de la suite f_m* ; on écrit

$$f_m \xrightarrow[E]{} f.$$

La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ converge uniformément sur $E \subset A$ s'il existe $f \in F(A)$ tel que $f_m \xrightarrow[E]{} f$. Remarquons que ceci entraîne l'unicité de la valeur de $f(x)$ en tout $x \in E$ mais n'entraîne aucune restriction sur la valeur de $f(x)$ pour $x \in A \setminus E$.

Remarque. Comme la convergence uniforme sur E d'une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ où E est une partie non vide de A , revient à la convergence uniforme sur E de la suite $f_m|_E$, les propriétés relatives à cette notion s'obtiennent en considérant celles de la convergence uniforme sur A des suites de $F(A)$. \square

Théorème 3.2.1 *La convergence uniforme sur A implique la convergence ponctuelle sur A vers la même limite.* \blacksquare

Remarque. La réciproque de ce théorème est fautive: ainsi on a $\chi_{]0,1/m[} \xrightarrow[\mathbb{R}]{} 0$ mais $\chi_{]0,1/m[} \not\xrightarrow[\mathbb{R}]{} 0$.

Théorème 3.2.2 *Si les suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ convergent uniformément sur A vers f et g respectivement,*

- a) $f_m + g_m \xrightarrow[A]{} f + g$;
- b) $cf_m \xrightarrow[A]{} cf$ pour tout $c \in \mathbb{K}$;
- c) si f et g sont bornés sur A , $f_m g_m \xrightarrow[A]{} fg$.

Preuve. a) et b) sont immédiats.

c) De fait, la majoration

$$\|f_m g_m - fg\| \leq \|f\| \|g_m - g\| + \|f_m - f\| \|g_m - g\| + \|f_m - f\| \|g\|$$

est valable pour m suffisamment grand. \blacksquare

Remarque. Dans c), il est essentiel que f et g soient bornés sur A . Ainsi on a $e^x + 1/m \xrightarrow{\mathbb{R}} e^x$ mais $(e^x + 1/m)(e^x + 1/m) \not\xrightarrow{\mathbb{R}} e^{2x}$. \square

Proposition 3.2.3 Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ et f un élément de $F(A)$. On a alors

$$\text{a) } f_m \xrightarrow{A} f \iff \overline{f_m} \xrightarrow{A} \overline{f};$$

$$\text{b) } f_m \xrightarrow{A} f \iff \left\{ \begin{array}{l} \Re f_m \xrightarrow{A} \Re f \\ \Im f_m \xrightarrow{A} \Im f \end{array} \right\};$$

$$\text{c) } f_m \xrightarrow{A} f \implies |f_m| \xrightarrow{A} |f|.$$

De plus, si on a $f_m \xrightarrow{A} f$ et $\inf \{ |f(x)| : x \in A \} > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $m \geq M$ et tout $x \in A$, on a $f_m(x) \neq 0$ et la suite $(1/f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur A vers $1/f$. \blacksquare

Proposition 3.2.4 Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ deux suites de $F_{\mathbb{R}}(A)$ et f, g deux éléments de $F_{\mathbb{R}}(A)$. On a alors

$$\text{a) } f_m \xrightarrow{A} f \iff \left\{ \begin{array}{l} f_{m,+} \xrightarrow{A} f_+ \\ f_{m,-} \xrightarrow{A} f_- \end{array} \right\};$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} f_m \xrightarrow{A} f \\ g_m \xrightarrow{A} g \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \sup \{ f_m, g_m \} \xrightarrow{A} \sup \{ f, g \} \\ \inf \{ f_m, g_m \} \xrightarrow{A} \inf \{ f, g \} \end{array} \right\}. \blacksquare$$

Proposition 3.2.5 Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ qui converge uniformément sur A vers $f \in F(A)$.

a) Si les f_m finissent par appartenir à $FB(A)$, alors f appartient à $FB(A)$ et la suite numérique $\|f_m\|_A$, définie pour m suffisamment grand, converge vers $\|f\|_A$.

b) Si les f_m finissent par appartenir à $FB_{\mathbb{R}}(A)$, alors f appartient à $FB_{\mathbb{R}}(A)$ et les suites numériques $(\inf_{x \in A} f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(\sup_{x \in A} f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$, définies pour m suffisamment grand, convergent vers $\inf_{x \in A} f(x)$ et $\sup_{x \in A} f(x)$ respectivement. \blacksquare

Critère 3.2.6 (Cauchy) La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ converge uniformément sur A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|f_r - f_s\|_A \leq \varepsilon$ pour tous $r, s \geq M$.

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Pour tout $x \in A$, il est clair que la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy. Il existe donc $f \in F(A)$ tel que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$

converge ponctuellement sur A vers f . Cela étant, avec les notations de l'énoncé, on a $\|f_m - f\|_A \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq M$ car, pour tout $x \in A$, on a

$$|f_m(x) - f(x)| = \lim_{s \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_s(x)|$$

avec $|f_m(x) - f_s(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $s \geq M$. ■

Théorème 3.2.7 *L'espace $\text{FB}(A)$ est de Banach.* ■

Remarque. Le cas des séries de fonctions est fort intéressant et mène aux résultats suivants. □

Critère 3.2.8 (Séries de fonctions) *Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$.*

a) **Critère de Cauchy.** *La série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ converge uniformément sur A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|\sum_{m=r}^s f_m\|_A \leq \varepsilon$ pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ tels que $M \leq r \leq s$.*

b) **Critère des séries majorées.** *Si chacun des f_m est borné sur A et si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_A$ converge, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ converge uniformément sur A .*

c) **Premier critère d'Abel.** *S'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \leq q$, on a $\sup_{x \in A} \left| \sum_{m=p}^q f_m(x) \right| \leq C$ et si la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\text{FB}(A)$ est telle que $\|g_m\|_A \rightarrow 0$ et $\sum_{m=1}^{\infty} |g_m - g_{m+1}| \xrightarrow[A]{} \infty$, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m g_m$ converge uniformément sur A et on a*

$$\left\| \sum_{m=M}^{\infty} f_m g_m \right\|_A \leq C \left\| \sum_{m=M}^{\infty} |g_m - g_{m+1}| \right\|_A, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0.$$

d) **Critère des séries alternées.** *Si chacun des f_m est positif et borné sur A , si on a $f_m(x) \downarrow 0$ pour tout $x \in A$ ainsi que $\|f_m\|_A \rightarrow 0$, alors la série alternée $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_m$ converge uniformément sur A et on a*

$$\left\| \sum_{m=M}^{\infty} (-1)^m f_m \right\|_A \leq \|f_M\|_A, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0.$$

e) **Deuxième critère d'Abel.** *Si la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ converge uniformément sur A et si $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de $\text{FB}(A)$ telle que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |g_m - g_{m+1}|$ converge uniformément sur A , alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m g_m$ converge uniformément sur A . ■*

Exemples.

1. La série $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} x^m$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
2. La série $\sum_{m=1}^{\infty} x^m$ converge uniformément sur tout compact inclus dans $]-1, 1[$.
3. La série $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m / (x + m)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
4. Si les $a_m \in [0, +\infty[$ décroissent vers 0, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{imx}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. □

3.3 Permutation de limites

Position du problème. Etant donné une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ et ξ un point de A^- ou ∞ (cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné), quand a-t-on

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \xi} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)?$$

Théorème 3.3.1 Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ et soit ξ un point x_0 de A^- ou ∞ , cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné.

Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur A et si chacun des f_m a une limite finie en ξ , alors les limites

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \xi} f_m(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$$

existent, sont finies et sont égales.

Preuve. Soit f la limite uniforme sur A de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit c_m la limite de f_m en ξ .

a) Etablissons d'abord que la suite $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy donc converge. De fait, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|f_r - f_s\|_A \leq \varepsilon$ donc tel que $|c_r - c_s| \leq \varepsilon$ pour tous $r, s \geq M$. Soit c sa limite.

b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in A$, nous avons bien sûr

$$|f(x) - c| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - c_m| + |c_m - c|.$$

Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3$ et $|c_m - c| \leq \varepsilon/3$ pour tout $m \geq M$ et tout $x \in A$. Il existe ensuite un voisinage V de ξ tel que $|f_M(x) - c_M| \leq \varepsilon/3$ pour tout $x \in V \cap A$. Au total, nous avons $|f(x) - c| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in V \cap A$.

La conclusion s'ensuit aussitôt. ■

Dans le cas des séries, cet énoncé prend la forme suivante.

Théorème 3.3.2 Soit $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ une série de $F(A)$ et soit ξ un point x_0 de A^- ou ∞ , cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné.

Si la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ converge uniformément sur A et si chacun des f_m a une limite finie en ξ , alors les limites

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \xi} f_m(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

existent, sont finies et sont égales. ■

Remarque. La convergence uniforme de la suite n'est pas une condition nécessaire pour avoir la permutation des limites. Ainsi la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F([0, 1])$ définie par $f_m(x) = mx(1-x)^m$ converge ponctuellement sur $[0, 1]$, ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ et cependant on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = 0.$$

Cependant, on ne peut pas l'éliminer dans l'énoncé car, sur l'intervalle $[0, 1[$, il vient

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^m \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{m \rightarrow \infty} x^m = 0.$$

3.4 Convergence uniforme et continuité

Remarque. Rappelons que la convergence ponctuelle sur A d'une suite de fonctions continues sur A n'entraîne pas la continuité sur A de sa limite.

En plus des exemples déjà donnés précédemment, notons que

a) la suite $(\frac{2}{\pi} \arctg(mx))_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_\infty(\mathbb{R})$ converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers la fonction $Sign \in F(\mathbb{R})$ définie par $Sign(x) = \text{sign}(x)$ pour tout $x \neq 0$ et $Sign(0) = 0$.

b) si on pose $f_m(x) = \sin^2(m!\pi x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, alors la suite $Sign(f_m)$ converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers la fonction de Dirichlet D définie par $D(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ rationnel et $D(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ irrationnel.

Théorème 3.4.1 *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ converge uniformément sur A vers $f \in F(A)$ et si $x_0 \in A$ est un point de continuité de chacun des f_m , alors x_0 est aussi un point de continuité de f .*

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème de permutation des limites. ■

On en déduit immédiatement le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.4.2 *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(A)$ converge uniformément sur A vers f , alors f est continu sur A . ■*

Ce dernier résultat peut être amélioré de la manière suivante *mais ne peut être étendu sous cette forme qu'aux espaces topologiques du type $k_{\mathbb{R}}^*$.

Théorème 3.4.3 *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(A)$ converge uniformément sur tout compact de $A \subset \mathbb{R}^n$ vers f , alors f est continu sur A .*

Preuve. De fait, pour tout $x_0 \in A$ et toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de A qui converge vers x_0 , $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ est un compact de A . On en déduit aussitôt que f est continu sur ce compact donc qu'on a $f(x_m) \rightarrow f(x_0)$. On conclut aussitôt. ■

Exemple. Nous savons qu'il existe des fonctions continues sur un ouvert Ω de \mathbb{R} qui ne sont pas dérivables en certains points de \mathbb{R} . Ainsi $|\cdot| \in C_0(\mathbb{R})$ n'est pas dérivable en 0.

Nous allons à présent construire une fonction continue sur \mathbb{R} , qui n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .

Bien sûr, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_m définie sur \mathbb{R} par

$$f_m(x) = d(x, \{k \cdot 10^{-m} : k \in \mathbb{Z}\}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

est continue et à valeurs dans $[0, 10^{-m}/2]$. Il s'ensuit que $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ est une fonction continue sur \mathbb{R} . Prouvons que f n'est dérivable en aucun point x de \mathbb{R} .

Etant donné $p \in \mathbb{N}_0$, un des intervalles $[x - 10^{-p}, x]$ et $[x, x + 10^{-p}]$ au moins est inclus dans un intervalle où f_{p-1} est monotone donc où chacune des fonctions f_1, \dots, f_{p-1} est monotone. S'il s'agit de $[x, x + 10^{-p}]$, par exemple, nous obtenons

$$\frac{f_k(x + 10^{-p}) - f_k(x)}{10^{-p}} \in \{-1, 1\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p-1\};$$

par contre, pour tout $k \geq p$, nous avons bien sûr $f_k(x + 10^{-p}) = f_k(x)$. Dans ces conditions,

$$\frac{f(x + 10^{-p}) - f(x)}{10^{-p}}$$

est un entier pair si p est impair et un entier impair si p est pair. La fonction f ne peut donc être dérivable en x . \square

Mentionnons le résultat relatif aux séries.

Théorème 3.4.4 *Si la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ de $C_0(A)$ converge uniformément sur tout compact de $A \subset \mathbb{R}^n$ (a fortiori si elle converge uniformément sur A), alors sa limite appartient à $C_0(A)$. ■*

Le théorème qui suit donne la convergence uniforme à partir de la convergence ponctuelle monotone.

Théorème 3.4.5 (Dini) *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions réelles et continues sur le compact K de \mathbb{R}^n croît (resp. décroît) vers $f \in C_0(K)$, alors on a $f_m \xrightarrow{K} f$.*

Preuve. Quitte à remplacer chaque f_m par $-f_m$ et f par $-f$, nous pouvons supposer la suite f_m décroissante.

Fixons $\varepsilon > 0$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$K_m = \{x \in K : f_m(x) - f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Tout revient à établir qu'il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $K_M = \emptyset$ car alors on a $\|f_m - f\|_K \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq M$. Si ce n'est pas le cas, $(K_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite décroissante de compacts non vides. Dès lors, leur intersection n'est pas vide et en tout point x de cette intersection, nous devons avoir $f_m(x) - f(x) \geq \varepsilon$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et la suite $f_m(x)$ ne peut décroître vers $f(x)$. D'où une contradiction. ■

Remarque. Dans l'énoncé du théorème de Dini, il est indispensable que f appartienne à $C_0(K)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la suite f_m de $C_0([0, 1])$ définie par $f_m(x) = 1/(1 + mx)$ pour tout $x \in [0, 1]$. □

Exercice. Établir la généralisation suivante du théorème de Dini.

Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions réelles et continues sur le compact K de \mathbb{R}^n croît vers $f \in F(K)$, alors, pour tout $g \in C_0(K)$ tel que $g(x) < f(x)$ pour tout $x \in K$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $g(x) \leq f_m(x)$ pour tout $x \in K$ et tout $m \geq M$. En déduire que si les suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions réelles et continues sur le compact K de \mathbb{R}^n croissent strictement vers $f \in F(K)$, alors il existe une suite strictement croissante $k(m)$ de \mathbb{N}_0 telle que

$$f_{k(1)} \leq g_{k(2)} \leq f_{k(3)} \leq g_{k(4)} \leq \dots \square$$

3.5 Espaces $C_0(K)$, $C_0(F)$ et $C_0(\Omega)$

Définition. Si K est un compact non vide de \mathbb{R}^n , il est clair que $\|\cdot\|_K$ est une norme sur l'espace vectoriel $C_0(K)$. L'espace normé $(C_0(K), \|\cdot\|_K)$ qui en résulte est le plus souvent noté $C_0(K)$ tout simplement.

Définition. Soit F un fermé non borné de \mathbb{R}^n . Il existe alors un premier entier M tel que $F \cap \{x : |x| \leq M\} \neq \emptyset$. Cela étant, on pose $K_m = F \cap \{x : |x| \leq M + m\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Il est clair que chacun des K_m est compact, que leur réunion est égale à F et que, pour tout compact $K \subset F$, il existe un entier m tel que $K \subset K_m$. On pose alors $p_m(\cdot) = \|\cdot\|_{K_m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Chacun de ces p_m est bien sûr une semi-norme sur $C_0(F)$. Cela étant, il est clair que $(C_0(F), \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ est un espace à semi-normes dénombrables séparé, noté le plus souvent $C_0(F)$ tout simplement. On dit qu'on a muni l'espace $C_0(F)$ de la *convergence compacte*.

Définition. Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Si Ω est égal à \mathbb{R}^n , l'espace $C_0(\Omega) = C_0(\mathbb{R}^n)$ a déjà été introduit ci-dessus. Si Ω diffère de \mathbb{R}^n , nous savons qu'il existe une suite croissante $(K_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de parties compactes de Ω et d'union égale à Ω telles que $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On pose alors $p_m(\cdot) = \|\cdot\|_{K_m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Chacun de ces p_m est bien sûr une semi-norme sur $C_0(\Omega)$. Cela étant, il est clair que $(C_0(\Omega), \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ est un espace à semi-normes dénombrables séparé, noté le plus souvent $C_0(\Omega)$ tout simplement. On dit qu'on a muni l'espace $C_0(\Omega)$ de la *convergence compacte*.

Les résultats du paragraphe précédent conduisent de suite aux propriétés fondamentales que voici.

Théorème 3.5.1 a) *Pour tout compact non vide K de \mathbb{R}^n , $C_0(K)$ est un espace de Banach.*

b) *Pour tout fermé non borné F de \mathbb{R}^n , $C_0(F)$ est un espace de Fréchet.*

c) *Pour tout ouvert non vide Ω de \mathbb{R}^n , $C_0(\Omega)$ est un espace de Fréchet. ■*

Remarque. Il est clair qu'une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(F)$ (resp. de $C_0(\Omega)$) converge vers f dans cet espace si et seulement si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur tout compact de F (resp. de Ω) vers f . On dit qu'on a muni les espaces vectoriels $C_0(F)$ et $C_0(\Omega)$ de la *convergence compacte*.

De même, on vérifie immédiatement que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_0(F)$ (resp. $C_0(\Omega)$) est de Cauchy si et seulement si, pour tout compact K de F (resp. de Ω) et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|f_m - f\|_K \leq \varepsilon$ pour tous $r, s \geq M$. □

3.6 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 3.6.1 *Une partie \mathcal{K} de $C_0(K)$ (resp. $C_0(F)$; $C_0(\Omega)$) est compacte si et seulement si elle est extractable, ce qui a lieu si et seulement si elle est précompacte et fermée. ■*

Remarque. Le théorème d'Arzela-Ascoli caractérise notamment les parties précompactes de $C_0(K)$ (resp. $C_0(F)$; $C_0(\Omega)$). □

Définitions. Une partie \mathcal{F} de $C_0(A)$ est

a) *équicontinue en $x_0 \in A$* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$, on a

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon;$$

b) *équicontinue sur A* si elle est équicontinue en tout point de A ;

c) *uniformément équicontinue sur A* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in A$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Exemple. Si f est une fonction (uniformément) continue sur A , l'ensemble $\{f + c : c \in \mathbb{K}\}$ est une partie (uniformément) équicontinue sur A de $C_0(A)$. □

Exemple. Si f est une fonction uniformément continue sur \mathbb{R}^n , l'ensemble $\{f(\cdot + a) : a \in \mathbb{R}^n\}$ est une partie uniformément équicontinue sur \mathbb{R}^n de $C_0(\mathbb{R}^n)$. \square

Exemple. Si K est un compact de \mathbb{R}^n et si f est une fonction continue sur $K \times A$, alors $\{f(x, \cdot) : x \in K\}$ est une partie équicontinue sur A de $C_0(A)$. \square

Exemple. Si \mathcal{F} est un ensemble de fonctions dérivables sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n , si A est une partie non vide de Ω telle que $d(A, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = r > 0$ et si on a

$$\sup \{ |D_k f(x)| : f \in \mathcal{F}, k \leq n, x \in \Omega \} < \infty,$$

alors \mathcal{F} est uniformément équicontinu sur A . Cela résulte du théorème des accroissements finis: si $x, y \in A$ sont tels que $d(x, y) < r$, on a en effet

$$\left| \left\{ \begin{array}{c} \Re \\ \Im \end{array} \right\} f(x) - \left\{ \begin{array}{c} \Re \\ \Im \end{array} \right\} f(y) \right| \leq \sup_{\xi_k \in \Omega, k=1, \dots, n} \left| \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) D_k f(\xi_k) \right|. \square$$

Exemple. Si \mathcal{F} est une partie de $C_1(\Omega)$ et si A est une partie convexe et non vide de Ω telle que

$$\sup \{ |D_k f(x)| : f \in \mathcal{F}, k \leq n, x \in A \} < \infty,$$

alors \mathcal{F} est uniformément équicontinu sur A . Il suffit de procéder comme à l'exemple précédent, en recourant au théorème de Taylor. \square

Exemple. Si K est un compact non vide de \mathbb{R}^n et si F est une fonction continue sur $K \times K$,

$$\mathcal{F} = \left\{ \int_K F(x, y) f(y) dy : f \text{ mesurable, } |f| \leq \chi_K \text{ pp sur } K \right\}$$

est une partie de $C_0(K)$ uniformément équicontinue sur K . Comme on a

$$\left| \int_K (F(x, y) - F(x_0, y)) f(y) dy \right| \leq \text{mes}(K) \cdot \sup_{y \in K} |F(x, y) - F(x_0, y)|,$$

cela résulte aussitôt de la continuité de F sur $K \times K$. \square

Remarque. Une partie \mathcal{F} de $C_0(A)$ peut être uniformément équicontinue sur A sans être ponctuellement bornée sur A . Le premier exemple est éloquent à ce sujet. \square

Remarque. Bien sûr, toute partie uniformément équicontinue sur A de $F(A)$ est équicontinue sur A et chacun de ses éléments est une fonction continue sur A . Voici une réciproque partielle de cette propriété. \square

Proposition 3.6.2 *Si K est un compact non vide de \mathbb{R}^n , alors toute partie équicontinue sur K de $C_0(K)$ est uniformément équicontinue sur K .*

Dès lors, toute partie équicontinue sur A de $C_0(A)$ est uniformément équicontinue sur tout compact de A .

Preuve. Si $\mathcal{F} \subset C_0(K)$ n'est pas uniformément équicontinu sur K , il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_m, y_m \in K$ tels que

$$|x_m - y_m| \leq \frac{1}{m} \text{ et } \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon.$$

De la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$, nous pouvons extraire une sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui converge vers un point x_0 de K . Bien sûr, la suite $(y_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge également vers x_0 . Dès lors, on voit aisément que \mathcal{F} n'est pas équicontinu en x_0 . D'où la conclusion.

Le cas particulier est immédiat. ■

Proposition 3.6.3 *Si A est une partie dénombrable de \mathbb{R}^n , alors, de toute suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(A)$ qui est ponctuellement bornée (i.e. telle que $\sup_{m \in \mathbb{N}_0} |f_m(x)| < \infty$ pour tout $x \in A$), on peut extraire une sous-suite ponctuellement convergente sur A .*

Preuve. Si A est fini, c'est immédiat en recourant un nombre fini de fois au théorème d'extraction car, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est bornée.

Sinon, soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une numérotation de A . De la suite numérique bornée $(f_m(x_1))_{m \in \mathbb{N}_0}$, on peut extraire une sous-suite $(f_{1(m)}(x_1))_{m \in \mathbb{N}_0}$ convergente. De la suite numérique bornée $(f_{1(m)}(x_2))_{m \in \mathbb{N}_0}$, on peut aussi extraire une sous-suite $(f_{2(m)}(x_2))_{m \in \mathbb{N}_0}$ convergente. En continuant de la sorte, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on obtient une sous-suite $(f_{(k+1)(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que la suite numérique $(f_{(k+1)(m)}(x_{k+1}))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge. Dans ces conditions, $(f_{m(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une sous-suite de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de départ, qui converge ponctuellement sur A . ■

Proposition 3.6.4 *Soient B un borné non vide de \mathbb{R}^n et D une partie de B dense dans B . Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $F(B)$ est uniformément équicontinue sur B et converge ponctuellement sur D , alors elle converge uniformément sur B .*

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\{f_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est uniformément équicontinu sur B , il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in B$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \varepsilon/3$. Comme D est dense dans le borné B , il existe ensuite des points x_1, \dots, x_J de D , en nombre fini et tels que $B \subset \bigcup_{j=1}^J \{x : |x - x_j| \leq \eta\}$. Cela étant, comme, pour tout $j \leq J$, la suite $(f_m(x_j))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge, il existe $M \in \mathbb{N}_0$

tel que, pour tous $r, s \geq M$ et tout $j \leq J$, on a $|f_r(x_j) - f_s(x_j)| \leq \varepsilon/3$. Dans ces conditions, pour tout $x \in B$, il existe $j \leq J$ tel que $|x - x_j| \leq \eta$ donc tel que

$$|f_r(x) - f_s(x)| \leq |f_r(x) - f_r(x_j)| + |f_r(x_j) - f_s(x_j)| + |f_s(x_j) - f_s(x)| \leq \varepsilon$$

pour tous $r, s \geq M$. D'où la conclusion. ■

Théorème 3.6.5 (Arzela-Ascoli) *Si B est un borné non vide de \mathbb{R}^n , de toute suite ponctuellement bornée et uniformément équicontinue sur B , on peut extraire une sous-suite uniformément de Cauchy sur B .*

De plus, une partie de $C_0(K)$ (resp. $C_0(F)$; $C_0(\Omega)$) est précompacte si et seulement si elle est ponctuellement bornée et équicontinue sur K (resp. F ; Ω).

Preuve. Comme toute partie de l'espace métrique séparable \mathbb{R}^n est séparable, il existe une partie dénombrable D de B qui est dense dans B . Dès lors, de toute suite ponctuellement bornée sur B , on peut extraire une sous-suite ponctuellement convergente sur D . D'où la conclusion au moyen du résultat précédent.

Cas de $C_0(K)$.

La condition est nécessaire. Soit \mathcal{K} une partie précompacte de $C_0(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $\{f_1, \dots, f_J\}$ de \mathcal{K} telle que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^J b(f_j; \varepsilon/3)$. Dès lors, \mathcal{K} est même uniformément borné sur K car on a

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq \sup_{j \leq J} \|f_j\|_K + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

De plus, chacun des f_1, \dots, f_J étant uniformément continu sur K , il existe $\eta > 0$ tel que $|f_j(x) - f_j(y)| \leq \varepsilon/3$ pour tout $j \leq J$ et tous $x, y \in K$ tels que $|x - y| \leq \eta$. Cela étant, pour tout $f \in \mathcal{K}$ et tous $x, y \in K$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq \varepsilon$$

pour autant qu'on choisisse $j \leq J$ tel que $\|f - f_j\|_K \leq \varepsilon/3$. D'où la conclusion.

La suffisance de la condition résulte aussitôt du fait qu'une telle partie est uniformément équicontinue sur K et du critère de précompacité.

Cas de $C_0(F)$.

La condition est nécessaire. Si \mathcal{K} est une partie précompacte de $C_0(F)$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $r > 0$, il existe une partie finie $\{f_1, \dots, f_J\}$ de \mathcal{K} telle que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^J b_{p_m}(f_j; r)$. En procédant comme dans le cas de $C_0(K)$, on obtient alors que \mathcal{K} est même uniformément borné et uniformément équicontinu sur le compact K_m . La conclusion est alors immédiate.

La condition est suffisante. Vu le critère de précompacité, il suffit de prouver que, de toute suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ ponctuellement bornée et équicontinue sur F , on peut

extraire une sous-suite de Cauchy dans $C_0(F)$. Comme cette suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est ponctuellement bornée et uniformément équicontinue sur le compact K_1 , il en existe une sous-suite $(f_{1(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ uniformément de Cauchy sur ce compact. De la même manière, il existe une sous-suite $(f_{2(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de cette suite $(f_{1(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui est uniformément de Cauchy sur le compact K_2 . En continuant de la sorte, nous obtenons pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ une sous-suite $(f_{(k+1)(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui est uniformément de Cauchy sur K_{k+1} . Cela étant, on vérifie directement que $(f_{m(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une sous-suite de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de départ et est de Cauchy dans $C_0(F)$.

Cas de $C_0(\Omega)$.

La démonstration est analogue à celle du cas de $C_0(F)$. ■

Exercice. Si B est un borné de \mathbb{R}^n , établir que toute partie de $C_0(B)$ qui est ponctuellement bornée et uniformément équicontinue sur B , est uniformément bornée sur B . □

3.7 Théorème de Stone-Weierstrass

K. Weierstrass a d'abord prouvé pour $K = [0, 1]$ puis pour un intervalle compact non vide K de \mathbb{R}^n que l'ensemble $P(K)$ des restrictions à K des polynômes est dense dans $C_0(K)$. M. Stone a ensuite étendu cette propriété à de nombreuses sous-algèbres de $C_0(K)$.

Dans ce paragraphe, K désigne un compact non vide *séparé qu'on supposera, en première lecture* de \mathbb{R}^n .

Lemme 3.7.1 *Soit \mathcal{F} une partie de $C_{0,\mathbb{R}}(K)$. Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

- a) \mathcal{F} est latticiellement fermé, (i.e. pour tous $f, g \in \mathcal{F}$, on a $\sup\{f, g\} \in \mathcal{F}$ et $\inf\{f, g\} \in \mathcal{F}$);
- b) pour tout $x \in K$ et tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) = r$;
- c) pour tous $x, y \in K$ distincts et tous $r, s \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) = r$ et $f(y) = s$,

alors \mathcal{F} est dense dans $C_{0,\mathbb{R}}(K)$.

(Bien sûr, si K a plus d'un élément, c) implique b.)

Preuve. Il suffit d'établir que, pour tout $f \in C_{0,\mathbb{R}}(K)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{F}$ tel que $\|f - g\|_K \leq \varepsilon$.

Vu b) et c), pour tous $a, b \in K$, il existe $g_{a,b} \in \mathcal{F}$ tel que $g_{a,b}(a) = f(a)$ et $g_{a,b}(b) = f(b)$.

Fixons $a \in K$. Pour tout $b \in K$, il existe alors un voisinage ouvert $V_{a,b}$ de b dans K tel que $f(x) - \varepsilon \leq g_{a,b}(x)$ pour tout $x \in V_{a,b}$. Du recouvrement ouvert

$\{V_{a,b} : b \in K\}$ de K , on peut extraire un recouvrement fini; soit $\{V_{a,b_j} : j \leq J\}$ un tel recouvrement. A ce moment, la fonction

$$g_a = \sup\{g_{a,b_1}, \dots, g_{a,b_J}\}$$

appartient à \mathcal{F} , prend la valeur $f(a)$ en a et est telle que $f(x) - \varepsilon \leq g_a(x)$ pour tout $x \in K$.

Pour tout $a \in K$, il existe donc un voisinage ouvert V_a de a dans K tel que $g_a(x) \leq f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in V_a$. Du recouvrement ouvert $\{V_a : a \in K\}$, on peut extraire un recouvrement fini; soit $\{V_{a_j} : j \leq J\}$ un tel recouvrement. A ce moment, la fonction

$$g = \inf\{g_{a_1}, \dots, g_{a_J}\}$$

appartient à \mathcal{F} et est telle que

$$f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in K,$$

ce qui suffit. ■

Lemme 3.7.2 *Il existe une suite P_m de polynômes à coefficients réels sur \mathbb{R} , sans termes constants, qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|\cdot|$.*

Preuve. Il suffit d'établir que la suite $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de polynômes sur \mathbb{R} définie par la récurrence

$$Q_0 = 0 \text{ et } Q_{m+1}(\cdot) = Q_m(\cdot) + \frac{1}{2}(\cdot - Q_m^2(\cdot)), \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $\sqrt{\cdot}$ car on a alors $Q_m(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et ainsi la suite $P_m(\cdot) = Q_m(\cdot^2)$ convient.

Fixons $x \in [0, 1]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a bien sûr

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - Q_{m+1}(x) &= \sqrt{x} - Q_m(x) - \frac{1}{2}(x - Q_m^2(x)) \\ &= (\sqrt{x} - Q_m(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + Q_m(x))). \end{aligned}$$

Cela étant, une récurrence aisée procure $0 \leq Q_m(x) \leq \sqrt{x}$ donc $Q_m(x) \leq Q_{m+1}(x)$. Dès lors, la suite $(Q_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est croissante et majorée, et on vérifie directement que sa limite est égale à \sqrt{x} . On conclut alors aussitôt au moyen du théorème de Dini. ■

Lemme 3.7.3 *Toute sous-algèbre fermée de $C_{0,\mathbb{R}}(K)$ est latticiellement fermée.*

Preuve. Soit L une sous-algèbre fermée de $C_{0,\mathbb{R}}(K)$. Il suffit de prouver que, pour tout $f \in L$, on a $|f| \in L$ car alors, pour tous $f, g \in L$, il vient

$$\begin{aligned}\sup\{f, g\} &= \frac{f + g + |f - g|}{2} \in L, \\ \inf\{f, g\} &= \frac{f + g - |f - g|}{2} \in L.\end{aligned}$$

Or il existe bien sûr $r \in]0, +\infty[$ tel que $\|rf\|_K \leq 1$. Cela étant, si $(P_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de polynômes à coefficients réels sur \mathbb{R} , sans termes constants, qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|\cdot|$, il vient

$$P_m(rf) \xrightarrow{K} |rf| \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r} P_m(rf) \xrightarrow{K} |f|.$$

D'où la conclusion car chacune des fonctions $P_m(rf)/r$ appartient bien sûr à L . ■

Théorème 3.7.4 (Stone-Weierstrass, cas réel) *Une sous-algèbre L de l'espace $C_{0,\mathbb{R}}(K)$ est dense dans cet espace si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes:*

- a) pour tout $x \in K$, il existe $f \in L$ tel que $f(x) \neq 0$;
- b) L sépare les points de K (i.e. pour tous $x, y \in K$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in L$ tel que $f(x) \neq f(y)$).

Preuve. La condition est nécessaire. D'une part, il existe $f \in L$ tel que $\|f - \chi_K\|_K \leq 1/2$ donc tel que $f(a) \neq 0$ pour tout $a \in K$. D'autre part, pour tous $a, b \in K$ tels que $a \neq b$, il existe $g \in C_{0,\mathbb{R}}(K)$ tel que $g(a) = 0$ et $g(b) = 1$, à savoir $g(\cdot) = d(a, \cdot)/d(a, b)$; il existe ensuite $f \in L$ tel que $\|f - g\|_K \leq 1/3$ donc tel que $f(a) \neq f(b)$.

La condition est suffisante. Considérons l'adhérence L^- de L dans $C_{0,\mathbb{R}}(K)$.

a) Cette partie L^- de $C_{0,\mathbb{R}}(K)$ est latticiellement fermée car on peut vérifier directement que L^- est une sous-algèbre fermée de $C_{0,\mathbb{R}}(K)$.

b) Pour tout $x \in K$ et tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $f \in L \subset L^-$ tel que $f(x) \neq 0$ donc tel que $g = (r/f(x))f \in L^-$ vérifie $g(x) = r$.

c) Pour tous $x, y \in K$ tels que $x \neq y$ et tous $r, s \in \mathbb{R}$, établissons qu'il existe $f \in L^-$ tel que $f(x) = r$ et $f(y) = s$. Il existe $g \in L$ tel que $g(x) \neq g(y)$. Dès lors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $ag + bg^2$ appartient à L^- et, pour conclure, il suffit de prouver qu'il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_0g(x) + b_0g^2(x) = r \quad \text{et} \quad a_0g(y) + b_0g^2(y) = s.$$

Cela a effectivement lieu si le déterminant

$$g(x)g^2(y) - g^2(x)g(y) = g(x)g(y)(g(y) - g(x))$$

diffère de 0, c'est-à-dire si outre $g(x) \neq g(y)$, on a aussi $g(x)g(y) \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, un seul des nombres $g(x)$, $g(y)$ est nul; supposons qu'il s'agisse de $g(x)$, le cas $g(y) = 0$ se traite de manière analogue. Comme il existe $h \in L^-$ tel que $h(x) = 1$, on a aussi $g + \varepsilon h \in L^-$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment proche de 0, $g + \varepsilon h$ diffère de 0 en x et en y et prend des valeurs distinctes en x et en y . Cela suffit pour conclure.

D'où la conclusion au moyen du premier lemme de ce paragraphe car L^- est fermé et dense dans $C_{0,\mathbb{R}}(K)$ donc égal à $C_{0,\mathbb{R}}(K)$. ■

Théorème 3.7.5 (Stone-Weierstrass, cas général) *Une sous-algèbre L de $C_{0,\mathbb{C}}(K)$ est dense dans cet espace si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes:*

- a) pour tout $x \in K$, il existe $f \in L$ tels que $f(x) \neq 0$;
- b) pour tous $x, y \in K$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in L$ tel que $f(x) \neq f(y)$;
- c) pour tout $f \in L$, \bar{f} appartient à l'adhérence L^- de L dans $C_{0,\mathbb{C}}(K)$.

Preuve. La nécessité de la condition s'établit comme dans la preuve précédente.

La condition est suffisante. On vérifie directement que L^- est une sous-algèbre de $C_{0,\mathbb{C}}(K)$ qui jouit des propriétés a), b) et c) de l'énoncé dans lesquelles on a remplacé L par L^- . Dans ces conditions, on a $\Re f \in L^-$ et $\Im f \in L^-$ pour tout $f \in L^-$ et dès lors $L_{\mathbb{R}} = \{\Re f : f \in L^-\}$ est une sous-algèbre de $C_{0,\mathbb{R}}(K)$ qui, vu le théorème de Stone-Weierstrass dans le cas réel, est dense dans $C_{0,\mathbb{R}}(K)$. Cela étant, pour tout $f \in C_{0,\mathbb{C}}(K)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g, h \in L_{\mathbb{R}}$ tels que $\|\Re f - g\|_K \leq \varepsilon/2$ et $\|\Im f - h\|_K \leq \varepsilon/2$ donc tels que $g + ih \in L^-$ vérifie $\|f - (g + ih)\|_K \leq \varepsilon$. D'où la densité de L^- dans $C_{0,\mathbb{C}}(K)$, ce qui suffit. ■

Remarque. *La condition c) qui figure dans l'énoncé précédent est indispensable: pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, on vérifie de suite que $\{f \in C_{0,\mathbb{C}}(D) : f \in \mathcal{O}(D^\circ)\}$ est une sous-algèbre fermée de $C_{0,\mathbb{C}}(D)$ qui vérifie les conditions a) et b), mais diffère de $C_{0,\mathbb{C}}(D)$ car elle ne contient pas, par exemple, la fonction \bar{z} .*□

Théorème 3.7.6 *Si K est un compact de \mathbb{R}^n , l'ensemble $P(K)$ des restrictions à K des polynômes est dense dans $C_0(K)$. ■*

Remarque. Pour tout compact K de \mathbb{R} et tout entier $N \in \mathbb{N}_0$ impair, établir que l'ensemble $P_N(K)$ des restrictions à K des polynômes qui sont combinaison linéaire des fonctions $\chi_{\mathbb{R}}$ et x^{kN} avec $k \in \mathbb{N}_0$ est dense dans $C_0(K)$. Quand cette propriété s'étend-elle au cas où N est pair?□

Théorème 3.7.7 *Si H est aussi un compact non vide *séparé qu'on supposera en première lecture* de \mathbb{R}^p , alors*

$$\left\{ \sum_{j=1}^J f_j(x)g_j(y) : J \in \mathbb{N}_0, f_j \in C_0(K), g_j \in C_0(H) \right\}$$

est une sous-algèbre dense de $C_0(K \times H)$. ■

Théorème 3.7.8 *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble des restrictions à*

$$S = \{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \dots = |z_n| = 1 \}$$

des fonctions du type

$$\sum_{m=0}^M \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \quad \text{avec } M \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}^n \text{ et } c_\alpha \in \mathbb{C},$$

où on a posé $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, est dense dans $C_{0,\mathbb{C}}(S)$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème de Stone-Weierstrass si on note que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on a $\bar{z} = 1/z$. ■

Ce dernier théorème conduit à un résultat très important.

Définitions. Etant donné $T_1, \dots, T_n \in]0, +\infty[$, une fonction $f \in F(\mathbb{R}^n)$ est *périodique de période T* si on a

$$f(x_1 + k_1 T_1, \dots, x_n + k_n T_n) = f(x) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Si en outre f est continu sur \mathbb{R}^n , il est borné sur \mathbb{R}^n .

Cela étant, $CP_T(\mathbb{R}^n)$ est l'algèbre des fonctions continues et périodiques de période T sur \mathbb{R}^n , munie de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$. On vérifie de suite qu'il s'agit d'un espace de Banach.

Théorème 3.7.9 (approximation trigonométrique) *Les fonctions du type*

$$\sum_{m=0}^M \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha e^{2i\pi\alpha x/T} \quad \text{avec } M \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}^n \text{ et } c_\alpha \in \mathbb{C}$$

(où on a posé $e^{2i\pi\alpha x/T} = e^{2i\pi\alpha_1 x_1/T_1} \dots e^{2i\pi\alpha_n x_n/T_n}$) constituent une partie dense dans l'espace $CP_T(\mathbb{R}^n)$.

En particulier, pour tous $\varepsilon, T > 0$ et $f \in C_0([0, T])$ tel que $f(0) = f(T)$, il existe $M \in \mathbb{N}$ et des $r_m, s_m \in \mathbb{C}$ pour tout $0 \leq m \leq M$ tels que

$$\left\| f(x) - \sum_{m=0}^M r_m \cos(2\pi m \frac{x}{T}) - \sum_{m=0}^M s_m \sin(2\pi m \frac{x}{T}) \right\|_{]0, T[} \leq \varepsilon.$$

De plus, si f est à valeurs réelles, on peut supposer les r_m et les s_m réels.

Preuve. Pour tout $f \in CP_T(\mathbb{R}^n)$, on vérifie aisément que la fonction g_f définie sur

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$$

par

$$z \mapsto f\left(\frac{T_1}{2\pi} \arg(z_1), \dots, \frac{T_n}{2\pi} \arg(z_n)\right)$$

est continue et que

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_f(e^{2i\pi x_1/T_1}, \dots, e^{2i\pi x_n/T_n}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La conclusion résulte alors aussitôt du théorème précédent. ■

Théorème 3.7.10 Pour tout compact K (resp. fermé non borné F ; ouvert Ω) non vide de \mathbb{R}^n , l'espace $C_0(K)$ (resp. $C_0(F)$; $C_0(\Omega)$) est séparable.

Preuve. De fait, l'ensemble des restrictions à K (resp. F, Ω) des polynômes à coefficients rationnels sur \mathbb{R}^n est dénombrable et on vérifie de suite qu'il est aussi dense dans $C_0(K)$ (resp. $C_0(F)$; $C_0(\Omega)$). ■

Voici une application importante du théorème de Stone-Weierstrass.

Définition. Etant donné $f \in C_0(K)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, le α -ème moment $M_\alpha(f)$ de f est défini par $M_\alpha(f) = \int_K x^\alpha f(x) dx$.

Théorème 3.7.11 Si K est un compact régulier (i.e. K est égal à l'adhérence de son intérieur) et non vide de \mathbb{R}^n , alors tout élément de $C_0(K)$ est caractérisé par la suite de ses moments (i.e. si $f, g \in C_0(K)$ sont tels que $M_\alpha(f) = M_\alpha(g)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors on a $f = g$).

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir que, si $f \in C_0(K)$ vérifie $M_\alpha(f) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors on a $f = 0$.

Vu le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de polynômes sur \mathbb{R}^n qui converge uniformément sur K vers f . Il s'ensuit que la suite $(\overline{P_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ de polynômes sur \mathbb{R}^n converge uniformément sur K vers \overline{f} , ce qui entraîne

$$\int_K f(x) \overline{P_k}(x) dx \rightarrow \int_K |f(x)|^2 dx.$$

D'où la conclusion car l'hypothèse entraîne $\int_K f(x) \overline{P_k}(x) dx = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Proposition 3.7.12 *Si L est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé E , alors, pour tout $e \in E$, il existe $l \in L$ tel que $\|e - l\| = d(e, L)$.*

Preuve. Si $d(e, L) = 0$, on a $e \in L$ car L est un fermé de E , donc $e = l$ convient.

Si par contre $d(e, L) > 0$, posons $K = \{l \in L : \|l\| \leq 3\|e\|\}$. Il vient $d(e, L) = \inf\{d(e, K), d(e, L \setminus K)\}$, alors que, pour tout $l \in L \setminus K$,

$$\|e - l\| \geq \|e\| - \|l\| \geq \|l\| - \|e\| > 2\|e\| \geq 2d(e, L).$$

Au total, nous avons donc $d(e, L) = d(e, K)$. Comme K est un compact et $d(e, \cdot)$ une fonction continue sur K , on conclut aussitôt. ■

Théorème 3.7.13 (léthargie, Bernstein) *Pour toute suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de dimension finie $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Banach E et toute suite $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $[0, +\infty[$ décroissante vers 0, il existe $e \in E$ tel que $d(e, L_m) = \varepsilon_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons

$$A_m = \{x \in E : d(x, L_m) = \varepsilon_m\}.$$

Etablissons d'abord qu'aucun de ces ensembles A_m n'est vide. De fait, la suite L_m étant strictement croissante, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un point $x \in L_{m+1} \setminus L_m$. Comme L_m est fermé, on a $d(x, L_m) > 0$ et dès lors $y = (\varepsilon_m/d(x, L_m))x$ appartient à A_m .

Cela étant,

(1) vu la proposition précédente, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $a \in A_m$, il existe $l \in L_m$ tel que $d(a, L_m) = \|a + l\| = \varepsilon_m$. Comme il est clair que $a + l$ appartient à A_m pour tout $l \in L_m$, nous savons que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $a_m \in A_m$ tel que $\|a_m\| = \varepsilon_m$.

(2) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $a \in A_m$ tel que $\|a\| = \varepsilon_m$, on a

$$A_{m-1} \cap (a + L_m) \neq \emptyset.$$

De $L_{m-1} \subset L_m$, on tire $d(a, L_{m-1}) \leq \|a\| = \varepsilon_m = d(a, L_m) \leq d(a, L_{m-1})$. Dès lors, si $\varepsilon_m = \varepsilon_{m-1}$, on a $a \in A_{m-1}$ donc $A_{m-1} \cap (a + L_m) \neq \emptyset$. Si $\varepsilon_m < \varepsilon_{m-1}$, établissons qu'on a aussi $A_{m-1} \cap (a + L_m) \neq \emptyset$. Si ce n'est pas le cas, il vient $a + L_m \subset \{x \in E : d(x, L_{m-1}) \neq \varepsilon_{m-1}\}$. Comme $a + L_m$ est connexe et contient a , et comme $d(a, L_{m-1}) = \varepsilon_m < \varepsilon_{m-1}$, on a en fait

$$a + L_m \subset \{x \in E : d(x, L_{m-1}) < \varepsilon_{m-1}\}.$$

Pour tout $l \in L_m$, il vient donc

$$\varepsilon_{m-1} > d(a + l, L_{m-1}) \geq d(l, L_{m-1}) - d(a, L_{m-1})$$

et, par conséquent,

$$\sup_{l \in L_m} d(l, L_{m-1}) \leq \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m.$$

Or $L_m \setminus L_{m-1}$ n'est pas vide: pour tout élément e de cet ensemble, on a donc $d(e, L_{m-1}) > 0$. Cela étant, de l'égalité $d(re, L_{m-1}) = |r| d(e, L_{m-1})$ valable pour tout $r \in \mathbb{R}$, on tire $\sup \{d(l, L_{m-1}) : l \in L_{m+1}\} = +\infty$. D'où une contradiction.

De ce qui précède, on déduit que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $b_m \in A_0 \cap \dots \cap A_m$ tel que $\|b_m\| = \varepsilon_0$. En effet, il existe $a_m \in A_m$ tel que $\|a_m\| = \varepsilon_m$ (cf. (1)). Si $m = 0$, $b_0 = a_0$ convient. Si $m \geq 1$, vu (2), il existe $l_m \in L_m$ tel que $a_m + l_m \in A_{m-1} \cap A_m$. Vu (1), il existe ensuite $h_{m-1} \in L_{m-1}$ tel que $a_m + l_m + h_{m-1} \in A_{m-1} \cap A_m$ vérifie $\|a_m + l_m + h_{m-1}\| = \varepsilon_{m-1}$. En continuant de la sorte, nous obtenons avec des notations claires par elles-mêmes

$$\begin{aligned} b_m &= a_m + l_m + h_{m-1} + l_{m-1} + h_{m-2} + \dots + h_1 + l_1 + h_0 \\ &\in A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_m \end{aligned}$$

tel que $\|b_m\| = \varepsilon_0$.

Pour tout $k, m \in \mathbb{N}_0$, soit $v_{k,m}$ un élément de L_m tel que $d(b_k, L_m) = \|b_k - v_{k,m}\|$ donc tel que

$$\|v_{k,m}\| \leq \|b_k - v_{k,m}\| + \|b_k\| \leq d(b_k, L_0) + \|b_k\| \leq 2\varepsilon_0.$$

Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}$, de la suite $(v_{k,m})_{k \in \mathbb{N}}$ du compact $L_m \cap b(2\varepsilon_0)$, on peut extraire une sous-suite convergente; soit $v_{l(k),m} \rightarrow v_m$ avec $v_m \in L_m \cap b(2\varepsilon_0)$. Il existe donc $K(m) \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|v_{l(k),m} - v_m\| \leq \varepsilon_m$ pour tout $k \geq K(m)$. Mais on a aussi

$$\|b_{l(k)} - v_{l(k),m}\| = d(b_{l(k)}, L_m) = \varepsilon_m, \quad \forall l(k) \geq m,$$

donc

$$\begin{aligned} \|b_{l(k)} - b_{l(h)}\| &\leq \|b_{l(k)} - v_{l(k),m}\| + \|v_{l(k),m} - v_m\| \\ &\quad + \|v_m - v_{l(h),m}\| + \|v_{l(h),m} - b_{l(h)}\| \\ &\leq 4\varepsilon_m, \quad \forall k, h \geq \sup\{K(m), m\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la suite $(b_{l(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge dans E . Si b est sa limite, il vient, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$d(b, L_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(b_{l(k)}, L_m) = \varepsilon_m.$$

D'où la conclusion. ■

Remarque. En particulier, ce théorème de léthargie de Bernstein s'applique à

- 1) l'espace $C_0(K)$ et la suite des sous-espaces vectoriels de dimension finie L_m constitués des restrictions à K des polynômes de degré $\leq m$;
- 2) l'espace $CP_T(\mathbb{R}^n)$ et la suite des sous-espaces vectoriels de dimension finie L_M constitués des combinaisons linéaires du type

$$\sum_{m=0}^M \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha e^{2i\pi\alpha x/T} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{Z}^n \text{ et } c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

* \rightarrow Par soucis de complétion, mentionnons aussi le résultat suivant, qui sort du cadre de ce cours.

Théorème 3.7.14 *Soit $(L_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés et propres de l'espace de Banach E . Pour toute suite $(d_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ décroissante vers 0, il existe alors $e \in E$ tel que la suite $(d(e, L_m)/d_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ ne soit pas bornée.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$H_n = \{ e \in E : d(e, L_m) \leq nd_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \}.$$

On vérifie directement que ces ensembles H_n sont fermés et absolument convexes. De plus, il est clair que $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ est l'ensemble des éléments de E pour lesquels la suite $(d(e, L_m)/d_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée. Tout revient donc à établir que $H \neq E$.

Or si $H = E$, comme E est un espace de Banach, le théorème de Baire affirme l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $(H_{n_0})^\circ \neq \emptyset$. Comme H_{n_0} est absolument convexe, on a $0 \in (H_{n_0})^\circ$ et il existe $r \in]0, 1[$ tel que $b(r) \subset H_{n_0}$. Cela étant, choisissons $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $n_0 d_{m_0} < r$. Pour tout $e \in E$ tel que $\|e\| = r$, il vient alors $d(e, L_{m_0}) \leq n_0 d_{m_0} < r$, ce qui est absurde, vu le lemme de Riesz. $\blacksquare \leftarrow *$

3.8 Convergence uniforme et espaces C_p

Remarque. Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_\infty(\Omega)$ converge uniformément sur Ω vers f , nous savons que f est une fonction continue sur Ω mais on ne peut rien dire en général de la dérivabilité de f . Rappelons à ce sujet qu'il existe même une suite de polynômes sur \mathbb{R} qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|\cdot|$. \square

Remarque. Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_\infty(\Omega)$ converge uniformément sur Ω vers une fonction $f \in C_\infty(\Omega)$, on ne peut rien dire en général de la convergence de la suite $(D^\alpha f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ vers $D^\alpha f$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Ainsi la suite $(\sin(mx)/\sqrt{m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $C_\infty(\mathbb{R})$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers 0 mais la suite $(\sqrt{m} \cos(mx))_{m \in \mathbb{N}_0}$ des dérivées

d'ordre 1 ne converge en aucun point de \mathbb{R} vers une limite finie. En effet, si on a $\sqrt{m} \cos(mx_0) \rightarrow l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(\cos(mx_0))_{m \in \mathbb{N}_0}$ doit converger vers 0 et la formule $\cos(2mx_0) = 2 \cos^2(mx_0) - 1$ conduit aussitôt à une contradiction. \square

Théorème 3.8.1 Soient p un élément de \mathbb{N}_0 , Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^n et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $C_p(\Omega)$. Si

a) pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| \leq p - 1$, il existe un point x_α de Ω tel que la suite numérique $(D^\alpha f_m)(x_\alpha)$ converge;

b) pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| = p$, la suite $D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω ;

alors, pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| \leq p$, la suite $(D^\alpha f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur tout compact de Ω et, si on désigne par $f^{(\alpha)}$ sa limite, il vient $f^{(0)} \in C_p(\Omega)$ et $D^\alpha f^{(0)} = f^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq p$.

Preuve. Comme l'établit une récurrence aisée, il suffit de prouver cet énoncé dans le cas $p = 1$. De plus, quitte à recourir aux suites $(\Re f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(\Im f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ séparément, on voit de suite qu'on peut supposer toutes les fonctions f_m à valeurs réelles.

Etablissons d'abord que, si x est un point de Ω tel que la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge, alors la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur toute boule fermée b de centre x et incluse dans Ω . Il s'agit là d'une conséquence directe du théorème de Taylor car, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{y \in b} |f_p(y) - f_q(y)| &\leq \sup_{y \in b} |(f_p(y) - f_q(y)) - (f_p(x) - f_q(x))| + |f_p(x) - f_q(x)| \\ &\leq nr \sup_{k \leq n, \xi \in b} |[D_k f_p]_\xi - [D_k f_q]_\xi| + |f_p(x) - f_q(x)| \end{aligned}$$

si r désigne le rayon de b .

Déduisons-en que la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge quel que soit $x \in \Omega$. L'ensemble $A = \{x \in \Omega : f_m(x) \rightarrow\}$ n'est pas vide: il contient le point x_0 et, vu ce qui précède, A est ouvert. Tout revient à établir qu'il est égal à Ω . Si ce n'est pas le cas, vu la connexité de Ω , le théorème de passage des douanes procure un point $x \in \Omega \cap A^\bullet$. Comme A est ouvert, x ne peut appartenir à A . Mais il existe $r > 0$ tel que la boule $\{y : |x - y| \leq r\}$ soit incluse dans Ω . Il existe ensuite $y \in A$ tel que $|x - y| \leq r/2$ donc tel que $\{z : |z - y| \leq r/2\} \subset \Omega$. D'où une contradiction car ceci entraîne $x \in A$.

Cela étant, on prouve directement que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur tout compact de Ω .

De la sorte, toutes les fonctions $f^{(0)}, f^{(e_1)}, \dots, f^{(e_n)}$ appartiennent à $C_0(\Omega)$ et, pour conclure, il suffit d'établir que $f^{(0)}$ est une fonction dérivable sur Ω et telle que

$D_k f^{(0)} = f^{(e_k)}$ pour tout $k \leq n$. Il suffit donc de prouver que, pour tout $x \in \Omega$ et tout $k \leq n$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}_0} \frac{f^{(0)}(x + he_k) - f^{(0)}(x)}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} [D_k f_m]_x.$$

Comme on a

$$[D_k f_m]_x = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}_0} \frac{f_m(x + he_k) - f_m(x)}{h}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

il s'agit là d'une application du théorème de permutation des limites à la situation

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0, h \in A} \frac{f_m(x + he_k) - f_m(x)}{h}$$

où A est une partie de \mathbb{R} du type $[-h_0, h_0] \setminus \{0\}$ avec h_0 vérifiant les inégalités $0 < h_0 < d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. En effet, la suite

$$\left(\frac{f_m(x + he_k) - f_m(x)}{h} \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

converge uniformément sur A car, vu le théorème de Taylor, on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_p(x + he_k) - f_p(x)}{h} - \frac{f_q(x + he_k) - f_q(x)}{h} \right| \\ &= \frac{1}{|h|} |[f_p(x + he_k) - f_q(x + he_k)] - [f_p(x) - f_q(x)]| \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq h_0} |[D_k f_p]_y - [D_k f_q]_y| \end{aligned}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$. ■

Remarque. Le théorème précédent s'étend aux ouverts non connexes de \mathbb{R}^n en remplaçant la condition a) par la suivante: pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| \leq p - 1$, il existe dans chaque composante connexe de Ω un point x_α tel que la suite $([D^\alpha f_m]_{x_\alpha})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge. C'est immédiat car toute partie compacte de Ω est incluse dans une union finie de parties connexes de Ω . □

Théorème 3.8.2 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $C_\infty(\Omega)$. Si, pour toute dérivée D^α , la suite $(D^\alpha f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $f^{(\alpha)}$, alors $f^{(0)}$ appartient à $C_\infty(\Omega)$ et on a $D^\alpha f^{(0)} = f^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. ■

Mentionnons les résultats relatifs aux séries.

Théorème 3.8.3 Soient p un élément de \mathbb{N}_0 , Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^n et $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ une série dans $C_p(\Omega)$. Si

a) pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| \leq p-1$, il existe un point x_α de Ω tel que la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} (D^\alpha f_m)(x_\alpha)$ converge;

b) pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| = p$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω ,

alors, pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| \leq p$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω et on a $\sum_{m=1}^{\infty} f_m \in C_p(\Omega)$ et

$$D^\alpha \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m \right) = \sum_{m=1}^{\infty} D^\alpha f_m$$

sur Ω pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq p$. ■

Théorème 3.8.4 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ une série dans $C_\infty(\Omega)$. Si, pour toute dérivée D^α , la série $\sum_{m=1}^{\infty} D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω , alors $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ appartient à $C_\infty(\Omega)$ et on a

$$D^\alpha \sum_{m=1}^{\infty} f_m = \sum_{m=1}^{\infty} D^\alpha f_m$$

sur Ω pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. ■

3.9 Espaces $C_p(\Omega)$

Définitions. Tout comme au paragraphe 3.5, nous choisissons pour $(K_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite croissante de parties compactes et régulières de Ω telles que $\cup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$ et que $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

Cela étant,

a) si p appartient à \mathbb{N}_0 , on a tôt fait de vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\pi_{p,m}(\cdot) = \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K_m} |(D^\alpha \cdot)(x)|$$

est une semi-norme sur $C_p(\Omega)$ et que $(C_p(\Omega), \{\pi_{p,m} : m \in \mathbb{N}_0\})$ est un espace à semi-normes dénombrables séparé, qu'on note aussi $C_p(\Omega)$ tout simplement,

b) on a tôt fait de vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\pi_{\infty,m}(\cdot) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_m} |(D^\alpha \cdot)(x)|$$

est une semi-norme sur $C_\infty(\Omega)$ et que $(C_\infty(\Omega), \{\pi_{\infty,m} : m \in \mathbb{N}_0\})$ est un espace à semi-normes dénombrables séparé, qu'on note aussi $C_\infty(\Omega)$.

Des résultats du paragraphe précédent, on tire de suite la propriété que voici.

Théorème 3.9.1 *Pour tout $p \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ et tout ouvert non vide Ω de \mathbb{R}^n , $C_p(\Omega)$ est un espace de Fréchet. ■*

Partie II
ESPACES L^p

Chapitre 4

Espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$

4.1 Les espaces vectoriels $L^{1,2,\infty}(E)$

Soit E une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

Définitions. On appelle

- *espace* $\mathcal{L}^1(E)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur E ;
- *espace* $\mathcal{L}^2(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables et de carré intégrable sur E ;
- *espace* $\mathcal{L}^\infty(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables et bornées *pp* sur E

Etant donné deux éléments f et g d'un de ces espaces, notons N_f et N_g les parties de E où respectivement f et g ne sont pas définis; elles sont négligeables. Si, en outre, c appartient à \mathbb{C} , les fonctions cf , $f + g$ et fg sont définies canoniquement sur $E \setminus N_f$, $E \setminus (N_f \cup N_g)$ et $E \setminus (N_f \cup N_g)$ respectivement et donnent donc lieu à des fonctions définies *pp* sur E , qui appartiennent bien sûr au même espace que f et g et que nous continuons à noter cf , $f + g$ et fg .

Notation. Une fonction mesurable f sur E est *bornée pp sur E* si et seulement s'il existe $C > 0$ et une partie négligeable N de E tels que la majoration $|f(x)| \leq C$ ait lieu pour tout $x \in E \setminus N$ (ce qui exige que f soit défini sur $E \setminus N$). Dans ces conditions,

$$\inf \{ C > 0 : \exists N \subset E \text{ négligeable tel que } |f(x)| \leq C, \forall x \in E \setminus N \}$$

est un nombre supérieur ou égal à 0, noté

$$\sup_{pp \text{ sur } E} |f|.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe alors une partie négligeable N_m de E telle que

$$|f(x)| \leq \sup_{pp \text{ sur } E} |f| + 1/m, \quad \forall x \in E \setminus N_m.$$

Il s'ensuit que $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$ est une partie négligeable de E pour laquelle

$$|f(x)| \leq \sup_{pp \text{ sur } E} |f|, \quad \forall x \in E \setminus N.$$

De plus, il est clair que, si g est une fonction égale *pp* sur E à f , alors g appartient aussi à $\mathcal{L}^\infty(E)$ et vérifie

$$\sup_{pp \text{ sur } E} |g| = \sup_{pp \text{ sur } E} |f|.$$

Exercice. On peut établir que, si une partie N de \mathbb{R}^n est négligeable, alors, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe une partie négligeable N_j de \mathbb{R} telle que la section $N_{j,r} = \{(x_1, \dots, [x_j], \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : x \in N, x_j = r\}$ de N soit négligeable pour tout $r \in \mathbb{R} \setminus N_j$. Cela étant, établir que *si une suite de fonctions mesurables et égales pp à une fonction à variables séparées sur \mathbb{R}^n converge pp sur \mathbb{R}^n , sa limite est égale pp à une fonction mesurable et à variables séparées sur \mathbb{R}^n .*

Suggestion. Pour simplifier les notations, considérons le cas $n = 2$. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions mesurables et à variables séparées sur \mathbb{R}^2 qui converge *pp* sur \mathbb{R}^2 vers f . Nous savons déjà que f est mesurable sur \mathbb{R}^2 . Si f est égal à 0 *pp*, c'est trivial. Supposons donc f non égal à 0 *pp*. Désignons par N l'ensemble des points où la suite ne converge pas; N est négligeable. Cela étant, il existe des parties négligeables N_1 et N_2 de \mathbb{R} telles que les sections $N_{1,x}$ et $N_{2,y}$ de N soient négligeables pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N_1$ et tout $y \in \mathbb{R} \setminus N_2$. Dans ces conditions,

$$\mathbb{R}^2 \setminus (N \cup (N_1 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times N_2))$$

est égal *pp* à \mathbb{R}^2 ; prenons un point (x_0, y_0) de cet ensemble tel que $f(x_0, y_0) \neq 0$. Cela étant,

$$\mathbb{R}^2 \setminus (N \cup (\mathbb{R} \times N_{1,x_0}) \cup (N_{2,y_0} \times \mathbb{R}))$$

est égal *pp* à \mathbb{R}^2 et, pour tout élément (x, y) de cet ensemble, on a $(x_0, y_0), (x_0, y), (x, y_0), (x, y) \notin N$ donc

$$\lim_m f_m(x_0, y_0) \cdot \lim_m f_m(x, y) = \lim_m f_m(x_0, y) \cdot \lim_m f_m(x, y_0)$$

en tenant compte de ce que les f_m sont à variables séparées, c'est-à-dire

$$f(x, y) = \frac{1}{f(x_0, y_0)} f(x_0, y) \cdot f(x, y_0),$$

ce qui suffit. \square

Notation. Sur ces ensembles, on vérifie directement que la relation \sim définie par

$$f \sim g \iff f = g \text{ pp sur } E$$

est bien sûr une relation d'équivalence. Cela étant, on peut introduire les espaces fondamentaux suivants.

Définitions. On appelle

- *espace* $L^1(E)$ le quotient de $\mathcal{L}^1(E)$ par \sim ;
- *espace* $L^2(E)$ le quotient de $\mathcal{L}^2(E)$ par \sim ,
- *espace* $L^\infty(E)$ le quotient de $\mathcal{L}^\infty(E)$ par \sim .

Remarque. Afin d'alléger les énoncés des propriétés, si une assertion est valable dans les espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$, nous disons tout simplement qu'elle est valable dans les espaces $L^{1,2,\infty}(E)$ et ainsi de suite. \square

Remarque. Afin d'alléger les notations, nous allons conserver la même notation pour la fonction f et sa classe. De même, nous allons parler de fonctions pour désigner les éléments de ces espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$. Ces abus d'écriture et de langage sont consacrés par l'usage; ils sont très utiles et ne conduisent pas dans cette matière à des situations délicates. \square

Notations. Si f appartient à $L^{1,2,\infty}(E)$, la fonction $f\chi_E$ (obtenue bien sûr de la manière suivante: on choisit un représentant de la classe f ; soit g un tel représentant; on définit $g\chi_E$ en prolongeant g par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus E$; $f\chi_E$ désigne alors la classe de $g\chi_E$ —il est clair que cette définition est indépendante du choix de g) appartient bien sûr au même espace que f . Inversement si f appartient à $L^{1,2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, il est clair que $f|_E$ appartient à $L^{1,2,\infty}(E)$.

Remarque. Les espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$ ont leur individualité propre. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier directement les résultats consignés dans le tableau suivant. \square

	$L^1(\mathbb{R})$	$L^2(\mathbb{R})$	$L^\infty(\mathbb{R})$
$x^{-1/2} \chi_{]0,1]}$	\in	\notin	\notin
$x^{-1/4} \chi_{]0,1]} + x^{-1} \chi_{]1,+\infty[}$	\notin	\in	\notin
$\chi_{\mathbb{R}}$	\notin	\notin	\in

Cependant il existe des liens entre ces espaces.

Proposition 4.1.1 a) On a toujours $L^1(E) \cap L^\infty(E) \subset L^2(E)$.

b) Si E est intégrable, on a $L^\infty(E) \subset L^2(E) \subset L^1(E)$.

Preuve. a) De fait, si f est une fonction intégrable et bornée pp sur E , alors f est une fonction mesurable sur E qui vérifie

$$|f|^2 \leq \left(\sup_{pp \text{ sur } E} |f| \right) \cdot |f| \text{ pp sur } E$$

où le second membre est intégrable sur E .

b) Si E est intégrable, on a en effet

$$|f|^2 \leq \left(\sup_{pp \text{ sur } E} |f| \right)^2 \cdot \chi_E \text{ pp sur } E, \quad \forall f \in L^\infty(E),$$

et

$$|f| \leq \chi_E + |f|^2 \text{ pp sur } E, \quad \forall f \in L^2(E),$$

où, à chaque fois, le second membre est intégrable sur E . ■

Passons aux propriétés de ces ensembles.

Théorème 4.1.2 a) Les espaces $L^{1,2,\infty}(E)$ sont vectoriels.

b) L'élément f appartient à $L^{1,2,\infty}(E)$ si et seulement si \bar{f} y appartient.

En particulier, f appartient à $L^{1,2,\infty}(E)$ si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ y appartiennent.

c) Si f appartient à $L^{1,2,\infty}(E)$, alors $|f|$ y appartient.

En particulier,

i) la fonction f réelle et définie pp sur E appartient à $L^{1,2,\infty}(E)$ si et seulement si f_+ et f_- y appartiennent.

ii) si J appartient à \mathbb{N}_0 et si f_1, \dots, f_J appartiennent à $L^{1,2,\infty}(E)$ et sont réels, alors

$$\sup\{f_1, \dots, f_J\} \text{ et } \inf\{f_1, \dots, f_J\}$$

appartiennent à $L^{1,2,\infty}(E)$.

Preuve. a) Pour $L^1(E)$, la propriété est connue.

Pour $L^2(E)$, il suffit de noter que, pour tous $f, g \in L^2(E)$ et tout $c \in \mathbb{C}$, $f + g$ et cf sont des fonctions mesurables sur E telles que

$$|f + g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2) \in L^1(E)$$

et

$$|cf|^2 \leq |c|^2 |f|^2 \in L^1(E),$$

les majorations ayant lieu *pp* sur E .

Pour $L^\infty(E)$, il suffit de noter que, pour tous $f, g \in L^\infty(E)$, $f + g$ et cf sont des fonctions mesurables sur E telles que

$$|f + g| \leq \sup_{pp \text{ sur } E} |f| + \sup_{pp \text{ sur } E} |g| \text{ pp sur } E$$

et

$$|cf| \leq |c| \cdot \sup_{pp \text{ sur } E} |f| \text{ pp sur } E.$$

b) est immédiat.

Le cas particulier résulte alors aussitôt des formules $\Re f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ et $\Im f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$.

c) est immédiat. Par exemple, le cas particulier i) résulte aussitôt des formules $f_+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f_- = \frac{|f|-f}{2}$. ■

4.2 Les espaces normés $L^{1,2,\infty}(E)$

Afin de rendre les Parties I et II de ces notes de cours largement autonomes, rappelons les définitions suivantes (cf. p. 2.1).

Définitions. Un *espace normé* $(L, \|\cdot\|)$ (on écrit aussi L tout simplement si aucune confusion sur $\|\cdot\|$ n'est possible) est la donnée d'un espace vectoriel L et d'une *norme* $\|\cdot\|$ sur L , c'est-à-dire d'une application

$$\|\cdot\| : L \rightarrow [0, +\infty[\quad f \mapsto \|f\|$$

qui jouit des trois propriétés suivantes:

- $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$;
- $\|cf\| = |c| \|f\|$, $\forall c \in \mathbb{K}$;
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, **inégalité de Minkowski**.

Ainsi les espaces $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ sont des exemples d'espaces normés.

Théorème 4.2.1 *L'application*

- a) $\|\cdot\|_1 = \int_E |\cdot| dx$ est une norme sur $L^1(E)$,
- b) $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\int_E |\cdot|^2 dx}$ est une norme sur $L^2(E)$,
- c) $\|\cdot\|_\infty = \sup_{pp \text{ sur } E} |\cdot|$ est une norme sur $L^\infty(E)$.

Preuve. a) et c) s'établissent directement.

b) repose sur l'inégalité du théorème suivant qui a un intérêt propre.

Définition. Un espace *pré-hilbertien* $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (on écrit aussi L si aucun doute sur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est possible) est la donnée d'un espace vectoriel L et d'un *produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur L , c'est-à-dire d'une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{K}; \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$$

qui jouit des cinq propriétés suivantes:

- $\langle f, f \rangle \geq 0$;
- $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$;
- $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$;
- $\langle cf, g \rangle = c \langle f, g \rangle, \quad \forall c \in \mathbb{K}$;
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.

Bien sûr, pour tous $J, K \in \mathbb{N}_0$, tous c_1, \dots, c_J et $d_1, \dots, d_K \in \mathbb{K}$ et tous f_1, \dots, f_J et $g_1, \dots, g_K \in L$, on a alors

$$\left\langle \sum_{j=1}^J c_j f_j, \sum_{k=1}^K d_k g_k \right\rangle = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K c_j \overline{d_k} \langle f_j, g_k \rangle.$$

Théorème 4.2.2 Si $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace pré-hilbertien, l'application

$$\|\cdot\| : L \rightarrow [0, +\infty[; f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

est une norme sur L pour laquelle on a l'**inégalité de Schwarz**

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad \forall f, g \in L.$$

Preuve. Bien sûr, on a

$$\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$$

et

$$\|cf\| = |c| \|f\|, \quad \forall c \in \mathbb{K}.$$

Etablissons à présent l'inégalité de Schwarz. Si on a $\langle f, g \rangle = 0$, c'est trivial. Sinon, on procède comme suit. Pour tout $c \in \mathbb{K}$, on a évidemment

$$0 \leq \|f + cg\|^2 = \langle f + cg, f + cg \rangle \leq \|f\|^2 + c \langle g, f \rangle + \bar{c} \langle f, g \rangle + |c|^2 \|g\|^2.$$

En particulier, pour $c = r \langle f, g \rangle$ avec $r \in \mathbb{R}$, il vient

$$0 \leq \|f\|^2 + 2r |\langle f, g \rangle|^2 + r^2 |\langle f, g \rangle|^2 \|g\|^2, \quad \forall r \in \mathbb{R};$$

le réalisant de ce trinôme du second degré en r doit donc être inférieur ou égal à 0: on a

$$|\langle f, g \rangle|^4 - |\langle f, g \rangle|^2 \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0,$$

ce qui suffit.

Pour conclure, il suffit alors d'établir qu'on a $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ pour tous $f, g \in L$. Or on a successivement

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

(en recourant à l'inégalité de Schwarz pour établir la dernière inégalité).

D'où la conclusion. ■

Preuve du fait que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L^2(E)$. Remarquons d'abord que, pour tous $f, g \in L^2(E)$, on a $f\bar{g} \in L^1(E)$ car $f\bar{g}$ est une fonction mesurable sur E telle que

$$|f\bar{g}| \leq |f|^2 + |g|^2 \in L^1(E),$$

l'inégalité ayant lieu *pp* sur E . Cela étant, on vérifie aisément que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(E) \times L^2(E) \rightarrow \mathbb{C}; \quad (f, g) \mapsto \int_E f\bar{g} dx$$

est un produit scalaire sur $L^2(E)$. La conclusion est alors une conséquence directe du théorème précédent. ■

Définitions. Pour alléger les notations,

- l'espace normé $L^1(E)$ est l'espace $(L^1(E), \|\cdot\|_1)$;
- l'espace normé $L^2(E)$ est l'espace $(L^2(E), \|\cdot\|_2)$;
- l'espace normé $L^\infty(E)$ est l'espace $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$.

Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, on écrit plus simplement

$$L^1, L^2 \text{ et } L^\infty$$

au lieu de $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ respectivement si aucune confusion sur n n'est possible.

Pour la simplification des écritures, on omet l'indice de $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$ chaque fois que cela n'apporte pas d'ambiguïté.

Proposition 4.2.3 *Dans tout espace normé $(L, \|\cdot\|)$, on a*

$$\left| \|f\| - \|g\| \right| \leq \|f - g\|, \quad \forall f, g \in L.$$

Preuve. De fait on a toujours

$$\|f\| - \|g\| = \|f - g + g\| - \|g\| \leq \|f - g\|$$

et de même

$$\|g\| - \|f\| = \|g - f + f\| - \|f\| \leq \|g - f\|. \blacksquare$$

Cette propriété s'applique notamment aux espaces normés $L^{1,2,\infty}(E)$. La nature particulière des éléments d'un espace normé peut donner lieu à des propriétés spécifiques à cet espace.

Proposition 4.2.4 *Dans $L^{1,2,\infty}(E)$, on a*

- a) $\|f\| = \|\bar{f}\| = \||f|\|$;
- b) $\||f| - |g|\| \leq \|f - g\|$;
- c) $|f| \leq |g|$ pp sur $E \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$

En particulier, on a donc

- a) $\|\Re f\| \leq \|f\|$ et $\|\Im f\| \leq \|f\|$;
- b) $\|f_+\| \leq \|f\|$ et $\|f_-\| \leq \|f\|$ si f est réel. \blacksquare

Les espaces normés $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$ jouissent encore des propriétés importantes suivantes, qui les lient.

Proposition 4.2.5 a) *Pour tous $f \in L^{1,2,\infty}(E)$ et $g \in L^\infty(E)$, on a $f\bar{g} \in L^{1,2,\infty}(E)$ et $\|f\bar{g}\| \leq \|f\| \|g\|$ (où les normes de $f\bar{g}$, f et g doivent bien sûr être considérées dans l'espace approprié).*

b) *Inégalité de Schwarz. Pour tous $f, g \in L^2(E)$, $f\bar{g}$ appartient à $L^1(E)$ et on a*

$$\left| \int_E f\bar{g} dx \right| \leq \int_E |f\bar{g}| dx = \|f\bar{g}\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Preuve. a) Dans les trois cas, $f\bar{g}$ est bien sûr une fonction mesurable sur E . Cela étant, il suffit de noter que,

- i) pour tout $f \in L^1(E)$ et tout $g \in L^\infty(E)$, on a $|f\bar{g}| \leq \|g\| \cdot |f| \in L^1(E)$, l'inégalité ayant lieu pp sur E ;
 - ii) pour tout $f \in L^2(E)$ et tout $g \in L^\infty(E)$, on a $|f\bar{g}|^2 \leq \|g\|^2 \cdot |f|^2 \in L^1(E)$, l'inégalité ayant lieu pp sur E ;
 - iii) pour tous $f, g \in L^\infty(E)$, on a $|f\bar{g}| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ l'inégalité ayant lieu pp sur E .
- b) est connu. \blacksquare

4.3 Les espaces métriques $L^{1,2,\infty}(E)$

Définition. Rappelons qu'un *espace métrique* (M, d) est un ensemble non vide M muni d'une *distance* d , c'est-à-dire d'une application

$$d: M \times M \rightarrow [0, +\infty[; \quad (f, g) \mapsto d(f, g)$$

qui jouit des trois propriétés suivantes

- $d(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$;
- $d(f, g) = d(g, f)$;
- **Inégalité triangulaire** : $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Le résultat suivant signale que tout espace normé est muni d'une distance canonique.

Théorème 4.3.1 *Si $(L, \|\cdot\|)$ est un espace normé, l'application*

$$d_{\|\cdot\|}: L \times L \rightarrow [0, +\infty[; \quad (f, g) \mapsto \|f - g\|$$

est une distance sur L telle que

- a) $d(cf, cg) = |c| d(f, g), \quad \forall c \in \mathbb{K}$;
- b) $d(f + h, g + h) = d(f, g)$. ■

Proposition 4.3.2 *Dans tout espace métrique (M, d) , on a*

$$|d(f, g) - d(g, h)| \leq d(f, h)$$

et

$$|d(f, g) - d(h, l)| \leq d(f, h) + d(g, l).$$

Preuve. D'une part l'inégalité triangulaire procure aussitôt

$$d(f, g) - d(g, h) \leq d(f, h)$$

et

$$d(g, h) - d(f, g) \leq d(h, f) = d(f, h),$$

ce qui suffit pour établir la première inégalité. D'autre part, il vient successivement

$$d(f, g) - d(h, l) \leq d(f, h) + d(h, l) + d(l, g) - d(h, l)$$

et

$$d(h, l) - d(f, g) \leq d(h, f) + d(f, g) + d(g, l) - d(f, g),$$

ce qui suffit pour établir la seconde. ■

Notons que la nature particulière des éléments d'un espace normé peut procurer des propriétés spécifiques à sa distance canonique.

Proposition 4.3.3 *Dans les espaces $L^{1,2,\infty}(E)$, la distance canonique d est telle que*

- a) $d(\bar{f}, \bar{g}) = d(f, g)$;
- b) $d(\Re f, \Re g) \leq d(f, g)$ et $d(\Im f, \Im g) \leq d(f, g)$;
- c) $d(|f|, |g|) \leq d(f, g)$;
- d) $d(f_+, g_+) \leq d(f, g)$ et $d(f_-, g_-) \leq d(f, g)$ si f et g sont réels. ■

4.4 Les espaces de Banach $L^{1,2,\infty}(E)$

Tout comme dans \mathbb{R}^n , nous pouvons introduire par l'intermédiaire de la norme dans un espace normé ou de la distance dans un espace métrique, une notion de convergence. Nous allons nous limiter au cas des espaces normés.

Définitions. Soient $(L, \|\cdot\|)$ un espace normé, f_0 un élément de L et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de L . La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L vers f_0 (on dit aussi que f_0 est limite dans L de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$) si la suite $(\|f_m - f_0\|)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers 0. On écrit $f_m \rightarrow f_0$ dans L ou $f_m \xrightarrow{L} f_0$ ou même tout simplement $f_m \rightarrow f_0$ si aucune confusion sur L n'est possible.

Remarque. Cette notion de convergence peut notamment être considérée dans les espaces $L^{1,2,\infty}(E)$. Elle y donne naissance à de nouveaux concepts essentiellement distincts de la convergence ponctuelle, de la convergence pp ou de la convergence uniforme. Par exemple, on vérifie aisément que la suite $(\chi_{I_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ où, pour $m = 2^k + l$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$, on pose $I_m =]l2^{-k}, (l+1)2^{-k}]$ converge dans $L^{1,2}(\mathbb{R})$ vers 0 alors qu'elle ne converge en aucun point de $]0, 1]$ ni dans $L^\infty(\mathbb{R})$ vers 0. Inversement la suite $(m\chi_{]0, 1/m]})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement vers 0 mais ne converge pas dans $L^{1,2,\infty}(\mathbb{R})$. Cependant la convergence dans $L^\infty(E)$ entraîne bien sûr la convergence pp sur E . □

Théorème 4.4.1 *Soit $(L, \|\cdot\|)$ un espace normé.*

- a) **Unicité de la limite.** *Si une suite de L converge, sa limite est unique.*
- b) **Combinaison linéaire.** *Toute combinaison linéaire de suites convergentes dans L converge dans L vers la combinaison linéaire correspondante des limites.*
- c) **Norme.** *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L vers f_0 , alors la suite numérique $(\|f_m\|)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $\|f_0\|$.*
- d) **Sous-suite.** *Toute sous-suite d'une suite convergente dans L converge dans L vers la même limite.*

Preuve. a) Si $f_0, g_0 \in L$ sont limites dans L de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de L , on a en effet

$$\|f_0 - g_0\| \leq \|f_0 - f_m\| + \|f_m - g_0\|, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

donc $\|f_0 - g_0\| = 0$, ce qui suffit.

b) Avec des notations self-évidentes, on a en effet

$$\left\| \sum_{j=1}^J c_j f_{j,m} - \sum_{j=1}^J c_j f_j \right\| \leq \sum_{j=1}^J |c_j| \|f_{j,m} - f_j\|$$

où la majorante tend vers 0 si $m \rightarrow \infty$.

c) Cela résulte aussitôt de l'inégalité

$$|\|f_m\| - \|f_0\|| \leq \|f_m - f_0\|$$

valable pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

d) est direct. ■

Proposition 4.4.2 Dans $L^{1,2,\infty}(E)$, on a

a) $f_m \rightarrow f_0 \Leftrightarrow \overline{f_m} \rightarrow \overline{f_0}$;

b) $f_m \rightarrow f_0 \Rightarrow |f_m| \rightarrow |f_0|$.

En particulier, a) donne

$$f_m \rightarrow f_0 \Leftrightarrow (\Re f_m \rightarrow \Re f_0 \text{ et } \Im f_m \rightarrow \Im f_0)$$

et, si les f_m et f_0 sont réels, b) donne

$$f_m \rightarrow f_0 \Leftrightarrow (f_{m,+} \rightarrow f_{0,+} \text{ et } f_{m,-} \rightarrow f_{0,-}). \blacksquare$$

Proposition 4.4.3 a) Si on a $f_m \rightarrow f_0$ dans $L^{1,2,\infty}(E)$ et $g_m \rightarrow g_0$ dans $L^\infty(E)$, alors on a $f_m \overline{g_m} \rightarrow f_0 \overline{g_0}$ dans $L^{1,2,\infty}(E)$.

b) Si on a $f_m \rightarrow f_0$ et $g_m \rightarrow g_0$ dans $L^2(E)$, alors on a $f_m \overline{g_m} \rightarrow f_0 \overline{g_0}$ dans $L^1(E)$.

Preuve. Comme la suite $\|f_m\|$ est bornée, cela résulte aussitôt des majorations suivantes

$$\begin{aligned} \|f_m \overline{g_m} - f_0 \overline{g_0}\| &\leq \left\| \overline{f_m(g_m - g_0)} \right\| + \|(f_m - f_0) \overline{g_0}\| \\ &\leq \|f_m\| \|g_m - g_0\| + \|f_m - f_0\| \|g_0\|. \blacksquare \end{aligned}$$

Le problème consiste maintenant en la caractérisation des suites convergentes dans $L^{1,2,\infty}(E)$.

Définition. Une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace normé $(L, \|\cdot\|)$ est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tous $r, s \geq M$, on a $\|f_r - f_s\| \leq \varepsilon$.

Proposition 4.4.4 *Dans un espace normé, toute suite de Cauchy qui contient une sous-suite convergente est convergente.*

Preuve. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy dans l'espace normé $(L, \|\cdot\|)$, dont la sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L vers f_0 . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $M > 0$ tel que

$$m \geq M \Rightarrow \|f_{k(m)} - f_0\| \leq \varepsilon/2$$

et

$$r, s \geq M \Rightarrow \|f_r - f_s\| \leq \varepsilon/2$$

donc tel que

$$m \geq M \Rightarrow \|f_m - f_0\| \leq \|f_m - f_{k(m)}\| + \|f_{k(m)} - f_0\| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Proposition 4.4.5 *Dans un espace normé, toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans l'espace normé $(L, \|\cdot\|)$ vers f_0 , alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$m \geq M \Rightarrow \|f_m - f_0\| \leq \varepsilon/2$$

donc tel que

$$r, s \geq M \Rightarrow \|f_r - f_s\| \leq \|f_r - f_0\| + \|f_s - f_0\| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Critère 4.4.6 (Critère de Cauchy) *Dans $L^{1,2,\infty}(E)$, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy: on dit que $L^{1,2,\infty}(E)$ est un espace de Banach et, plus particulièrement, que l'espace $L^2(E)$ est un espace de Hilbert.*

De plus, de toute suite convergente dans $L^{1,2}(E)$, on peut extraire une sous-suite qui converge pp sur E vers la même limite.

Preuve. Vu le résultat précédent, nous savons que la condition est nécessaire. Etablissons qu'elle est suffisante.

a) Considérons d'abord le cas des espaces $L^{1,2}(E)$.

Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy dans

$$L^1(E) \quad (\text{resp. } L^2(E)).$$

Par une extraction à la Cauchy, on peut en extraire une sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que

$$\|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\| \leq 2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Alors la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$F_M = \sum_{m=1}^M |f_{k(m+1)} - f_{k(m)}| \quad (\text{resp. } F_M = \left(\sum_{m=1}^M |f_{k(m+1)} - f_{k(m)}| \right)^2)$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ vérifie l'hypothèse du théorème de la convergence monotone:

- a) les F_M appartiennent bien sûr à $L^1(E)$;
- b) la suite F_M croît évidemment pp sur E ;
- c) pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} \int_E F_M dx &\leq \sum_{m=1}^M 2^{-m} \quad (\text{resp. } \int_E F_M dx = \left\| \sum_{m=1}^M |f_{k(m+1)} - f_{k(m)}| \right\|^2) \\ &\leq 1. \end{aligned} \quad \leq \left(\sum_{m=1}^M \|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\| \right)^2 \leq 1.)$$

Cela étant, la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur E et sa limite F pp sur E appartient à $L^1(E)$. Ceci signifie notamment que la suite

$$\left(\sum_{m=1}^M (f_{k(m+1)} - f_{k(m)}) = f_{k(M+1)} - f_{k(1)} \right)_{M \in \mathbb{N}_0}$$

converge pp sur E donc que la sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur E ; soit f sa limite pp sur E .

Pour $L^1(E)$, la conclusion résulte alors aussitôt du théorème de la convergence majorée appliqué à la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$:

- a) les $f_{k(m)}$ sont des fonctions intégrables sur E ;
- b) la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur E vers f ;
- c) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $|f_{k(m)}| \leq |f_{k(1)}| + F \in L^1(E)$, la majoration ayant lieu pp sur E .

En effet, il en résulte que f est intégrable sur E et que $\|f_{k(m)} - f\| \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$. Au total, la sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur E vers f et converge dans $L^1(E)$ vers f , ce qui suffit.

Pour $L^2(E)$, le théorème de la convergence majorée permet aussi de conclure. Pour tout $p \in]0, 2[$,

- a) $|f_{k(p)} - f_{k(m)}|^2$ est intégrable sur E pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;

b) la suite $(|f_{k(p)} - f_{k(m)}|^2)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge *pp* sur E vers $|f_{k(p)} - f|^2$;
 c) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $|f_{k(p)} - f_{k(m)}|^2 \leq F$ *pp* sur E avec $F \in L^1(E)$.
 Dès lors, d'une part, la fonction $f_{k(p)} - f$ appartient à $L^2(E)$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que $\|f_r - f_s\| \leq \varepsilon$ pour tous $r, s > M$ donc tel que $\|f_{k(p)} - f\| \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq M$. D'où la conclusion.

b) Considérons le cas de $L^\infty(E)$.

Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $L^\infty(E)$, désignons par N l'union des ensembles des points x de E

a) où un au moins des f_m n'est pas défini;

b) où, pour $p, q \in \mathbb{N}_0$, les fonctions f_p et f_q sont définies mais telles que

$$|f_p(x) - f_q(x)| > \|f_p - f_q\|;$$

c) où, pour $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_m est définie mais tel que $|f_m(x)| > \|f_m\|$. Cet ensemble N est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_m est définie sur $E \setminus N$ et la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est uniformément bornée et uniformément de Cauchy sur $E \setminus N$. Si f désigne la limite de cette suite, f est une fonction bornée sur $E \setminus N$ et la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur $E \setminus N$ vers f . Cela étant, on a bien sûr $f \in L^\infty(E)$ et $f_m \rightarrow f$ dans $L^\infty(E)$. ■

Remarque. Ainsi la suite $(\chi_{I_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la remarque du début de ce paragraphe converge dans $L^{1,2}(\mathbb{R})$ vers 0 et ne converge en aucun point de $]0, 1]$ vers 0 mais contient une sous-suite qui converge *pp* vers 0 et même ponctuellement sur \mathbb{R} vers 0, à savoir la suite $(\chi_{]0, 2^{-k]})_{m \in \mathbb{N}_0}$. □

4.5 Premier théorème d'approximation

Théorème 4.5.1 (Premier théorème d'approximation) *Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n , tout $f \in L^{1,2}(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction α étagée dans Ω telle que $\|f - \alpha\| \leq \varepsilon$.*

Preuve. On sait qu'il existe une suite $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ d'ensembles étagés et d'adhérence compacte incluse dans Ω qui croissent vers Ω : on prend, par exemple, pour Q_m l'union des semi-intervalles du quadrillage décimal à 10^{-m} qui sont inclus dans la boule de rayon 10^m (pour n'en avoir qu'un nombre fini) et dont l'adhérence est incluse dans Ω .

Si nous posons

$$f_m = f \chi_{\{x \in Q_m : |f(x)| \leq m\}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

la suite

$$(|f - f_m|)_{m \in \mathbb{N}_0} \quad (\text{resp. } (|f - f_m|^2)_{m \in \mathbb{N}_0})$$

vérifie les conditions d'application du théorème de la convergence majorée

- a) elle est constituée de fonctions mesurables sur Ω ;
- b) elle converge *pp* sur Ω vers 0;
- c) elle est majorée *pp* sur Ω par

$$|f| \in L^1(\Omega) \quad (\text{resp. } |f|^2 \in L^1(\Omega))$$

comme on le vérifie de suite.

Dès lors, il existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|f - f_{m_0}\| \leq \varepsilon/2$. Comme cette fonction f_{m_0} est mesurable sur \mathbb{R}^n , elle est limite *pp* sur \mathbb{R}^n d'une suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées sur \mathbb{R}^n . Cela étant, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, posons

$$\alpha_k = \beta_k \chi_{Q_{m_0} \cap \{x: |\beta_k(x)| \leq m_0 + 1\}}.$$

Bien sûr, ces fonctions α_k sont étagées dans \mathbb{R}^n et à support inclus dans l'adhérence de Q_{m_0} donc sont étagées dans Ω .

Cela étant, la suite

$$(|f_{m_0} - \alpha_k|)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad (\text{resp. } (|f_{m_0} - \alpha_k|^2)_{k \in \mathbb{N}_0})$$

vérifie les conditions d'application du théorème de la convergence majorée

- a) elle est constituée de fonctions mesurables sur Ω ;
- b) elle converge *pp* sur Ω vers 0 car, en tout point $x \in \Omega$ tel que $\beta_k(x) \rightarrow f_{m_0}(x)$ (c'est-à-dire en presque tout point de Ω), on a aussi $|\alpha_k(x)| \leq m_0 + 1$ pour k suffisamment grand;
- c) elle est majorée *pp* sur Ω par

$$(2m_0 + 1) \chi_{Q_{m_0}} \in L^1(\Omega) \quad (\text{resp. } (2m_0 + 1)^2 \chi_{Q_{m_0}} \in L^1(\Omega)).$$

Dès lors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|f_{m_0} - \alpha_{k_0}\| \leq \varepsilon/2$ donc tel que

$$\|f - \alpha_{k_0}\| \leq \|f - f_{m_0}\| + \|f_{m_0} - \alpha_{k_0}\| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

Remarque. a) On trouve au paragraphe 5.10.1 un deuxième théorème d'approximation dans $L^{1,2}(\Omega)$.

b) Il n'existe pas de résultat analogue dans $L^\infty(\Omega)$. De fait, pour toute fonction α étagée dans Ω , il existe un semi-intervalle I dans Ω qui est disjoint du support de α , ce qui entraîne $\|\chi_I - \alpha\| \geq 1$.

c) On peut améliorer le théorème précédent de la manière suivante *si, en outre, il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors on peut exiger avoir en plus $|\alpha(x)| \leq C$ en tout $x \in \Omega$. Il suffit en effet de remplacer α par β où β est défini par*

$$\beta(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } |\alpha(x)| \leq C \\ Ce^{i \arg(\alpha(x))} & \text{si } |\alpha(x)| > C. \end{cases}$$

En effet, β est bien sûr une fonction étagée dans Ω telle que

$$|f(x) - \beta(x)| \leq |f(x) - \alpha(x)| \text{ pp sur } \Omega. \square$$

Voici une application importante du premier théorème d'approximation. Sa preuve montre bien comment on peut procéder pour obtenir des propriétés de $L^{1,2}(\Omega)$ à partir des propriétés correspondantes, valables pour les fonctions étagées.

Théorème 4.5.2 *Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n et tout $f \in L^{1,2}(\Omega)$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(f\chi_\Omega)(\cdot + h)\chi_\Omega(\cdot) - f(\cdot)\| = 0.$$

En particulier, pour tout $f \in L^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\| = 0.$$

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir le cas particulier.

Établissons tout d'abord ce résultat dans le cas où f est la fonction caractéristique d'un semi-intervalle I dans \mathbb{R}^n . De fait, pour toute suite $(h_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ tendant vers 0 dans \mathbb{R}^n , une application directe du théorème de la convergence majorée à la suite

$$(|\chi_I(x + h_m) - \chi_I(x)|)_{m \in \mathbb{N}_0} \quad (\text{resp. } (|\chi_I(x + h_m) - \chi_I(x)|^2)_{m \in \mathbb{N}_0})$$

établit qu'on a $\|\chi_I(x + h_m) - \chi_I(x)\| \rightarrow 0$, ce qui suffit.

Passons à présent au cas général. Soit h_m une suite de \mathbb{R}^n qui converge vers 0 et soit $\varepsilon > 0$. Vu le premier théorème d'approximation, il existe une fonction α étagée dans \mathbb{R}^n telle que $\|f - \alpha\| \leq \varepsilon/3$. Vu le théorème de changement de variable, on a alors

$$\|f(x + h) - \alpha(x + h)\| = \|f - \alpha\| \leq \varepsilon/3, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

La conclusion résulte alors aussitôt de la première partie de cette preuve car on a

$$\begin{aligned} \|f(x + h_m) - f(x)\| &\leq \|f(x + h_m) - \alpha(x + h_m)\| + \|\alpha(x + h_m) - \alpha(x)\| + \|f - \alpha\| \\ &\leq \|\alpha(x + h_m) - \alpha(x)\| + 2\varepsilon/3 \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. ■

Remarque. Il n'existe évidemment pas de résultat analogue dans $L^\infty(\Omega)$. □

Chapitre 5

Produit de convolution

Convention. Dans tout ce chapitre, J désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

5.1 Définition et généralités

Définitions. Des fonctions mesurables f_1, \dots, f_J sur \mathbb{R}^n sont *convolables* (on dit aussi *composables*) si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_1(y_1) \cdots f_{J-1}(y_{J-1}) f_J(x - y_1 - \cdots - y_{J-1})$$

est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n(J-1)}$. Dans ce cas, on appelle *produit de convolution* (ou encore *produit de composition*) de f_1, \dots, f_J , la fonction $f_1 \star \cdots \star f_J$ définie pp sur \mathbb{R}^n par

$$(f_1 \star \cdots \star f_J)(x) = \int_{\mathbb{R}^{n(J-1)}} f_1(y_1) \cdots f_{J-1}(y_{J-1}) f_J(x - y_1 - \cdots - y_{J-1}) dy_1 \cdots dy_{J-1}.$$

Remarque. *On peut établir que si f_1, \dots, f_J sont des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n , alors la fonction $f_1(y_1) \cdots f_{J-1}(y_{J-1}) f_J(x - y_1 - \cdots - y_{J-1})$ est mesurable sur \mathbb{R}^{nJ} pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il suffit évidemment de prouver que $f_J(x - y_1 - \cdots - y_{J-1})$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^{nJ} . Or il existe une suite α_m de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n et une partie négligeable N de \mathbb{R}^n telle que $\alpha_m(z) \rightarrow f_J(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Cela étant, on note que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_m(x - y_1 - \cdots - y_{J-1})$ est une fonction borélienne donc mesurable sur \mathbb{R}^{nJ} car, pour tout semi-intervalle $I =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$ dans \mathbb{R}^n , $\chi_I(x - y_1 - \cdots - y_{J-1})$ est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{(x, y_1, \dots, y_{J-1}) : a_k < x_k - y_{1,k} - \cdots - y_{J-1,k} \leq b_k, (k \leq n)\}.$$

D'autre part, l'ensemble

$$N' = \{(x, y_1, \dots, y_{J-1}) : x - y_1 - \cdots - y_{J-1} \in N\}$$

est une partie négligeable de \mathbb{R}^{nJ} car, pour tous $y_1, \dots, y_{J-1} \in \mathbb{R}^n$, sa section est égale à $y_1 + \dots + y_{J-1} + N$ donc est une partie négligeable de \mathbb{R}^n . D'où la conclusion car on a bien sûr

$$\alpha_m(x - y_1 - \dots - y_{J-1}) \rightarrow f_J(x - y_1 - \dots - y_{J-1})$$

pour tout $(x, y_1, \dots, y_{J-1}) \in \mathbb{R}^{nJ} \setminus N'.$ *□

Proposition 5.1.1 *Si f_1, \dots, f_J sont des fonctions convolables sur \mathbb{R}^n , alors $f_1 \star \dots \star f_J$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n .*

Preuve. C'est en fait un cas particulier du résultat général suivant.■

Théorème 5.1.2 *Si $f(x, y)$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^{n+p} et intégrable sur \mathbb{R}^p pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n .*

Preuve. Soit $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ (resp. $(P_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$) une suite d'ensembles étagés dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^p), emboîtés en croissant et d'union égale à \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^p). Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_m = f \chi_{Q_m \times P_m} \chi_{\{(x,y): |f(x,y)| \leq m\}}.$$

Bien sûr, chacune de ces fonctions f_m est intégrable sur \mathbb{R}^{n+p} . Dès lors, vu le théorème de Fubini,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^p} f_m(x, y) dy \right)_{m \in \mathbb{N}_0},$$

est une suite de fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n . Or, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0, y)$ soit intégrable sur \mathbb{R}^p (c'est-à-dire pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$), on a bien sûr

$$\int_{\mathbb{R}^p} f_m(x_0, y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^p} f(x_0, y) dy$$

par application du théorème de la convergence majorée. D'où la conclusion.■

5.2 Propriétés générales

Proposition 5.2.1 *Si les fonctions mesurables f_1, \dots, f_J sur \mathbb{R}^n sont convolables alors, pour toute permutation ν_1, \dots, ν_J de $1, \dots, J$, les fonctions $f_{\nu_1}, \dots, f_{\nu_J}$ sont convolables et on a*

$$f_1 \star \dots \star f_J = f_{\nu_1} \star \dots \star f_{\nu_J} \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Toute permutation de $1, \dots, J$ résultant du produit d'un nombre fini de transpositions, il suffit d'établir qu'on peut permuter f_j et f_k .

Si les entiers j et k sont strictement inférieurs à J , c'est trivial vu la définition du produit de convolution.

Si on a $j < k$ et $k = J$, le changement de variable linéaire

$$\begin{cases} z_l = y_l & \text{si } l \neq j \\ z_j = x - y_1 - \dots - y_{j-1} \end{cases}$$

permet de conclure aussitôt. ■

Proposition 5.2.2 *Si l'entier K vérifie $1 \leq K < J$ et si les fonctions mesurables f_1, \dots, f_J sur \mathbb{R}^n sont convolables de même que les fonctions f_1, \dots, f_K et les fonctions f_{K+1}, \dots, f_J , alors les fonctions $f_1 \star \dots \star f_K$ et $f_{K+1} \star \dots \star f_J$ sont convolables sur \mathbb{R}^n et on a*

$$f_1 \star \dots \star f_J = (f_1 \star \dots \star f_K) \star (f_{K+1} \star \dots \star f_J) \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Dans la définition de $f_1 \star \dots \star f_J$, effectuons le changement de variable linéaire

$$\begin{cases} z_j = y_j & \text{si } j \neq K \\ z_K = y_1 + \dots + y_K. \end{cases}$$

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on obtient alors

$$\begin{aligned} (f_1 \star \dots \star f_J)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n(J-1)}} f_1(z_1) \cdots f_{K-1}(z_{K-1}) f_K(z_K - z_1 - \dots - z_{K-1}) \\ &\quad f_{K+1}(z_{K+1}) \cdots f_{J-1}(z_{J-1}) \\ &\quad f_J(x - z_K - \dots - z_{J-1}) dz_1 \cdots dz_{J-1}. \end{aligned}$$

Vu le théorème de Fubini, on peut intégrer dans n'importe quel ordre. Cela étant, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} (f_1 \star \dots \star f_J)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} dz_K \left(\int_{\mathbb{R}^{n(K-1)}} f_1(z_1) \cdots f_{K-1}(z_{K-1}) \right. \\ &\quad \left. f_K(z_K - z_1 - \dots - z_{K-1}) dz_1 \cdots dz_{K-1} \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{\mathbb{R}^{n(J-K-1)}} f_{K+1}(z_{K+1}) \cdots f_{J-1}(z_{J-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. f_J(x - z_K - \dots - z_{J-1}) dz_{K+1} \cdots dz_{J-1} \right) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 \star \dots \star f_K)(z_K) \cdot (f_{K+1} \star \dots \star f_J)(x - z_K) dz_K \\ &= ((f_1 \star \dots \star f_K) \star (f_{K+1} \star \dots \star f_J))(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque. Dans l'énoncé précédent, l'hypothèse que f_1, \dots, f_K soient convolables de même que f_{K+1}, \dots, f_J est indispensable. De fait, si f_1 et f_2 sont des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n , alors f_1, f_2 et $f_3 = 0$ sont convolables sur \mathbb{R}^n mais ceci n'implique nullement que f_1 et f_2 soient convolables sur \mathbb{R}^n . \square

Proposition 5.2.3 *Les fonctions mesurables f_1, \dots, f_J sur \mathbb{R}^n sont convolables si et seulement si $|f_1|, \dots, |f_J|$ sont convolables sur \mathbb{R}^n , auquel cas on a*

$$|f_1 \star \dots \star f_J| \leq |f_1| \star \dots \star |f_J| \text{ pp sur } \mathbb{R}^n. \blacksquare$$

Ces deux dernières propriétés permettent d'établir l'important résultat suivant de convolabilité de proche en proche.

Critère 5.2.4 *Si f_1, \dots, f_J sont des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n et si les produits de convolution*

$$|f_1| \star |f_2|, (|f_1| \star |f_2|) \star |f_3|, \dots$$

existent, alors f_1, \dots, f_J sont convolables et on a

$$f_1 \star \dots \star f_J = (\dots (f_1 \star f_2) \star \dots) \star f_J \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Procédons par récurrence.

Le cas $J = 2$ est trivial.

Supposons la propriété établie pour $J = 2, \dots, K$ et considérons le cas $J = K+1$. Vu la récurrence, nous savons que les fonctions $|f_1|, \dots, |f_K|$ sont convolables, de même que les fonctions $|f_1| \star \dots \star |f_K|$ et $|f_{K+1}|$. De plus les fonctions $|f_1|, \dots, |f_{K+1}|$ sont convolables: pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$|f_1(y_1)| \cdots |f_K(y_K)| |f_{K+1}(x - y_1 - \dots - y_K)|$$

est mesurable sur \mathbb{R}^{nK} et, par le changement de variable linéaire

$$\begin{cases} z_j &= y_j \text{ si } j < K \\ z_K &= y_1 + \dots + y_K \end{cases}$$

dont le module du jacobien est égal à $\chi_{\mathbb{R}^n}$, elle devient

$$|f_1(z_1)| \cdots |f_K(z_K - z_1 - \dots - z_{K-1})| |f_{K+1}(x - z_K)|,$$

c'est-à-dire une fonction intégrable sur \mathbb{R}^{nK} . D'où la conclusion au moyen des deux propriétés précédentes. \blacksquare

Proposition 5.2.5 *Si on a $L \in \mathbb{N}_0$ ainsi que $c_1, \dots, c_L \in \mathbb{C}$ et si, pour $l = 1, \dots, L$, les fonctions mesurables $f_1, \dots, f_{j,l}, \dots, f_J$ sur \mathbb{R}^n sont convolables, alors les fonctions $f_1, \dots, \sum_{l=1}^L c_l f_{j,l}, \dots, f_J$ sont convolables et on a*

$$f_1 \star \dots \star \sum_{l=1}^L c_l f_{j,l} \star \dots \star f_J = \sum_{l=1}^L c_l f_1 \star \dots \star f_{j,l} \star \dots \star f_J \text{ pp sur } \mathbb{R}^n. \blacksquare$$

Proposition 5.2.6 *Si les fonctions mesurables f_1, \dots, f_J sur \mathbb{R}^n sont convolables, alors, pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, les fonctions*

$$g_j(x) = e^{\sum_{k=1}^n c_k x_k} \cdot f_j(x), \quad (j \leq J)$$

sont convolables et on a

$$(g_1 \star \dots \star g_J)(x) = e^{\sum_{k=1}^n c_k x_k} \cdot (f_1 \star \dots \star f_J)(x) \text{ pp sur } \mathbb{R}^n. \blacksquare$$

Preuve. C'est une conséquence directe de la propriété fondamentale de l'exponentielle. \blacksquare

Notations. Etant donné une fonction f définie pp sur \mathbb{R}^n , introduisons deux fonctions auxiliaires qui vont nous permettre d'exprimer plus aisément certaines propriétés de f . Nous désignons par

- \tilde{f} la fonction définie pp sur \mathbb{R}^n par $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(-x)$ soit défini,
- f^* la fonction définie pp sur \mathbb{R}^n par $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(-x)$ soit défini.

On a donc $f^* = \overline{\tilde{f}} = \tilde{\overline{f}}$ pp sur \mathbb{R}^n . De plus, f est continu, dérivable, mesurable, intégrable, ... sur \mathbb{R}^n si et seulement s'il en est de même pour \tilde{f} (resp. \overline{f} ; f^*).

Proposition 5.2.7 *Si les fonctions mesurables f_1, \dots, f_J sur \mathbb{R}^n sont convolables, alors*

- a) $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_J}$ sont convolables sur \mathbb{R}^n
- b) $\tilde{f_1}, \dots, \tilde{f_J}$ sont convolables sur \mathbb{R}^n
- c) f_1^*, \dots, f_J^* sont convolables sur \mathbb{R}^n

et on a

$$\begin{aligned} \overline{f_1 \star \dots \star f_J} &= (f_1 \star \dots \star f_J) \overline{} \\ \tilde{f_1 \star \dots \star f_J} &= (f_1 \star \dots \star f_J) \tilde{} \\ f_1^* \star \dots \star f_J^* &= (f_1 \star \dots \star f_J)^* \end{aligned}$$

Preuve. Pour simplifier les écritures, établissons le cas $J = 2$.

Pour $\overline{f_1 \star f_2}$, la propriété est immédiate vu la définition du produit de convolution.

Pour $\widetilde{f_1 \star f_2}$, on note par exemple qu'on a successivement

$$\begin{aligned} (f_1 \star f_2)^\sim(x) &= (f_1 \star f_2)(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) f_2(-x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) \widetilde{f_2}(x + y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(-y) \widetilde{f_2}(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f_1}(y) \widetilde{f_2}(x - y) dy = (\widetilde{f_1} \star \widetilde{f_2})(x). \end{aligned}$$

Pour $f_1^* \star f_2^*$, cela résulte aussitôt des deux cas précédents. ■

5.3 Cas fondamentaux

Définition. Dans un *triplet* (p, q, r) , p , q et r désignent des éléments de $[1, +\infty[\cup\{\infty\}$ liés par la relation $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ où on convient de poser $\frac{1}{\infty} = 0$. Les cas fondamentaux sont donnés par les triplets

$$(1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, \infty, \infty), (\infty, 1, \infty) \text{ et } (2, 2, \infty).$$

Ces triplets permettent de retenir aisément des cas d'existence du produit de convolution de deux fonctions ainsi que l'espace auquel ce produit appartient. *On peut établir le résultat général suivant: étant donné $f \in L^p$ et $g \in L^q$,

- les fonctions f et g sont convolables,
- le produit de convolution $f \star g$ appartient à L^r et donne lieu à la majoration $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$,
- on peut s'attendre à des propriétés supplémentaires telles que l'appartenance de $f \star g$ à $C_0(\mathbb{R}^n)$ si $r = \infty$.*

Dans ce qui suit, nous allons nous limiter à l'étude de cas fondamentaux.

5.3.1 Le cas $L^1 \star L^1$

Théorème 5.3.1 Pour tous $f, g \in L^1$,

- f et g sont convolables,
- $f \star g$ appartient à L^1 ,
- on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \star g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g dx$$

et

$$\|f \star g\| \leq \|f\| \cdot \|g\| .$$

Preuve. Nous savons que $f(y)g(x-y)$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^{2n} . De plus, pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, $|f(y)g(x-y)|$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dx &= |f(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx \\ &= |f(y)| \cdot \|g\| \end{aligned}$$

(on obtient la dernière égalité en recourant au changement de variable linéaire $z = x - y$) où le dernier membre appartient à L^1 . Dès lors, par le théorème de Tonelli, la fonction $f(y)g(x-y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{2n} . Cela étant, vu le théorème de Fubini,

- a) $f(y)g(x-y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,
- b) $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy$ est intégrable sur \mathbb{R}^n ,
- c) on a successivement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \star g)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(x-y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(z) dz \end{aligned}$$

(on obtient la dernière égalité en recourant au changement de variable linéaire $z = x - y$). Enfin, comme $|f|$ et $|g|$ appartiennent à L^1 , ils sont convolables et on a $|f \star g| \leq |f| \star |g|$ pp sur \mathbb{R}^n donc

$$\|f \star g\| = \int_{\mathbb{R}^n} |f \star g| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \star |g| dx = \|f\| \cdot \|g\| . \blacksquare$$

Proposition 5.3.2 On a

$$(f_m \xrightarrow{L^1} f \ \& \ g_m \xrightarrow{L^1} g) \Rightarrow f_m \star g_m \xrightarrow{L^1} f \star g .$$

Preuve. De fait, de

$$f_m \star g_m - f \star g = f_m \star (g_m - g) + (f_m - f) \star g ,$$

on tire de suite

$$\|f_m \star g_m - f \star g\| \leq \|f_m\| \cdot \|g_m - g\| + \|f_m - f\| \cdot \|g\|$$

où la majorante converge vers 0 si $m \rightarrow \infty$ puisque la suite $\|f_m\|$ converge vers $\|f\|$ donc est bornée. \blacksquare

Proposition 5.3.3 *Si f_1, \dots, f_J appartiennent à L^1 , ils sont convolables. De plus, leur produit de convolution est associatif et commutatif, il appartient à L^1 et on a*

$$\|f_1 \star \dots \star f_J\| \leq \|f_1\| \cdots \|f_J\| \quad \blacksquare$$

5.3.2 Le cas $L^1 \star L^2$

Théorème 5.3.4 *Pour tout $f \in L^1$ et tout $g \in L^2$,*

- a) *f et g sont convolables,*
- b) *$f \star g$ appartient à L^2 ,*
- c) *on a*

$$\|f \star g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Preuve. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(y)g(x-y)$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n telle que

$$|f(y)g(x-y)| = |f(y)|^{1/2} \cdot \left(|f(y)|^{1/2} |g(x-y)| \right).$$

Pour conclure, il suffit alors de noter que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, le second membre de cette dernière égalité appartient à L^1 , comme produit de deux éléments de L^2 (pour $|f(y)|^{1/2}$, c'est clair; pour $|f(y)|^{1/2} |g(x-y)|$, il suffit de remarquer qu'il s'agit d'une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n dont le carré $|f(y)| |g^2(x-y)|$ appartient à L^1 pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, vu le cas $L^1 \star L^1$).

b) Cela étant, nous savons déjà que $f \star g$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n . Pour conclure, il suffit alors de noter que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a successivement

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x)|^2 &\leq (|f| \star |g|)(x)^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{1/2} \cdot \left(|f(y)|^{1/2} |g(x-y)| \right) dy \right)^2 \\ &\leq \|f\| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g^2(x-y)| dy \\ &\leq \|f\| \cdot (|f| \star |g^2|)(x) \end{aligned}$$

où le dernier membre appartient à L^1 (pour obtenir la troisième majoration, on a appliqué la formule de Schwarz).

- c) En intégrant l'inégalité obtenue en b), il vient en effet

$$\|f \star g\|^2 \leq \|f\| \cdot \|f\| \cdot \|g^2\|_1$$

en recourant au cas $L^1 \star L^1$ alors qu'on a bien sûr $\|g^2\|_1 = \|g\|_2^2$. \blacksquare

Proposition 5.3.5 *On a*

$$(f_m \xrightarrow{L^1} f \ \& \ g_m \xrightarrow{L^2} g) \Rightarrow f_m \star g_m \xrightarrow{L^2} f \star g. \blacksquare$$

Proposition 5.3.6 *Si f_1, \dots, f_{J-1} appartiennent à L^1 et f_J à L^2 , ils sont convolables. De plus, leur produit de convolution est associatif et commutatif, il appartient à L^2 et on a*

$$\|f_1 \star \dots \star f_J\| \leq \|f_1\| \cdots \|f_J\|. \blacksquare$$

5.3.3 Le cas $L^1 \star L^\infty$

Théorème 5.3.7 *Pour tout $f \in L^1$ et tout $g \in L^\infty$,*

- a) $f(y)g(x-y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; en particulier, f et g sont convolables,
- b) $f \star g$ appartient à L^∞ ,
- c) on a

$$\|f \star g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Preuve. a) est immédiat car, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $g(x-y)$ appartient à L^∞ .

b) et c). De fait, $f \star g$ est alors une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a bien sûr

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \blacksquare$$

Proposition 5.3.8 *On a*

$$\left(f_m \xrightarrow{L^1} f \ \& \ g_m \xrightarrow{L^\infty} g \right) \Rightarrow f_m \star g_m \xrightarrow{L^\infty} f \star g. \blacksquare$$

Proposition 5.3.9 *Si f_1, \dots, f_{J-1} appartiennent à L^1 et f_J à L^∞ , alors f_1, \dots, f_J sont convolables. De plus, leur produit de convolution est associatif et commutatif, il appartient à L^∞ et on a*

$$\|f_1 \star \dots \star f_J\| \leq \|f_1\| \cdots \|f_J\|. \blacksquare$$

Dans le cas $L^1 \star L^\infty$, on peut améliorer fortement la connaissance de $f \star g$.

Théorème 5.3.10 *Pour tout $f \in L^1$ et tout $g \in L^\infty$, $f \star g$ est une fonction uniformément continue sur \mathbb{R}^n .*

Si, de plus, on a $\|g\chi_{\{x: |x| \geq R\}}\|_\infty \rightarrow 0$ si $R \rightarrow \infty$, alors $f \star g$ tend vers 0 à l'infini.

Preuve. D'une part, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+h-y) - f(x-y)) \cdot g(y) dy \right| \\ &\leq \|g\| \cdot \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|, \end{aligned}$$

d'où la continuité uniforme de $f \star g$ sur \mathbb{R}^n en recourant à une des conséquences du premier théorème d'approximation.

D'autre part, si en outre g tend vers 0 *pp* à l'infini, établissons que $f \star g$ tend vers 0 à l'infini. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $R > 0$, on a

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x)| &\leq \int_{|y| \leq R} |f(x-y)| |g(y)| dy + \int_{|y| \geq R} |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \|g\| \cdot \|f\chi_{\{|x-t| \leq R\}}\|_1 + \|f\| \cdot \|g\chi_{\{|t| \geq R\}}\|_\infty. \end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut d'abord fixer $R_0 > 0$ tel que

$$\|g\chi_{\{|t| \geq R_0\}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|)}$$

puis remarquer que, pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ tendant vers l'infini dans \mathbb{R}^n , une application directe du théorème de la convergence majorée à la suite

$$(f_m = f\chi_{\{|x_m-t| \leq R_0\}})_{m \in \mathbb{N}_0}$$

donne $\|f_m\|_1 \rightarrow 0$. Cela étant, il existe $R_1 > 0$ tel que

$$\|f\chi_{\{|x-t| \leq R_0\}}\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|g\|)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| \geq R_1$. D'où la conclusion car on a alors $|(f \star g)(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| \geq R_1$. ■

5.3.4 Le cas $L^2 \star L^2$

Théorème 5.3.11 *Pour tous $f, g \in L^2$,*

- $f(y)g(x-y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; en particulier, f et g sont convolables,
- $f \star g$ appartient à L^∞ ,
- on a

$$\|f \star g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Preuve. a) est immédiat car, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $g(x - y)$ appartient à L^2 .

b) et c). De fait, $f \star g$ est alors une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a bien sûr

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

en recourant à l'inégalité de Schwarz et au théorème de changement de variable. ■

Proposition 5.3.12 *On a*

$$\left(f_m \xrightarrow{L^2} f \ \& \ g_m \xrightarrow{L^2} g \right) \Rightarrow f_m \star g_m \xrightarrow{L^\infty} f \star g. \blacksquare$$

Proposition 5.3.13 *Si f_1, \dots, f_{J-1} appartiennent à L^1 et f_J et f_{J+1} à L^2 , alors f_1, \dots, f_{J+1} sont convolables. De plus, leur produit de convolution est associatif et commutatif, il appartient à L^∞ et on a*

$$\|f_1 \star \dots \star f_{J+1}\| \leq \|f_1\| \cdots \|f_{J+1}\| \blacksquare$$

Dans le cas $L^2 \star L^2$, on peut améliorer fortement la connaissance de $f \star g$.

Théorème 5.3.14 *Pour tous $f, g \in L^2$, $f \star g$ est une fonction uniformément continue sur \mathbb{R}^n et tend vers 0 à l'infini.*

Preuve. D'une part, $f \star g$ est uniformément continu sur \mathbb{R}^n car, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a bien sûr

$$|(f \star g)(x + h) - (f \star g)(x)| \leq \|f\| \cdot \|g(\cdot + h) - g(\cdot)\|.$$

D'autre part, établissons que $f \star g$ tend vers 0 à l'infini. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $R > 0$, on a bien sûr

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x)| &\leq \int_{|y| \leq R} |f(y)| |g(x - y)| dy + \int_{|y| \geq R} |f(y)| |g(x - y)| dy \\ &\leq \|f\| \cdot \|g \chi_{\{t: |x-t| \leq R\}}\|_2 + \|f \chi_{\{t: |t| \geq R\}}\|_2 \cdot \|g\|. \end{aligned}$$

Or une première application du théorème de la convergence majorée établit que

$$\|f \chi_{\{t: |t| \geq R\}}\|_2 \rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow \infty$$

et une deuxième que, pour tout $R_0 > 0$, on a

$$\|g \chi_{\{t: |x-t| \leq R_0\}}\|_2 \rightarrow 0 \text{ si } |x| \rightarrow \infty.$$

La conclusion est alors immédiate. ■

5.4 Support presque partout

5.4.1 Définition et généralités

Définition. Un ouvert d'annulation *pp* d'une fonction f définie *pp* sur \mathbb{R}^n est un ouvert de \mathbb{R}^n où f est nul *pp*.

Proposition 5.4.1 Toute union d'ouverts d'annulation *pp* d'une fonction f définie *pp* sur \mathbb{R}^n est un ouvert d'annulation *pp* de f .

Preuve. De fait, si le compact K est inclus dans une union d'ouverts d'annulation *pp* de f , il est inclus dans une union finie de ces ouverts. Il s'ensuit que l'ensemble des points de K où f diffère de 0 est négligeable. D'où la conclusion car tout ouvert de \mathbb{R}^n est union dénombrable de compacts. ■

Définition. Cela étant, on peut introduire les notions suivantes

- a) l'ouvert d'annulation *pp* d'une fonction f définie *pp* sur \mathbb{R}^n est l'union de tous les ouverts d'annulation *pp* de f . Il s'agit d'un ouvert d'annulation *pp* de f .
- b) le support *pp* d'une fonction f définie *pp* sur \mathbb{R}^n est le complémentaire de son ouvert d'annulation *pp* dans \mathbb{R}^n ; il est noté indifféremment

$$\text{supp}_{pp}(f) \text{ ou } \ell\text{-supp}(f).$$

Remarque. Pour toute fonction f définie *pp* sur \mathbb{R}^n , on a évidemment

$$f = f \chi_{\text{supp}_{pp}(f)} \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Proposition 5.4.2 Pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, les supports $\text{supp}_{pp}(f)$ et $\text{supp}(f)$ sont égaux.

Preuve. De fait, un ouvert de \mathbb{R}^n est d'annulation *pp* pour $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si c'est un ouvert d'annulation de f . ■

5.4.2 Combinaison linéaire de parties de \mathbb{R}^n

Définition. Etant donné un entier $J \in \mathbb{N}_0$, des coefficients réels r_1, \dots, r_J et des parties non vides A_1, \dots, A_J de \mathbb{R}^n , la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^J r_j A_j$ est la partie suivante de \mathbb{R}^n

$$\sum_{j=1}^J r_j A_j = \left\{ \sum_{j=1}^J r_j x_j : x_1 \in A_1, \dots, x_J \in A_J \right\}.$$

Remarque. Notre but ici n'est pas de développer la théorie de la combinaison linéaire de parties de \mathbb{R}^n mais uniquement de dégager les résultats qui nous sont indispensables dans la suite. \square

Proposition 5.4.3 Dans \mathbb{R}^n ,

- a) toute combinaison linéaire de bornés est bornée;
- b) toute combinaison linéaire de parties toutes compactes sauf une au plus qui est fermée, est fermée;
- c) toute combinaison linéaire de compacts est compacte.

Preuve. a) Si, avec les notations introduites dans la définition précédente, on a

$$\sup \{ |x| : x \in A_j \} = C_j < \infty, \forall j \leq J,$$

alors il vient bien sûr

$$\left| \sum_{j=1}^J r_j x_j \right| \leq \sum_{j=1}^J r_j C_j$$

pour tous $x_1 \in A_1, \dots, x_J \in A_J$.

b) On vérifie directement que

- i) pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout fermé non vide F de \mathbb{R}^n , rF est un fermé non vide de \mathbb{R}^n ,
- ii) pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout compact non vide K de \mathbb{R}^n , rK est un compact non vide de \mathbb{R}^n .

Cela étant, une récurrence aisée établit qu'il suffit de prouver que, si K et F sont non vides et respectivement compact et fermé dans \mathbb{R}^n , alors $K + F$ est fermé. Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $K + F$ qui converge dans \mathbb{R}^n vers x_0 . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $y_m \in K$ et $z_m \in F$ tels que $x_m = y_m + z_m$. Cela étant, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$, on peut extraire une sous-suite $(y_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui converge vers un point y_0 de K . Dès lors, la sous-suite $(z_{k(m)} = x_{k(m)} - y_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite $(z_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans \mathbb{R}^n vers $x_0 - y_0$ et cette limite appartient à F . D'où la conclusion car on a alors $x_0 = y_0 + (x_0 - y_0) \in K + F$.

c) est une conséquence directe de a) et b). \blacksquare

Remarque. La somme de deux fermés de \mathbb{R}^n peut ne pas être fermée. C'est le cas pour les fermés $F_1 = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$ et $F_2 = \{ (x, y) : xy = 1 \}$ dont la somme est égale à $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$. \square

5.4.3 Support pp d'un produit de convolution

Proposition 5.4.4 Si f et g sont des fonctions mesurables et convolables dans \mathbb{R}^n , on a

$$\text{supp}_{pp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}_{pp}(f) + \text{supp}_{pp}(g)}.$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il est clair qu'on a

$$\begin{aligned} f(y) \cdot g(x-y) &= f(y)g(x-y) \cdot \chi_{\text{supp}_{pp}(f)}(y)\chi_{\text{supp}_{pp}(g)}(x-y) \\ &= f(y)g(x-y)\chi_{\text{supp}_{pp}(f) \cap (x-\text{supp}_{pp}(g))}(y) \end{aligned}$$

pp sur \mathbb{R}^n avec

$$\text{supp}_{pp}(f) \cap (x - \text{supp}_{pp}(g)) \neq \emptyset \iff x \in \text{supp}_{pp}(f) + \text{supp}_{pp}g.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{\text{supp}_{pp}f + \text{supp}_{pp}g}$$

est un ouvert d'annulation pour $f \star g$, ce qui suffit amplement. ■

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 5.4.5 *Soient f_1, \dots, f_J des fonctions mesurables et convolables sur \mathbb{R}^n . En recourant à la notation*

$$F = f_1(y_1) \cdots f_{J-1}(y_{J-1})f_J(x - y_1 - \cdots - y_{J-1}),$$

il vient

a) *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$F = f_1(y_1) \cdots f_{J-1}(y_{J-1}) \left(f_J \chi_{x - \sum_{j=1}^{J-1} \text{supp}_{pp}(f_j)} \right) (x - y_1 - \cdots - y_{J-1})$$

pp sur $\mathbb{R}^{n(J-1)}$;

b) $f_1 \star \cdots \star f_J = \int_{\text{supp}_{pp}(f_1)} dy_1 \cdots \int_{\text{supp}_{pp}(f_{J-1})} F dy_{J-1}$ *pp sur \mathbb{R}^n ;*

c) $\text{supp}_{pp}(f_1 \star \cdots \star f_J) \subset \overline{\sum_{j=1}^J \text{supp}_{pp}(f_j)}$.

En particulier, si f_1, \dots, f_J sont des fonctions mesurables et convolables sur \mathbb{R}^n et si les ensembles $\text{supp}_{pp}(f_1), \dots, \text{supp}_{pp}(f_J)$ sont compacts, alors

$$\text{supp}_{pp}(f_1 \star \cdots \star f_J) \subset \sum_{j=1}^J \text{supp}_{pp}(f_j). \blacksquare$$

5.5 Nouveaux cas d'existence

5.5.1 Espaces fonctionnels $L_{\text{comp}}^{1,2,\infty}(\Omega)$ et $L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega)$

Afin d'introduire de nouveaux cas d'existence du produit de convolution, nous introduisons les espaces de fonctions suivants.

Définition. Fixons $p \in \{1, 2, \infty\}$ et un ouvert Ω de \mathbb{R}^n .

L'espace $L_{\text{comp}}^p(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel de $L^p(\Omega)$ constitué par les éléments dont le support pp est un compact inclus dans Ω .

Remarque. Cette définition a un sens car deux fonctions définies pp sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n ont même support pp si elles sont égales pp . \square

Définition. Fixons $p \in \{1, 2, \infty\}$ et un ouvert Ω de \mathbb{R}^n .

L'espace $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ est constitué par les fonctions mesurables sur Ω dont la restriction à tout compact K inclus dans Ω appartient à $L^p(K)$. Ses éléments sont appelés les fonctions *localement intégrables sur Ω* (resp. *de carré localement intégrable sur Ω* ; *localement bornées pp sur Ω* si $p = 1$ (resp. $2; \infty$)).

On vérifie aussitôt que ces espaces vectoriels donnent lieu aux inclusions suivantes

$$\begin{array}{ccc} L_{\text{comp}}^{\infty}(\Omega) & \subset & L_{\text{comp}}^2(\Omega) & \subset & L_{\text{comp}}^1(\Omega) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ L^{\infty}(\Omega) & & L^2(\Omega) & & L^1(\Omega) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ L_{\text{loc}}^{\infty}(\Omega) & \subset & L_{\text{loc}}^2(\Omega) & \subset & L_{\text{loc}}^1(\Omega) \end{array}$$

pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n .

Si Ω est égal à \mathbb{R}^n , on supprime (Ω) dans toutes ces notations chaque fois que cela n'entraîne pas de confusion. Nous avons ainsi donné naissance aux notations

$$L_{\text{comp}}^1, L_{\text{comp}}^2, L_{\text{comp}}^{\infty}, L_{\text{loc}}^1, L_{\text{loc}}^2 \text{ et } L_{\text{loc}}^{\infty}.$$

5.5.2 Nouveaux produits de convolution

Au sein d'un même énoncé, les symboles p, q, r sont les éléments d'un des triplets suivants $(p, q, r) = (1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, \infty, \infty), (\infty, 1, \infty)$ ou $(2, 2, \infty)$.

Proposition 5.5.1 *Pour tout $f \in L_{\text{comp}}^p$ et tout $g \in L_{\text{comp}}^q$, les fonctions f et g sont convolables et on a $f \star g \in L_{\text{comp}}^r$.*

Preuve. C'est immédiat car on a $f \in L^p$ et $g \in L^q$ donc $f \star g \in L^r$ ainsi que

$$\text{supp}_{pp}(f \star g) \subset \text{supp}_{pp}(f) + \text{supp}_{pp}(g). \blacksquare$$

Remarque. a) En fait, ce dernier résultat n'est pas nouveau, il ne fait que mettre ensemble deux propriétés connues.

b) Etant donné $f \in L_{\text{loc}}^p$ et $g \in L_{\text{loc}}^q$, il n'est pas certain que f et g soient convolables: le cas $f = g = \chi_{\mathbb{R}^n}$ est particulièrement clair. \square

Pour obtenir de nouveaux cas d'existence du produit de convolution, il convient de considérer $f \in L^p_{\text{comp}}$ et $g \in L^q_{\text{loc}}$; les résultats sont très intéressants.

Théorème 5.5.2 *Pour tout $f \in L^p_{\text{comp}}$ et tout $g \in L^q_{\text{loc}}$,*

- f et g sont convolables et, dans le cas $r = \infty$, $f(y)g(x-y)$ est même intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;
- $f \star g$ appartient à L^r_{loc} et, dans le cas $r = \infty$, $f \star g$ est même une fonction continue sur \mathbb{R}^n ;
- pour tout compact K de \mathbb{R}^n , on a

$$\|f \star g\|_{L^r(K)} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q(K - \text{supp}_{pp}(f))}.$$

Preuve. Pour tout compact K de \mathbb{R}^n , on a bien sûr

$$g \chi_{K - \text{supp}_{pp}(f)} \in L^q.$$

De plus, pour tout $x \in K$, il vient

$$f(y)g(x-y) = f(y) \cdot \left(g \chi_{K - \text{supp}_{pp}(f)} \right) (x-y) \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Tout résulte alors des propriétés du cas $L^p \star L^q$ car, pour presque tout $x \in K$ et même pour tout $x \in K$ si $r = \infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = \left(f \star \left(g \chi_{K - \text{supp}_{pp}(f)} \right) \right) (x). \blacksquare$$

Définition. Une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ converge dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ vers f_0 si, pour tout compact K de \mathbb{R}^n , la suite $(f_m|_K)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans $L^p(K)$ vers $f_0|_K$, c'est-à-dire que

$$\|f_m - f_0\|_{L^p(K)} \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

On vérifie aussitôt que si une suite de L^p_{loc} converge, sa limite est unique.

Proposition 5.5.3 *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de L^p_{comp} converge dans L^p vers f_0 , si $\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{supp}_{pp}(f_m)$ est borné et si la suite g_m converge dans L^q_{loc} vers g_0 , alors la suite $f_m \star g_m$ converge dans L^r_{loc} vers $f_0 \star g_0$. ■*

Proposition 5.5.4 *Si les f_1, \dots, f_{J-1} appartiennent à L^1_{comp} et si*

- f_J appartient à L^1_{loc} , alors f_1, \dots, f_J sont convolables et $f_1 \star \dots \star f_J \in L^1_{\text{loc}}$.
- f_J appartient à L^2_{loc} , alors f_1, \dots, f_J sont convolables et $f_1 \star \dots \star f_J \in L^2_{\text{loc}}$.
- f_J appartient à L^∞_{loc} , alors f_1, \dots, f_J sont convolables et $f_1 \star \dots \star f_J \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

d) f_J appartient à L_{comp}^2 et f_{J+1} à L_{loc}^2 , alors f_1, \dots, f_{J+1} sont convolables et $f_1 \star \dots \star f_{J+1} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

De plus, chacun de ces produits de convolution est associatif et commutatif et, pour tout compact K , on a une majoration de sa norme dans $L^r(K)$ par un produit approprié de normes de chacun de ses facteurs. ■

Remarque. Une manière très spéciale de réaliser l'hypothèse $g \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est d'exiger que g appartienne à l'espace $C_L(\mathbb{R}^n)$ avec $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. De même, une manière très spéciale de réaliser l'hypothèse $g \in L_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est d'exiger que g appartienne à l'espace $D_L(\mathbb{R}^n)$ avec $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire l'espace des éléments de $C_L(\mathbb{R}^n)$ dont le support est compact. Cela entraîne des conséquences fort intéressantes. □

Théorème 5.5.5 a) Pour tout $f \in L_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $g \in C_L(\mathbb{R}^n)$, les fonctions f et g sont convolables et on a $f \star g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et $D^\alpha(f \star g) = f \star D^\alpha g$ pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq L$.

b) Pour tout $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $g \in D_L(\mathbb{R}^n)$, les fonctions f et g sont convolables et on a $f \star g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et $D^\alpha(f \star g) = f \star D^\alpha g$ pour toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq L$.

Preuve. Dans les deux cas, l'hypothèse du théorème de dérivation des intégrales paramétriques sous le signe d'intégration est en effet réalisée car on a

- i) $f(y)g(x-y) \in C_L(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$,
- ii) $f(y) \cdot (D^\alpha g)(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute dérivée D^α d'ordre $|\alpha| \leq L$. Dans le cas a), cela résulte des propriétés du produit de convolution $L_{\text{comp}}^1 \star L_{\text{loc}}^\infty$ et, dans le cas b), des propriétés du produit de convolution $L_{\text{loc}}^1 \star L_{\text{comp}}^\infty$,
- iii) pour tout compact K de \mathbb{R}^n (en la variable x) et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = L$, $|f(y) \cdot (D^\alpha g)(x-y)|$ est majoré *pp* en y sur \mathbb{R}^n par

$$|f(y)| \cdot \sup_{x \in K, y \in \text{supp}_{pp}(f)} |(D^\alpha g)(x-y)| \leq C |f(y)| \in L^1$$

dans le cas a) et par

$$\sup_{t \in \text{supp}(g)} |(D^\alpha g)(t)| \cdot |f(y)| \cdot \chi_{K-\text{supp}(g)}(y) \in L^1$$

dans le cas b), et cela pour tout $x \in K$. ■

5.6 Espaces $D_L(\Omega)$

Les espaces $D_L(\mathbb{R}^n)$ introduits de manière ad hoc au paragraphe précédent méritent un détour.

Définition. Etant donné $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et un ouvert non vide Ω de \mathbb{R}^n , l'espace $D_L(\Omega)$ est l'ensemble des éléments de $C_L(\Omega)$ dont le support est un compact inclus dans Ω . Dans le cas où Ω est égal à \mathbb{R}^n , on écrit plus simplement D_L chaque fois que cela n'entraîne pas d'ambiguïté.

Les propriétés élémentaires de l'espace $D_L(\Omega)$ sont immédiates.

Théorème 5.6.1 a) L'espace $D_L(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C_L(\Omega)$.

b) Pour tout $f \in C_L(\Omega)$ et tout $g \in D_L(\Omega)$, fg appartient à $D_L(\Omega)$.

c) Pour tout $g \in D_L(\Omega)$ et tout changement de variable $x(x')$ régulier d'ordre supérieur ou égal à L entre les ouverts Ω et Ω' de \mathbb{R}^n , $g(x(x'))$ appartient à $D_L(\Omega')$.

d) Si on a $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ où les $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sont des ouverts de \mathbb{R} , alors, pour tous $\varphi_1 \in D_L(\Omega_1), \dots, \varphi_n \in D_L(\Omega_n)$, $\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$ appartient à $D_L(\Omega)$. ■

Exemple. Afin d'assurer un sens aux espaces $D_L(\Omega)$, nous devons encore établir qu'ils contiennent d'autres fonctions que 0. Cela est assuré par les parties c) et d) du théorème précédent et les considérations qui suivent.

a) La fonction ψ définie sur \mathbb{R} par

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

appartient à $C_\infty(\mathbb{R})$ et son support est égal à $[0, +\infty[$. Il est clair que ψ est une fonction définie sur \mathbb{R} , que le support de ψ est égal à $[0, +\infty[$ et que ψ appartient à $C_\infty(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$. De plus ψ admet des dérivées à gauche de tous ordres en 0 et ces dérivées sont toutes égales à 0. Enfin on vérifie de suite que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_l tel que

$$D^l e^{-1/x} = \frac{P_l(x)}{(x^2)^l} \cdot e^{-1/x} \text{ sur }]0, +\infty[$$

donc tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} D^l e^{-1/x} = 0.$$

La conclusion s'ensuit aussitôt.

b) Pour tout $r > 0$, la fonction ρ_r définie sur \mathbb{R} par

$$\rho_r(x) = \begin{cases} e^{-1/(r^2-x^2)} & \text{si } |x| < r \\ 0 & \text{si } |x| \geq r \end{cases}$$

appartient à $C_\infty(\mathbb{R})$ et son support est égal à $\{x : |x| \leq r\}$. C'est immédiat si on note que la fonction ρ_r peut s'exprimer de la manière suivante au moyen de la fonction ψ introduite en a)

$$\rho_r(x) = \psi(2r(x+r)) \cdot \psi(2r(-x+r)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

c₁) Pour tout $r > 0$, la fonction $\rho_{1,r}$ définie sur \mathbb{R}^n par

$$\rho_{1,r}(x) = \rho_r(x_1) \cdots \rho_r(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et son support est égal à $[-r, r] \times \cdots \times [-r, r]$.

c₂) Pour tout $r > 0$, la fonction $\rho_{2,r}$ définie sur \mathbb{R}^n par

$$\rho_{2,r}(x) = \rho_r(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et son support est égal à $\{x : |x| \leq r\}$.

Dans ce qui précède, nous avons notamment établi le résultat suivant: pour tout $f \in L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$) et tout $\varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{cases} f \star \varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n) \quad (\text{resp. } C_\infty(\mathbb{R}^n)) \\ \text{supp}(f \star \varphi) \subset \text{supp}_{pp}(f) + \text{supp}(\varphi) \\ D^\alpha(f \star \varphi) = f \star (D^\alpha \varphi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{cases}$$

5.7 Théorème de Borel

Théorème 5.7.1 (Borel) Pour toute suite $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ de \mathbb{C} , il existe une fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $[D^\alpha f]_0 = c_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Preuve. Soit φ un élément de $D_\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, choisissons $t_\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$ tel que

$$\frac{1}{t_\alpha} \geq \begin{cases} \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta \varphi(x)| & \text{si } |c_\alpha| \leq 1, \\ |c_\alpha| \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta \varphi(x)| & \text{si } |c_\alpha| > 1. \end{cases}$$

Cela étant, nous allons établir que la fonction

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; \quad x \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} c_{\alpha} \varphi(x/t_{\alpha}) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}$$

convient, par application du Théorème 3.8.4.

De fait,

a) on a

$$c_{\alpha} \varphi(x/t_{\alpha}) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

b) pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, établissons que la série des dérivées D^{β} terme à terme

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} D^{\beta} \left(c_{\alpha} \varphi(x/t_{\alpha}) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \right)$$

converge uniformément sur \mathbb{R}^n . Cela résulte de ce que

bi) $\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq |\beta|\}$ est un ensemble fini.

bii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \geq |\beta|$, il vient successivement

$$\begin{aligned} \left| D^{\beta} \left(c_{\alpha} \varphi(x/t_{\alpha}) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \right) \right| &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_{\beta}^{\gamma} \left| D^{\gamma} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \cdot c_{\alpha} \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi(x/t_{\alpha}) \right| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{\gamma \leq \beta, \gamma \leq \alpha} C_{\beta}^{\gamma} \frac{t_{\alpha}^{|\alpha-\gamma|}}{(\alpha-\gamma)!} \cdot \frac{1}{t_{\alpha}^{|\beta-\gamma|}} \cdot |c_{\alpha}| \cdot \left| [D^{\beta-\gamma} \varphi]_{x/t_{\alpha}} \right| \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_{\beta}^{\gamma} \cdot t_{\alpha}^{|\alpha|-|\beta|-1} \leq 2^{n+1+|\beta|} \cdot 2^{-|\alpha|} \end{aligned}$$

(l'inégalité $(*)$ a lieu car, si $\gamma \leq \alpha$ n'a pas lieu, alors $D^{\gamma} x^{\alpha}$ est la fonction 0). Cela étant, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{m=|\beta|}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^{\beta} \left(c_{\alpha} \varphi(x/t_{\alpha}) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \right) \right| &\leq \sum_{m=|\beta|}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} 2^{n+1+|\beta|} 2^{-|\alpha|} \\ &\leq 2^{n+1+|\beta|} \sum_{m=|\beta|}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} 2^{-|\alpha|} \leq 2^{2n+1+|\beta|}, \end{aligned}$$

ce qui suffit.

c) pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \left[D^{\beta} \left(c_{\alpha} \varphi(x/t_{\alpha}) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \right) \right]_0 = c_{\beta}.$$

D'où la conclusion. ■

Corollaire 5.7.2 *Si $[a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} , alors, pour toute fonction $g \in C_{\infty}([a, b])$, il existe $f \in C_{\infty}([a, b])$ dont g est la restriction à $[a, b]$. ■*

5.8 Unité approchée de convolution

Remarque. Nous allons commencer ce paragraphe par une remarque négative: *il n'existe pas d'unité de convolution, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $\delta \in L^1$ (resp. $\delta \in L^1_{\text{comp}}$) telle que $f = f \star \delta$ pp pour tout $f \in L^p$ (resp. $f \in L^p_{\text{loc}}$) avec $p \in \{1, 2, \infty\}$.*

En effet, dans tous les cas, on a $\delta \in L^1$ et $\chi_I \in L^{\infty}_{\text{comp}}$ pour tout semi-intervalle I dans \mathbb{R}^n . Dès lors, $\delta \star \chi_I$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^n et, par conséquent, $\delta \star \chi_I$ ne peut être égal pp à χ_I , comme on le vérifie de suite.

Par contre, nous allons établir qu'il existe des unités approchées de convolution dans L^1 , L^2 , L^1_{loc} et L^2_{loc} , ainsi que des résultats apparentés dans L^{∞} et L^{∞}_{loc} . □

Définitions. Etant donné $p \in \{1, 2, \infty\}$, une *unité approchée de convolution* dans L^p (resp. L^p_{loc}) est une suite $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans L^1 (resp. dans L^1_{comp}) telle que

$$\delta_m \star f \xrightarrow{L^p} f, \quad \forall f \in L^p \quad (\text{resp. } \delta_m \star f \xrightarrow{L^p_{\text{loc}}} f, \quad \forall f \in L^p_{\text{loc}}).$$

Théorème 5.8.1 *Si la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de L^1 vérifie les trois conditions suivantes*

- i) $g_m \geq 0$ pp pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- ii) $\int_{\mathbb{R}^n} g_m(x) dx = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- iii) pour tout $R > 0$, on a

$$\int_{|x| \geq R} g_m(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow \infty,$$

alors

- a) $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une unité approchée de convolution dans L^1 ;
- b) $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une unité approchée de convolution dans L^2 ;
- c) pour toute fonction $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et toute partie mesurable E de \mathbb{R}^n telle que

$$\sup_{x \in E, |x-y| \leq \eta} |f(x) - f(y)| \rightarrow 0 \quad \text{si } \eta \rightarrow 0$$

(ce qui exige l'existence de $r > 0$ tel que f soit défini sur $\{x : d(x, E) \leq r\}$), la suite $(f \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur E vers f , c'est-à-dire qu'on a

$$\sup_{x \in E} |(f \star g_m)(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty,$$

ce qu'on écrit

$$f \star g_m \xrightarrow[E]{} f.$$

En particulier,

c₁) pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^n , on a $f \star g_m \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{} f$.

c₂) pour toute fonction f mesurable et bornée pp sur \mathbb{R}^n et tout compact K de \mathbb{R}^n dont tous les points sont des points de continuité de f , on a $f \star g_m \xrightarrow[K]{} f$.

Preuve. a) Pour tout $f \in L^1$, $(f \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est bien sûr une suite de L^1 telle que

$$\|f \star g_m - f\| = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) g_m(y) dy \right| dx.$$

Une application du théorème de Tonelli établit que $(f(x-y) - f(x)) g_m(y)$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^{2n} . Dès lors, en recourant au théorème de Fubini, il vient

$$\|f \star g_m - f\| \leq \int_{\mathbb{R}^n} g_m(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| dx dy.$$

Par conséquent, pour tout $R > 0$, on a la majoration

$$\|f \star g_m - f\| \leq \int_{|y| \leq R} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\| g_m(y) dy + 2 \|f\| \cdot \int_{|y| \geq R} g_m(y) dy.$$

Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut d'abord fixer $R_0 > 0$ tel que

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |y| \leq R_0$$

puis déterminer M_0 tel que

$$m \geq M_0 \Rightarrow \int_{|y| \geq R_0} g_m(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{4(\|f\| + 1)}.$$

Au total, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M_0 tel que

$$m \geq M_0 \Rightarrow \|f \star g_m - f\| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit.

b) Pour tout $f \in L^2$, $(f \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est bien sûr une suite de L^2 telle que

$$\|f \star g_m - f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) g_m(y) dy \right|^2 dx.$$

Comme, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, les fonctions

$$f(x-y)\sqrt{g_m(y)}, \quad f(x)\sqrt{g_m(y)} \quad \text{et} \quad \sqrt{g_m(y)}$$

appartiennent à L^2 , la formule de Schwarz donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) g_m(y) dy \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^2 g_m(y) dy$$

pp sur \mathbb{R}^n . Une application directe du théorème de Tonelli établit que la fonction $|f(x-y) - f(x)|^2 g_m(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{2n} . Dès lors, en recourant au théorème de Fubini, il vient

$$\|f \star g_m - f\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} g_m(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^2 dx dy.$$

Par conséquent, pour tout $R > 0$, on a la majoration

$$\|f \star g_m - f\|^2 \leq \int_{|y| \leq R} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|^2 g_m(y) dy + 4 \|f\|^2 \cdot \int_{|y| \geq R} g_m(y) dy.$$

On conclut alors aisément comme en a).

c) Pour tout $f \in L^\infty$, $(f \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est bien sûr une suite de fonctions continues et bornées sur \mathbb{R}^n . De plus, pour tout $R > 0$,

$$\sup_{x \in E} |(f \star g_m)(x) - f(x)| = \sup_{x \in E} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) g_m(y) dy \right|$$

est bien sûr majoré par

$$\sup_{x \in E} \int_{|y| \leq R} |f(x-y) - f(x)| g_m(y) dy + 2 \|f\| \cdot \int_{|y| \geq R} g_m(y) dy,$$

c'est-à-dire par

$$\sup_{x \in E, |x-t| \leq R} |f(t) - f(x)| + 2 \|f\| \cdot \int_{|y| \geq R} g_m(y) dy.$$

On conclut alors aisément comme en a).

c₁) est évidemment un cas particulier de c).

c₂) Il suffit de prouver que K vérifie la condition imposée à E dans c). Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que

$$|y - x| \leq r_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par le théorème de recouvrement, il existe un nombre fini de points de K à savoir x_1, \dots, x_J tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^J \{x : |x - x_j| < r_{x_j}/2\}.$$

Posons $R = \frac{1}{2} \inf\{r_{x_1}, \dots, r_{x_J}\}$. On a évidemment $R > 0$ et, pour tout $x \in K$, il existe $j \leq J$ tel que $|x - x_j| \leq r_{x_j}/2$ donc tel que

$$|x - y| < R \Rightarrow |x_j - y| \leq |x_j - x| + |x - y| < r_{x_j}.$$

Par conséquent on a

$$\sup_{x \in K, |x-y| < R} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit pour conclure. ■

Théorème 5.8.2 *Si la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de L^1_{comp} vérifie les quatre conditions suivantes:*

- i) $g_m \geq 0$ pp pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- ii) $\int_{\mathbb{R}^n} g_m(x) dx = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- iii) $\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{supp}_{\text{pp}}(g_m)$ est borné;
- iv) pour tout $R > 0$, on a

$$\int_{|x| \geq R} g_m(x) dx \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty,$$

alors

- a) $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une unité approchée de convolution dans L^1_{loc} ;
- b) $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une unité approchée de convolution dans L^2_{loc} ;
- c) pour tout $f \in L^{\infty}_{\text{loc}}$ et tout compact K de \mathbb{R}^n tels que

$$\sup_{x \in K, |x-y| \leq \eta} |f(x) - f(y)| \rightarrow 0 \text{ si } \eta \rightarrow 0$$

(ce qui exige que f soit défini sur un ouvert contenant K), la suite $(f \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur K vers f , c'est-à-dire qu'on a

$$\sup_{x \in K} |(f \star g_m)(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty,$$

ce qu'on écrit $f \star g_m \xrightarrow{K} f$.

En particulier, pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, on a $f \star g_m \xrightarrow{K} f$ pour tout compact K de \mathbb{R}^n .

Preuve. Soit K_0 un compact de \mathbb{R}^n contenant une boule centrée à l'origine, ainsi que $\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{supp}_{pp}(g_m)$. Cela étant, pour tout compact K de \mathbb{R}^n (resp. pour le compact K de l'énoncé, dans le cas c)) et tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{cases} f \star g_m = (f\chi_{K-K_0}) \star g_m & \text{pp sur } K \\ f = f\chi_{K-K_0} & \text{pp sur } K \end{cases}$$

(resp. ces égalités ont lieu en tout point de K , dans le cas c)). On en déduit aussitôt que

$$\|f \star g_m - f\|_{L^p(K)} = \|(f\chi_{K-K_0}) \star g_m - f\chi_{K-K_0}\|_{L^p(K)}$$

tend vers 0 si $m \rightarrow \infty$ pour

- a) $p = 1$ dans le cas a) car on a $f\chi_{K-K_0} \in L^1$,
- b) $p = 2$ dans le cas b) car on a $f\chi_{K-K_0} \in L^2$,
- c) $p = \infty$ dans le cas c) car on a $f\chi_{K-K_0} \in L^\infty$ et

$$\sup_{x \in K, |x-y| \leq \eta} |(f\chi_{K-K_0})(x) - (f\chi_{K-K_0})(y)| \rightarrow 0 \text{ si } \eta \rightarrow 0.$$

Le cas particulier est immédiat. ■

Afin d'assurer l'utilité des deux théorèmes précédents, nous devons encore établir l'existence de telles suites $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$.

Proposition 5.8.3 *Si $g \in L^1$ vérifie $g \geq 0$ pp et $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$, alors les fonctions*

$$g_m(x) = m^n g(mx) \text{ avec } m \in \mathbb{N}_0$$

sont telles que

- i) $g_m \in L^1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- ii) $g_m \geq 0$ pp pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- iii) $\int_{\mathbb{R}^n} g_m(x) dx = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$;
- iv) pour tout $R > 0$, on a

$$\int_{|x| \geq R} g_m(x) dx \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

Preuve. Il suffit de recourir au changement de variable $mx = y$. ■

Proposition 5.8.4 *Si $g \in L^1_{\text{comp}}$ vérifie $g \geq 0$ pp et $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$, alors les fonctions*

$$g_m(x) = m^n g(mx) \text{ avec } m \in \mathbb{N}_0$$

sont telles que

- i) $g_m \in L^1_{\text{comp}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,
- ii) $g_m \geq 0$ pp pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,
- iii) $\int_{\mathbb{R}^n} g_m(x) dx = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,
- iv) $\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{supp}_{\text{pp}}(g_m)$ est borné; en fait, on a $\text{supp}_{\text{pp}}(g_m) = \frac{1}{m} \text{supp}_{\text{pp}}(g)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,
- v) pour tout $R > 0$, on a

$$\int_{|x| \geq R} g_m(x) dx \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty. \blacksquare$$

5.9 Unité universelle approchée de convolution

Définition. Plus on particularise l'unité approchée de convolution, plus elle jouit de propriétés. On donne le nom d'*unité universelle approchée de convolution* aux fonctions ρ_ε définies pour $\varepsilon > 0$ sur \mathbb{R}^n selon

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x/\varepsilon)}{\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx}$$

où ρ est un élément de $D_\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant les trois conditions suivantes

- a) $\text{supp}(\rho) \subset \{x : |x| \leq 1\}$ (ce qui entraîne $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \{x : |x| \leq \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$),
- b) $\rho(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
- c) $\rho(x) = \rho(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $|x| = |y|$.

Un exemple de telle fonction ρ est bien sûr donné par

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Convention. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, la notation ρ_ε est réservée à une telle unité universelle approchée de convolution.

Il est bon d'exprimer les résultats déjà établis, dans le cadre d'une telle unité universelle approchée de convolution.

a) Pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}$ et tout $\varepsilon > 0$, les fonctions f et ρ_ε sont convolables et on a

$$\begin{cases} f \star \rho_\varepsilon \in C_\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{supp}(f \star \rho_\varepsilon) \subset \text{supp}_{pp}(f) + \{x : |x| \leq \varepsilon\}, \\ D^\alpha(f \star \rho_\varepsilon) = f \star (D^\alpha \rho_\varepsilon), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{cases}$$

b) Pour tout $f \in L^{1,2}$, on a $f \star \rho_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^{1,2}$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

c) Pour tout $f \in L^{1,2}_{\text{loc}}$, on a $f \star \rho_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^{1,2}_{\text{loc}}$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

d) Pour toute fonction uniformément continue et bornée f sur \mathbb{R}^n , on a $f \star \rho_\varepsilon \Rightarrow_{\mathbb{R}^n} f$.

e) Pour tout $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et tout $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{cases} f \star \rho_\varepsilon \in C_\infty(\mathbb{R}^n), \\ \text{supp}(f \star \rho_\varepsilon) \subset \text{supp}(f) + \{x : |x| \leq \varepsilon\}, \\ D^\alpha(f \star \rho_\varepsilon) = f \star (D^\alpha \rho_\varepsilon), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \\ D^\alpha(f \star \rho_\varepsilon) = (D^\alpha f) \star \rho_\varepsilon, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq L, \\ D^\alpha(f \star \rho_\varepsilon) \Rightarrow_K D^\alpha f, \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq L \\ \forall \text{ compact } K \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \end{cases}$$

5.10 Premières conséquences

5.10.1 Deuxième théorème d'approximation

Théorème 5.10.1 *Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n , tout $f \in L^{1,2}(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in D_\infty(\Omega)$ tel que $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$.*

Preuve. Vu le premier théorème d'approximation, il existe une fonction étagée α dans Ω telle que $\|f - \alpha\| \leq \varepsilon/2$. Il existe ensuite $M \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $m \geq M$, on a $\|\alpha - \alpha \star \rho_{1/m}\| \leq \varepsilon/2$. Comme, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \star \rho_{1/m}$ appartient à $D_\infty(\mathbb{R}^n)$ et a son support inclus dans l'ensemble $\text{supp}(\alpha) + \{x : |x| \leq 1/m\}$, on conclut aussitôt. ■

5.10.2 Régularisation d'un ensemble

Voici un important théorème de régularisation, c'est-à-dire un moyen de construire des fonctions appartenant à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ qui valent 1 en tout point d'une partie non vide E de \mathbb{R}^n et se raccordent à 0 de manière infiniment douce au voisinage de E . Pour tout $r > 0$, nous posons

$$E_r = \{x : d(x, E) \leq r\};$$

E_r est donc un fermé contenant E et même la boule $\{x : |x - y| \leq r\}$ pour tout $y \in E^-$.

Théorème 5.10.2 *Pour toute partie non vide E de \mathbb{R}^n et tout $\varepsilon > 0$, $\chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon$ est une fonction vérifiant*

- a) $\chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$;
- b) $(\chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon)(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour tout } x \in E^-, \\ 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus E_{2\varepsilon}; \end{cases}$
- c) $0 \leq \chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon \leq \chi_{\mathbb{R}^n}$;
- d) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ ne dépendant que de α telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha(\chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon)| \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Preuve. a) est connu car on a $\chi_F \in L^\infty$ pour tout fermé F de \mathbb{R}^n .
b) et c). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon)(x) = \int_{E_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x - y) dy$$

avec

$$\begin{aligned} \text{supp}(\rho_\varepsilon(x - \cdot)) &\subset \{y : |x - y| \leq \varepsilon\} \subset E_\varepsilon, \quad \forall x \in E^-, \\ (\text{supp}(\rho_\varepsilon(x - y))) \cap E_\varepsilon &= \emptyset, \quad \forall x \notin E_{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x - y) dy = 1 \text{ et } \rho_\varepsilon(x - y) \geq 0.$$

d) Il suffit de noter qu'on a successivement

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha(\chi_{E_\varepsilon} \star \rho_\varepsilon)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_\varepsilon}(x - y) \cdot (D^\alpha \rho_\varepsilon)(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \rho_\varepsilon)(y)| dy \leq \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |D_y^\alpha \rho_1(y/\varepsilon)| dy \\ &\leq \varepsilon^{-n-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \rho_1)(y/\varepsilon)| dy \leq \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \rho_1| dy. \blacksquare \end{aligned}$$

5.10.3 Théorème de Stone-Weierstrass dans $C_L(\Omega)$

Théorème 5.10.3 *Pour tout $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n , l'ensemble des restrictions à Ω des polynômes est dense dans $C_L(\Omega)$, c'est-à-dire que, pour tout $f \in C_L(\Omega)$, tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq L$, tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que*

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x) - D^\alpha P(x)| \leq \varepsilon.$$

Preuve. Vu le théorème de régularisation d'un ensemble, il existe une fonction $\varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n)$, à support compact inclus dans Ω et prenant la valeur 1 en tout point d'un voisinage de K .

La fonction $g_1(x) = \pi^{-n/2} e^{-|x|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 0 et a 1 pour intégrale.

Dès lors la suite $(g_m(x) = m^n g_1(mx))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une unité approchée de convolution dans $L^{1,2}$ et on a

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |g_m \star D^\alpha(\varphi f) - D^\alpha(\varphi f)| \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

Cela étant, il existe une suite strictement croissante $(N(k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{N}_0 telle que

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha(g_{N(k)} \star (\varphi f)) - D^\alpha f| \leq 1/k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, la suite de polynômes

$$\left(P_{k,m}(x) = \pi^{-n/2} N(k)^n \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{N(k)^{2j}}{j!} |x|^{2j} \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

convergeant uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^n (en particulier sur le compact $K - \text{supp}(\varphi)$) vers $g_{N(k)}$, il existe $M(k) \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\begin{aligned} & \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |(g_{N(k)} - P_{k,M(k)}) \star D^\alpha(\varphi f)| \\ & \leq \sup_{x \in K - \text{supp}(\varphi)} |g_{N(k)}(x) - P_{k,M(k)}(x)| \cdot \sup_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1 \end{aligned}$$

soit majoré par $1/k$. Au total, on a alors

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha(P_{k,M(k)} \star (\varphi f)) - D^\alpha f| \leq \frac{2}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

d'où la conclusion car les fonctions $P_{k,M(k)} \star (\varphi f)$ sont bien sûr des polynômes. ■

5.10.4 Approximation dans $L^{1,2}(\Omega)$

Proposition 5.10.4 *Pour tous $f \in L^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ et des fonctions $\varphi_{j,k} \in D_\infty(\mathbb{R})$ avec $j = 1, \dots, n$ et $k = 1, \dots, N$ telles que*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^N \varphi_{1,k}(x_1) \cdots \varphi_{n,k}(x_n) \right\| \leq \varepsilon.$$

Si, de plus, le support pp de f est inclus dans $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ où les ensembles $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sont des ouverts bornés de \mathbb{R} , on peut exiger en outre que, pour tout $j \leq n$ et tout $k \leq N$, le support de $\varphi_{j,k}$ soit inclus dans Ω_j .

Preuve. On sait qu'il existe $\varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$ et que, si le support pp de f est inclus dans $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, on peut en outre exiger que le support de φ soit inclus dans cet ouvert également.

Pour conclure, il suffit alors bien sûr de prouver la proposition dans le cas où f est un élément φ de $D_\infty(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$.

Désignons par K le support de φ . Il existe alors des compacts $K_1 \subset \Omega_1, \dots, K_n \subset \Omega_n$ tels que

$$K \subset K_1 \times \cdots \times K_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$$

et des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_n \in D_\infty(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} 0 \leq \psi_j \leq \chi_{\Omega_j} \\ \psi_j(x) = 1, \quad \forall x \in K_j \\ \text{supp}(\psi_j) \subset \Omega_j \end{cases}$$

pour tout $j = 1, \dots, n$.

Vu le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de polynômes sur \mathbb{R}^n qui converge uniformément sur le compact $K' = \overline{\Omega_1} \times \cdots \times \overline{\Omega_n}$ vers φ donc telle que

$$\psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n) P_m(x) \xrightarrow{K} \varphi(x)$$

et par conséquent telle que

$$\|\varphi(x) - \psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n) P_m(x)\| \rightarrow 0$$

alors que les fonctions $\psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n) P_m(x)$ sont bien sûr du type exigé. ■

5.11 Critères d'annulation presque partout

Proposition 5.11.1 a) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est tel que $f \star f^* = 0$ pp , alors on a $f = 0$ pp .

b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est tel que $f \star f^* = 0$, alors on a $f = 0$ pp .

Preuve. b) De fait, $f \star f^*$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^n et on a

$$0 = (f \star f^*)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y) f^*(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx.$$

a) De fait, on a $f \star f^* \in L^1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^* \in L^1$ et $f \star \rho_\varepsilon \in L^2$ donc

$$0 = (f \star f^*) \star (\rho_\varepsilon \star \rho_\varepsilon^*) = (f \star \rho_\varepsilon) \star (f \star \rho_\varepsilon)^* \quad pp$$

et, par conséquent, $f \star \rho_\varepsilon = 0$ pp vu b). D'où la conclusion car on a $f \star \rho_\varepsilon \rightarrow f$ dans L^1 si $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Proposition 5.11.2 *Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n pour laquelle il existe un entier $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\star_{m=1}^M f = 0$ pp, alors f est égal à 0 pp.*

Preuve. Pour $M = 2$, comme on a

$$(g \star g) \star (g \star g)^* = (g \star g^*) \star (g \star g^*)^* \text{ pp sur } \mathbb{R}^n, \quad \forall g \in L^1,$$

on obtient de suite $f \star f^* = 0$ pp sur \mathbb{R}^n au moyen de deux applications successives de la partie a) de la proposition précédente.

Pour conclure, il suffit alors de noter que

a) pour tout entier M pair égal à $2M'$ avec $M' \geq 2$, on a

$$\star_{m=1}^M f = \left(\star_{m=1}^{M'} f \right) \star \left(\star_{m=1}^{M'} f \right)$$

donc $\star_{m=1}^{M'} f = 0$ pp,

b) pour tout entier M impair égal à $2M' + 1$ avec $M' \geq 1$, on a

$$\left(\star_{m=1}^M f \right) \star f = \left(\star_{m=1}^{M'+1} f \right) \star \left(\star_{m=1}^{M'+1} f \right)$$

donc $\star_{m=1}^{M'+1} f = 0$ pp. ■

5.12 Extension du produit de convolution

Définition. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour tout $f \in L^p$ dont le support $\text{supp}_{pp}(f)$ est inclus dans $\{x : |x| \leq R\}$ avec $R > 0$ et tout $g \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$, il est clair qu'on a

$$f(x-y) \cdot (g\chi_\Omega)(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

pour presque tout $x \in \Omega_{-R} = \{t : d(t, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > R\}$ et même pour tout $x \in \Omega_{-R}$ si on a $r = \infty$. On convient alors de parler du produit de convolution sur Ω_{-R} de f et de g , et d'introduire la notation $(f \star g)|_{\Omega_{-R}}$ par

$$(f \star g)|_{\Omega_{-R}}(x) = \int_{\Omega} f(x-y) g(y) dy, \quad \forall x \in \Omega_{-R}.$$

On obtient bien sûr de suite les résultats suivants.

Proposition 5.12.1 *Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et R un nombre strictement positif.*

a) *Pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et tout $g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ dont le support est inclus dans $\{x : |x| \leq R\}$, on a $(f \star g)|_{\Omega_{-R}} \in C_L(\Omega_{-R})$ et*

$$D^\alpha(f \star g)|_{\Omega_{-R}} = (f \star D^\alpha g)|_{\Omega_{-R}}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$.

b) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dont le support pp est inclus dans $\{x : |x| \leq R\}$ et tout $g \in C_L(\Omega)$, on a $(f \star g)|_{\Omega_{-R}} \in C_L(\Omega_{-R})$ et

$$D^\alpha(f \star g)|_{\Omega_{-R}} = (f \star D^\alpha g)|_{\Omega_{-R}}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$. ■

Proposition 5.12.2 Soit g un élément de $L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ tel que $g \geq 0$ pp sur \mathbb{R}^n et $\|g\|_1 = 1$. On sait alors que la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définie par $g_m(x) = m^n g(mx)$ pp sur \mathbb{R}^n est une unité approchée de convolution. Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n , tout compact K inclus dans Ω et tout $f \in C_L(\Omega)$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $m \geq M$, $(f \star g_m)|_\omega$ soit défini sur un ouvert ω contenant K et soit même tel que

$$D^\alpha(f \star g_m)|_\omega \xrightarrow[K]{} D^\alpha f \text{ si } m \geq M \text{ et } m \rightarrow \infty.$$

Preuve. Il suffit de noter que, si on pose $R = d(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)/2$, on peut prendre $\omega = \Omega_{-R}$ à condition de choisir M tel que

$$\text{supp}_{pp}(g_m) = \frac{1}{m} \text{supp}_{pp}(g) \subset \{x : |x| \leq R\}, \quad \forall m \geq M. \blacksquare$$

5.13 Partitions D_∞ de l'unité

Définitions. Soit E une partie non vide de \mathbb{R}^n .

Une *partition de l'unité* sur E est un ensemble $\{f_j : j \in J\}$ de fonctions positives sur E telles que, pour tout $x \in E$, la série $\sum_{j \in J} f_j(x)$ converge vers 1. Ceci exige a priori que, pour tout $x \in E$, $\{j \in J : f_j(x) > 0\}$ soit un ensemble dénombrable.

Une partition de l'unité $\{f_j : j \in J\}$ sur E est

- a) *dénombrable* si J est dénombrable;
- b) *continue* si chacun des f_j est continu sur E ;
- c) *localement finie* si tout $x \in E$ est le centre d'une boule b telle que le nombre de f_j non identiquement nuls sur $b \cap E$ soit fini—on dit aussi alors que les f_j sont *localement finis*.

Si E est un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , une partition de l'unité $\{f_j : j \in J\}$ est C_L (resp. D_L) sur Ω si chacun des f_j appartient à $C_L(\Omega)$ (resp. $D_L(\Omega)$).

Remarque. Formulons quelques remarques, aisées à établir.

- a) Si les fonctions f_m sont positives sur E et si la série $\sum_{m=1}^\infty f_m(x)$ converge pour tout $x \in E$ vers un nombre > 0 , alors l'ensemble $\{f_m^* : m \in \mathbb{N}_0\}$, où f_m^* est défini sur E par

$$f_m^*(x) = f_m(x) \Big/ \sum_{k=1}^\infty f_k(x), \quad \forall x \in E,$$

est une partition dénombrable de l'unité sur E . Si, en outre, les f_m sont continus et localement finis sur E , $\{f_m^* : m \in \mathbb{N}_0\}$ est une partition dénombrable, continue et localement finie de l'unité sur E . Enfin si, en outre, E est un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et si les f_m appartiennent à $C_L(\Omega)$ (resp. $D_L(\Omega)$) avec $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et sont localement finis sur Ω , alors $\{f_m^* : m \in \mathbb{N}_0\}$ est une partition dénombrable, localement finie et C_L (resp. D_L) de l'unité sur Ω .

b) Si $\{f'_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est une partition (resp. une partition continue ou localement finie) de l'unité sur une partie non vide E' de $\mathbb{R}^{n'}$ et si $\{f''_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est une partition (resp. une partition continue ou localement finie) de l'unité sur une partie non vide E'' de $\mathbb{R}^{n''}$, alors $\{f'_j(x') f''_k(x'') : j, k \in \mathbb{N}_0\}$ est une partition (resp. une partition continue ou localement finie) de l'unité sur $E = E' \times E''$. On a aussi un énoncé analogue pour les partitions C_L ou D_L si E' et E'' sont ouverts. \square

Exemple. *L'espace \mathbb{R}^n admet une partition dénombrable, continue et localement finie de l'unité au moyen de fonctions à support compact.*

Vu la remarque b), il suffit d'établir que \mathbb{R} admet une partition dénombrable, continue et localement finie de l'unité au moyen de fonctions à support compact. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, introduisons la fonction f_m sur \mathbb{R} par

$$f_m = \inf\{1, 3d(x, \mathbb{R} \setminus]m - 1/3, m + 4/3])\}.$$

Ces fonctions f_m sont positives et continues sur \mathbb{R} et f_m a pour support l'intervalle $[m - 1/3, m + 4/3]$. Il est alors aisé de voir que les fonctions f_m^* définies dans la partie a) des remarques précédentes conviennent.

Nous allons généraliser l'exemple précédent au cas d'un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n et des partitions D_∞ .

Théorème 5.13.1 *A tout recouvrement ouvert $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$ d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , on peut associer une partition D_∞ et localement finie de l'unité sur Ω au moyen de fonctions dont le support est un compact inclus dans un des ouverts du recouvrement.*

Preuve. Soit $\{x_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ une partie dénombrable dense de Ω .

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $\alpha \in A$ tel que $x_m \in \Omega_\alpha$. Dès lors,

$$r_m = \sup\{\rho > 0 : \exists \alpha \in A \text{ tel que } b(x_m; \rho) \subset \Omega_\alpha\}$$

est un nombre strictement positif pour lequel il existe $\alpha_m \in A$ tel que $b(x_m; 2r_m/3) \subset \Omega_{\alpha_m}$.

Etablissons que $\bigcup_{m=1}^\infty b(x_m; r_m/2)$ contient Ω . De fait, pour tout $x \in \Omega$,

$$r_x = \sup\{\rho > 0 : \exists \alpha \in A \text{ tel que } b(x; \rho) \subset \Omega_\alpha\}$$

est un nombre strictement positif pour lequel il existe $\alpha_x \in A$ tel que $b(x; 5r_x/6) \subset \Omega_{\alpha_x}$. Cela étant, il existe un entier m tel que $|x_m - x| \leq r_x/6$, ce qui implique $2r_x/3 \leq r_m$ donc $|x_m - x| \leq r_m/4$, ce qui suffit et donne même $b(x; r_x/6) \subset b(x_m; r_m/2)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, nous savons qu'il existe $\varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n)$, à valeurs ≥ 0 , égal à 1 sur $b(x_m; r_m/2)$ et à 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus b(x_m; 2r_m/3)$. Il s'agit donc d'un élément de $D_\infty(\Omega_{\alpha_m})$.

Cela étant, la suite $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1, \\ \psi_{m+1} = (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_m) \varphi_{m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

convient car

a) on a $\psi_m \in D_\infty(\Omega)$, $\text{supp}(\psi_m) \subset \Omega_{\alpha_m}$ et $\psi_m \geq 0$ sur Ω pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

b) on a $\psi_1 + \cdots + \psi_m = 1 - (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Pour $m = 1$, c'est trivial. De plus, si c'est vrai pour $m = 1, \dots, k$, c'est aussi vrai pour $m = k + 1$ vu que

$$\psi_1 + \cdots + \psi_{k+1} = 1 - (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_k) + (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_k) \varphi_{k+1}.$$

c) on a $\psi_1(x) + \cdots + \psi_m(x) = 1$ pour tout $x \in \cup_{k=1}^m b(x_k; r_k/2)$. De fait, pour un tel point x , il existe un premier entier $k_0 \leq m$ tel que $|x_{k_0} - x| \leq r_{k_0}/2$, ce qui implique $\varphi_{k_0+l}(x) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, donc

$$\begin{aligned} \psi_1(x) + \cdots + \psi_m(x) &= \psi_1(x) + \cdots + \psi_{k_0}(x) \\ &= 1 - (1 - \varphi_1(x)) \cdots (1 - \varphi_{k_0}(x)) = 1. \end{aligned}$$

d) pour tout $x \in \Omega$, il existe un premier entier m tel que $b(x; r_x/6) \subset b(x_m; r_m/2)$ donc tel que $\psi_{m+k} = 0$ sur $b(x; r_x/6)$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Présentons un complément utile à ce dernier résultat.

Définition. Un fermé F de \mathbb{R}^n est *régulier* si $F = F^{\circ-}$.

Proposition 5.13.2 *Pour tout ouvert non vide Ω de \mathbb{R}^n , il existe une suite $(K_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de compacts réguliers tels que $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$ ait lieu pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et que $\bigcup_{m=1}^\infty K_m = \Omega$.*

En particulier, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m^\circ$.

Preuve. Si on a $\Omega = \mathbb{R}^n$, il suffit évidemment de poser

$$K_m = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Si Ω diffère de \mathbb{R}^n et de \emptyset , posons

$$\Omega_m = \{x : |x| < m, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 1/m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

On sait qu'il existe alors un entier m_0 tel que $\Omega_{m_0} \neq \emptyset$. Cela étant, établissons qu'on peut poser $K_m = (\Omega_{m_0+m})^-$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On voit sans peine que les Ω_m sont des ouverts non vides, bornés et tels que

$$\Omega_m \subset (\Omega_m)^- \subset \Omega_{m+1}, \quad \forall m > m_0,$$

donc que les K_m sont des compacts non vides, emboîtés en croissant et tels que

$$K_m \subset \Omega_{m_0+m+1} \subset (K_{m+1})^\circ, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

De plus, on a évidemment

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \subset \Omega$$

et dès lors, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset \Omega_m$, donc tel que $K \subset K_m$. Pour conclure, il suffit alors de noter que, pour tout ouvert ω , on a $\omega^- = \omega^{-\circ-}$. ■

Proposition 5.13.3 *Si les K_m désignent les compacts de la proposition précédente, il existe une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $D_\infty(\Omega)$ telle que*

$$\text{supp}(\alpha_1) \subset K_1, \text{supp}(\alpha_2) \subset K_2 \text{ et } \text{supp}(\alpha_m) \subset K_m \setminus (K_{m-2})^\circ \text{ si } m \geq 3,$$

qui constitue une partition D_∞ de l'unité sur Ω .

Preuve. Il suffit de considérer le recouvrement ouvert de Ω déterminé par les ouverts

$$\Omega_1 = (K_1)^\circ, \Omega_2 = (K_2)^\circ, \text{ et } \Omega_{m+2} = (K_{m+2})^\circ \setminus K_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

et de prendre successivement pour

α_1 la somme des fonctions ψ_j du Théorème 5.13.1 dont le support est inclus dans $(K_1)^\circ$,

α_m la somme des fonctions ψ_j du Théorème 5.13.1 dont le support est inclus dans Ω_m et qui n'ont pas encore été retenues. ■

A ce stade, il est bon de donner un complément d'information sur les recouvrements.

Définitions. Un recouvrement ouvert $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$ d'une partie E de \mathbb{R}^n est *localement fini* si tout point $x \in E$ est le centre d'une boule qui ne rencontre qu'un nombre fini de Ω_α . De plus, une famille $\{\Omega'_\beta : \beta \in B\}$ d'ouverts est un *recouvrement plus fin* que $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$ si, pour tout $\beta \in B$, il existe $\alpha \in A$ tel que $\Omega'_\beta \subset \Omega_\alpha$ et si $\{\Omega'_\beta : \beta \in B\}$ est un recouvrement de E .

On a alors le résultat suivant.

Proposition 5.13.4 *A tout recouvrement ouvert d'un ouvert de \mathbb{R}^n , on peut associer un recouvrement ouvert, plus fin, dénombrable et localement fini.*

Preuve. Soit $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n .

a) *Comme \mathbb{R}^n est un espace de Lindelöf,* nous savons déjà que nous pouvons extraire un recouvrement dénombrable de $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$ (cela résulte aussi directement de la proposition précédente); soit $\{\Omega_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un tel recouvrement.

b) Nous savons également qu'il existe une suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de nombres strictement positifs, croissante vers ∞ et telle que les ensembles

$$K_m = \{x : |x| \leq r_m, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 1/r_m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

soient des compacts non vides et constituent un recouvrement de Ω tel que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m$.

c) Comme $\{\Omega_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un recouvrement ouvert du compact K_1 , on peut en extraire un recouvrement fini: il existe donc M_1 tel que $K_1 \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{M_1}$. Posons

$$\omega_m = \Omega_m \text{ si } m \leq M_1.$$

Cela étant, pour $k \geq 2$, déterminons des entiers M_k et des ouverts ω_m ($M_{k-1} < m \leq M_k$) au moyen de la récurrence suivante.

Si M_1, \dots, M_{k-1} sont déterminés,

$$\{\omega_m : m \leq M_{k-1}\} \cup \{\Omega_m \setminus K_{k-1} : m > M_{k-1}\}$$

constitue un recouvrement ouvert du compact K_k et on peut en extraire un recouvrement fini: il existe donc $M_k > M_{k-1}$ tel que

$$K_k \subset \omega_1 \cup \dots \cup \omega_{M_{k-1}} \cup (\Omega_{M_{k-1}+1} \setminus K_{k-1}) \cup \dots \cup (\Omega_{M_k} \setminus K_{k-1}).$$

Posons alors

$$\omega_m = \Omega_m \setminus K_{k-1} \text{ si } M_{k-1} < m \leq M_k.$$

d) L'ensemble $\{\omega_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ convient.

De fait, ω_m est ouvert et inclus dans Ω_m quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in \Omega$ est le centre d'une boule fermée b incluse dans Ω : cet ensemble b est compact, donc inclus dans un des compacts K_m , soit $b \subset K_{m_0}$. Cela étant, aucun des ω_m d'indice $m > M_{m_0}$ ne rencontre b car il est disjoint de K_{m_0} , alors que $\{\omega_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ constitue un recouvrement de K_{m_0} , donc de b . ■

Cela étant, voici une autre preuve du Théorème 5.13.1.

Lemme 5.13.5 (Lebesgue) *Si le compact K est inclus dans l'union finie des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, il existe $r > 0$ tels que les ouverts*

$$\Omega_{m,-r} = \{x : d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_m) > r\}, \quad (1 \leq m \leq M),$$

constituent encore un recouvrement de K .

Preuve. Si ce n'est pas le cas, pour tout entier $l \in \mathbb{N}_0$, il existe un point $x_l \in K$ n'appartenant pas à $\cup_{m=1}^M \Omega_{m,-1/l}$. De la suite $(x_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$, on peut alors extraire une sous-suite convergente; soit $(x_{k(l)})_{l \in \mathbb{N}_0}$ une telle sous-suite et désignons par x_0 sa limite. On a donc $x_0 \in K$ et il existe $r > 0$ tel que la boule fermée b de centre x_0 et de rayon r soit incluse dans un des ouverts, soit Ω_{m_0} . Mais alors, pour l suffisamment grand, on a $|x_{k(l)} - x_0| \leq r/2$ et $x_{k(l)}$ appartient à $\Omega_{m_0,-r/2}$. D'où une contradiction. ■

Théorème 5.13.6 *A tout recouvrement ouvert d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , on peut associer une partition D_∞ et localement finie de l'unité sur Ω au moyen de fonctions dont le support est un compact inclus dans un des ouverts du recouvrement.*

Preuve. Reprenons les notations de la proposition précédente. Le compact K_2 est inclus dans l'union finie des ouverts

$$(K_3)^\circ \cap \omega_m, \quad (m \leq M_2).$$

Il existe donc $r > 0$ tel que K_2 soit inclus dans l'union des ouverts

$$((K_3)^\circ \cap \omega_m)_{-r}, \quad (m \leq M_2),$$

en recourant au lemme et à ses notations. Les fonctions

$$f_m^{(1)} = \chi_{((K_3)^\circ \cap \omega_m)_{-3r/4}} \star \rho_{r/4}, \quad (m \leq M_2),$$

appartiennent à $D_\infty(\mathbb{R}^n)$ et sont nulles sur $\mathbb{R}^n \setminus ((K_3)^\circ \cap \omega_m)_{-r/2}$, donc ont leur support compact (car inclus dans K_3) et inclus dans ω_m , et, pour tout $x \in K_2$, il existe $m \leq M_2$ tel que $f_m^{(1)}(x) > 0$.

Fixons $k \geq 2$. Le compact $K_{k+1} \setminus (K_k)^\circ$ est inclus dans l'union finie des ouverts

$$((K_{k+2})^\circ \cap \omega_m) \setminus K_{k-1}, \quad (m \leq M_{k+1}).$$

Il existe donc $r' > 0$ tel que $K_{k+1} \setminus (K_k)^\circ$ soit inclus dans l'union des ouverts

$$(((K_{k+2})^\circ \cap \omega_m) \setminus K_{k-1})_{-r'}, \quad (m \leq M_{k+1}).$$

Les fonctions

$$f_m^{(k)} = \chi_{(((K_{k+2})^\circ \cap \omega_m) \setminus K_{k-1})_{-3r'/4}} \star \rho_{r'/4}, \quad (m \leq M_{k+1}),$$

appartiennent à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme elles sont identiquement nulles sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus (((K_{k+2})^\circ \cap \omega_m) \setminus K_{k-1})_{-r'/2}$, elles ont leur support compact (car inclus dans K_{k+2}) et inclus dans ω_m . De plus, pour tout $x \in K_{k+1} \setminus (K_k)^\circ$, il existe $m \leq M_{k+1}$ tel que $f_m^{(k)}(x) > 0$.

Les fonctions $f_m^{(k)}$ ainsi obtenues permettent de résoudre le problème en recourant aux fonctions $f_m^{(k)*}$ de la première remarque car

- a) les $f_m^{(k)}$ appartiennent à $D_\infty(\mathbb{R}^n)$,
- b) chaque $f_m^{(k)}$ a son support inclus dans ω_m , donc dans un des ouverts de départ,
- c) les $f_m^{(k)}$ sont localement finis car les seules fonctions pouvant différer de 0 sur K_j sont celles d'indice supérieur $k \leq j$ et pour chaque indice supérieur k , nous n'avons introduit qu'un nombre fini de fonctions (inférieur à M_{k+1}),
- d) pour tout $x \in \Omega$, on a $x \in K_2$ ou il existe un entier $k > 2$ tel que $x \in K_{k+1} \setminus (K_k)^\circ$, donc il existe $f_m^{(k)}$ tel que $f_m^{(k)}(x) > 0$. ■

Chapitre 6

Transformation de Fourier dans L^1

6.1 Définition et généralités

Définitions. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, les fonctions

$$e^{i\langle x, y \rangle} f(x) \text{ et } e^{-i\langle x, y \rangle} f(x)$$

sont intégrables sur \mathbb{R}^n et le module de leur intégrale est majoré par $\|f\|$. Cela étant, la transformation positive \mathcal{F}^+ et la transformation négative \mathcal{F}^- de Fourier dans L^1 sont les applications

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+ : L^1 &\rightarrow L^\infty; & f &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \cdot \rangle} f(x) dx, \\ \mathcal{F}^- : L^1 &\rightarrow L^\infty; & f &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \cdot \rangle} f(x) dx. \end{aligned}$$

La valeur en $y \in \mathbb{R}^n$ de $\mathcal{F}^+ f$ (resp. $\mathcal{F}^- f$) est le plus souvent notée $\mathcal{F}_y^+ f$ (resp. $\mathcal{F}_y^- f$) et si une notation explicite est souhaitable, on écrit

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^+ f \text{ pour } \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} f(x) dx \quad \left(\text{resp. } \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- f \text{ pour } \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} f(x) dx \right).$$

De plus, si une propriété est valable pour \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^- , on écrit le plus souvent \mathcal{F}^\pm et on a deux énoncés en un, plutôt que de recourir à la formulation “(resp. ...)”. Enfin, en $y = 0$, les deux transformations sont égales: les signes + et - sont donc inutiles; on pose donc $\mathcal{F}_0 f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$.

Remarques. a) Une fonction f mesurable sur \mathbb{R}^n est intégrable sur \mathbb{R}^n si et seulement s'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $e^{\pm i\langle x, y \rangle} f(x)$ soit intégrable sur \mathbb{R}^n car les fonctions

$$f(x) = e^{\mp i\langle x, y \rangle} e^{\pm i\langle x, y \rangle} f(x) \text{ et } e^{\pm i\langle x, y \rangle} f(x)$$

sont simultanément intégrables sur \mathbb{R}^n .

b) Si f_1, \dots, f_n sont des fonctions intégrables sur \mathbb{R} et si on définit f pp sur \mathbb{R}^n par $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$, alors f est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n et on a

$$\mathcal{F}_y^\pm f = \mathcal{F}_{y_1}^\pm f_1 \cdots \mathcal{F}_{y_n}^\pm f_n.$$

Autrement dit, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à variables séparées, $\mathcal{F}^\pm f$ est aussi à variables séparées. (A l'exercice de la page 119, on établit la réciproque de cette propriété.)

c) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a bien sûr

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm f = \mathcal{F}_{x \rightarrow -y}^\mp f = \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\mp \tilde{f} = \mathcal{F}_{x \rightarrow -y}^\pm \tilde{f} \text{ et } \overline{\mathcal{F}^\pm f} = \mathcal{F}^\mp \bar{f} = \mathcal{F}^\pm f^*.$$

d) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et tout changement de variable linéaire $x = Ax' + a$ de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n , on a

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow Ay+a}^\pm f = \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm \left(\frac{e^{\pm i \langle x, A^{-1}a \rangle}}{|\det(A)|} f(\tilde{A}^{-1}x) \right)$$

et

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm f(Ax + a) = \frac{e^{\mp i \langle A^{-1}a, y \rangle}}{|\det(A)|} \mathcal{F}_{x \rightarrow \tilde{A}^{-1}y}^\pm f. \square$$

Exercice. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est non nul et tel que $f \geq 0$ pp, établir que, pour tous $J \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, \dots, x_J \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J c_j \bar{c}_k \mathcal{F}_{x_j - x_k}^\pm f \geq 0, \quad \forall c \in \mathbb{C}^n.$$

Suggestion. Pour tout $c \in \mathbb{C}^n$, on a effectivement

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J c_j \bar{c}_k \mathcal{F}_{x_j - x_k}^\pm f = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left| \sum_{j=1}^J c_j e^{2i\pi x_j y} \right|^2 dy \geq 0. \square$$

6.2 Propriétés fondamentales

Le but de ce paragraphe est d'aboutir au *théorème fondamental* suivant: la transformation de Fourier \mathcal{F}^\pm est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $C_0^0(\mathbb{R}^n)$, de norme égale à 1 et réalisée. (Au paragraphe 6.5, nous établissons en outre que cet opérateur est injectif.)

Théorème 6.2.1 a) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^\pm f$ est une fonction uniformément continue sur \mathbb{R}^n .

b) **Théorème de Riemann-Lebesgue.** Pour tout $f \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}^\pm f$ tend vers 0 à l'infini.

c) L'opérateur $\mathcal{F}^\pm : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$ est linéaire: on a

$$\mathcal{F}^\pm \left(\sum_{j=1}^J c_j f_j \right) = \sum_{j=1}^J c_j \mathcal{F}^\pm f_j$$

pour toute combinaison linéaire d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

d) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^\pm f$ est une fonction bornée sur \mathbb{R}^n ; on a même

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_y^\pm f| = \|\mathcal{F}^\pm f\|_\infty \leq \|f\|, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

e) Pour tout $a > 0$, la fonction $e^{-a|x|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et est telle que

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm e^{-a|x|^2} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{n/2} e^{-|y|^2/(4a)}$$

et

$$\left\| \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm e^{-a|x|^2} \right\|_\infty = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{n/2} = \left\| e^{-a|x|^2} \right\|_1.$$

Preuve. a) De fait, pour tous $y, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{y+h}^\pm f - \mathcal{F}_y^\pm f| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle x, y \rangle} \cdot (e^{\pm i \langle x, h \rangle} - 1) \cdot f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{\pm i \langle x, h \rangle} - 1| \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors de noter qu'une application directe du théorème de la convergence majorée établit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{\pm i \langle x, h_m \rangle} - 1| \cdot |f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty$$

pour toute suite $(h_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ tendant vers 0 dans \mathbb{R}^n .

b) Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_1 \leq 2\varepsilon.$$

Cela étant, nous allons établir que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $|y| > \sqrt{n} \pi / \eta$, on a $|\mathcal{F}_y^\pm f| \leq \varepsilon$, ce qui suffit pour conclure. Or, pour un tel point y , il existe $j \leq n$ tel que $|y_j| > \pi / \eta$ donc tel que

$$\mathcal{F}_y^\pm f = - \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle x', y \rangle} f(x' + \frac{\pi}{y_j} e_j) dx'$$

en recourant au changement de variable linéaire $x = x' + (\pi/y_j)e_j$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_y^\pm f| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\langle x, y \rangle} \cdot [f(x) - f(x + \frac{\pi}{y_j}e_j)] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{y_j}e_j) \right\|_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

c) est immédiat.

d) est connu.

e) De fait, on a successivement

$$\mathcal{F}_y^\pm e^{-a|x|^2} = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2} (\cos(x_j y_j) + i \sin(x_j y_j)) dx_j = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-y_j^2/(4a)}. \blacksquare$$

Insistons sur la conséquence suivante de d).

Corollaire 6.2.2 *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers f_0 , alors la suite $(\mathcal{F}^\pm f)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^n vers $\mathcal{F}^\pm f_0$. \blacksquare*

6.3 Propriétés liées à la dérivabilité

Théorème 6.3.1 *Pour tout $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ tel que $D^\alpha f$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$, on a*

$$\mathcal{F}_y^\pm(D^\alpha f) = (\mp i y_1)^{\alpha_1} \cdots (\mp i y_n)^{\alpha_n} \mathcal{F}_y^\pm f$$

en abrégé

$$\mathcal{F}_y^\pm(D^\alpha f) (\mp i y)^\alpha \mathcal{F}_y^\pm f$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$.

En particulier, chacune de ces transformées de Fourier est uniformément continue sur \mathbb{R}^n et tend vers 0 à l'infini.

Preuve. Une récurrence aisée établit qu'il suffit de démontrer que, pour tout $f \in C_1(\mathbb{R}^n)$ tel que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $k \leq n$ tel que $D_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}_y^\pm D_k f = \mp i y_k \mathcal{F}_y^\pm f$.

Pour presque tout $(x_1, \dots, [x_k], \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, vu le théorème de Fubini, la fonction $e^{\pm i\langle x, y \rangle} D_k f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} . De plus, le théorème d'intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\pm i\langle x, y \rangle} D_k f(x) dx_k = e^{\pm i\langle x, y \rangle} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \mp i y_k \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i\langle x, y \rangle} f(x) dx_k$$

car l'intégrale du second membre a un sens. Le terme intégré vaut alors 0 car si une fonction intégrable sur \mathbb{R} admet une limite en $\pm\infty$, cette limite est nulle. La conclusion s'ensuit aisément. ■

Remarque. On peut aussi établir que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ sont tels que $\mathcal{F}_y^+ g = -iy\mathcal{F}_y^+ f$, alors on a $f(x) = -\int_x^{+\infty} g(t) dt$ pp sur \mathbb{R} . □

Théorème 6.3.2 Si f est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n telle que

$$x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq L,$$

alors $\mathcal{F}^\pm f$ appartient à $C_L(\mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm(x^\alpha f(x)) = (\mp i D_{y_1})^{\alpha_1} \cdots (\mp i D_{y_n})^{\alpha_n} \mathcal{F}_y^\pm f$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$.

Preuve. De fait, $\mathcal{F}_y^\pm f$ est une intégrale paramétrique qui appartient à $C_L(\mathbb{R}^n)$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration vu que

- a) $e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(x)$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,
- b) $D_y^\alpha(e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(x)) = (\pm i x_1)^{\alpha_1} \cdots (\pm i x_n)^{\alpha_n} e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$,
- c) pour tout compact K de \mathbb{R}^n et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$, on a

$$\sup_{y \in K} |D_y^\alpha(e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(x))| = |x^\alpha f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n). \blacksquare$$

6.4 Propriétés d'intégrabilité

Remarque. En général, $\mathcal{F}^\pm f$ n'est pas intégrable. Ainsi, pour tout $a > 0$, $\chi_{]-a, a[}$ est certainement une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Cependant

$$\mathcal{F}_y^\pm \chi_{]-a, a[} = \int_{-a}^a \cos(xy) dx = 2 \frac{\sin(ay)}{y}$$

n'est pas intégrable sur \mathbb{R} sinon

$$\frac{\sin(y - \pi/2)}{y - \pi/2} = -\frac{\cos(y)}{y - \pi/2}$$

serait intégrable en $+\infty$ donc aussi $\cos(y)/y$ et par conséquent

$$\frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x} \cdot \cos(x) = \frac{1}{x}$$

serait intégrable en $+\infty$, ce qui est contradictoire. □

Voici cependant deux cas particuliers fort intéressants où l'intégrabilité de $\mathcal{F}^\pm f$ est assurée.

Proposition 6.4.1 *Si $f \in L^1 \cap L^\infty$ est tel que $\mathcal{F}^\pm f \geq 0$, $\mathcal{F}^\pm f$ est intégrable.*

Preuve. Cela résulte d'une application du théorème de la convergence monotone à la suite

$$(f_m(y) = \mathcal{F}_y^\pm f \cdot e^{-|y|^2/m})_{m \in \mathbb{N}_0} :$$

- a) chaque f_m est continu et majoré par la fonction intégrable $\|f\|_1 \cdot \exp(-|y|^2/m)$ donc est intégrable,
- b) en tout $y \in \mathbb{R}^n$, la suite $(f_m(y))_{m \in \mathbb{N}_0}$ croît vers $\mathcal{F}_y^\pm f$,
- c) la suite des intégrales des f_m est majorée car, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a successivement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(x) e^{-|y|^2/m} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \mathcal{F}_{y \rightarrow x}^\pm e^{-|y|^2/m} dx \\ &= (m\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-m|x|^2/4} dx \leq (2\pi)^n \|f\|_\infty \end{aligned}$$

(pour établir la deuxième égalité, on utilise d'abord le théorème de Tonelli pour obtenir que la fonction $\exp(\pm i \langle x, y \rangle - |y|^2/m) \cdot f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{2n} , puis le théorème de Fubini). ■

Remarque. Le résultat précédent peut être amélioré de la manière suivante: si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est borné sur un voisinage de l'origine et tel que $\mathcal{F}^\pm f \geq 0$, alors $\mathcal{F}^\pm f$ est intégrable sur \mathbb{R}^n . Soient $R, C > 0$ tels que $|f| \leq C$ pp sur la boule $\{x : |x| \leq R\}$ de \mathbb{R}^n . On procède alors comme dans la preuve précédente jusqu'à obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_m(y) dy = (m\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-m|x|^2/4} dx$$

et on remarque que cette expression est majorée par

$$C(m\pi)^{n/2} \int_{|x| \leq R} e^{-m|x|^2/4} dx + (m\pi)^{n/2} \int_{|x| \geq R} |f(x)| \frac{2^n S}{m^{n/2} |x|^n} dx$$

donc par $C(2\pi)^n + S(2\sqrt{\pi}/R)^n \|f\|_1$, si on pose $S = \sup \{t^{n/2} e^{-t} : t \geq 0\}$. □

Proposition 6.4.2 *Si toutes les dérivées $D^\alpha f$ d'ordre $|\alpha| \leq L$ de la fonction $f \in C_L(\mathbb{R})$ sont intégrables sur \mathbb{R}^n et si on a $L > n$, alors $\mathcal{F}^\pm f$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et il existe même une constante $C > 0$ telle que*

$$|\mathcal{F}_y^\pm f| \leq \frac{C}{1 + |y|^L}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Établissons d'abord que, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, il existe $C_M > 0$ tel que

$$|x|^M \leq C_M \sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De fait, la fonction $\sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha|$ est continue sur \mathbb{R}^n et strictement positive sur le compact $\{x : |x| = 1\}$. Si on pose

$$r_M = \inf_{|x|=1} \sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha|,$$

on voit de suite que $C_M = 1/r_M$ convient.

Cela étant, il existe $C > 0$ tel que

$$(1 + |y|^L) \cdot |\mathcal{F}_y^\pm f| \leq \left(1 + C \sum_{|\alpha|=L} |y^\alpha|\right) \cdot |\mathcal{F}_y^\pm f|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme les fonctions $(\mp iy)^\alpha \mathcal{F}_y^\pm f = \mathcal{F}_y^\pm (D^\alpha f)$ sont bornées sur \mathbb{R}^n pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$, il existe donc $C' > 0$ tel que $|\mathcal{F}_y^\pm f| \leq C'/(1 + |y|^L)$, ce qui suffit. ■

6.5 Propriétés remarquables

Théorème 6.5.1 Pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et tous $f_1, \dots, f_J \in L^1$, on a

$$\mathcal{F}^\pm(f_1 \star \dots \star f_J) = \mathcal{F}^\pm f_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{F}^\pm f_J.$$

Preuve. Une récurrence aisée ramène tout le problème au cas $J = 2$. Or, pour tous $f, g \in L^1$, une application directe du théorème de Tonelli établit que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(t)g(x-t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{2n} . Dès lors, en recourant au théorème de Fubini, il vient

$$\mathcal{F}_y^\pm(f \star g) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle y, t \rangle} f(t) dt \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle y, x-t \rangle} g(x-t) dx$$

et on conclut aussitôt au moyen du changement de variable $x' = x - t$. ■

Proposition 6.5.2 * Si la fonction h est holomorphe sur $b = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ et vérifie $h(0) = 0$, alors, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\|f\| < R$, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $h \circ \mathcal{F}^+ f = \mathcal{F}^+ g$.

Suggestion. Par hypothèse, il existe des $c_k \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow_{K \subset \subset b} h(z)$ donc tels que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (\mathcal{F}^+ f)^n \xrightarrow{\mathbb{R}} h \circ \mathcal{F}^+ f$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (\star_{j=1}^k f)$ est de Cauchy dans L^1 et sa limite g vérifie

$$\mathcal{F}^+ g = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k \mathcal{F}^+ (\star_{j=1}^k f) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k (\mathcal{F}^+ f)^k = h \circ \mathcal{F}^+ f.*$$

Dans le même genre de résultats, on peut aussi établir que si h est une fonction holomorphe sur le domaine $V \subset \mathbb{C}$, alors, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}_x^+ f \in V$ pour tout $x \in [a, b]$, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}_x^+ g = h \circ \mathcal{F}_x^+ f$ pour tout $x \in [a, b]$. En particulier, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\mathcal{F}_x^+ f \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}_x^+ g = 1/(\mathcal{F}_x^+ f)$ pour tout $x \in [a, b]$. (Cf. [2], pp 65–68)

Théorème 6.5.3 (Transfert) Pour tous $f, g \in L^1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}^{\pm} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \mathcal{F}^{\pm} f \, dx.$$

Preuve. Comme la fonction $e^{\pm i \langle x, y \rangle} f(x)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{2n} , c'est une conséquence directe du théorème de Fubini. ■

Théorème 6.5.4 (Fourier) Si $f \in L^1$ vérifie $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^1$, alors on a

$$\mathcal{F}^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} f = (2\pi)^n f \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Vu la formule

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} e^{-a|x|^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|y|^2/(4a)}, \quad \forall a > 0,$$

il est immédiat que, pour tout $k > 0$, l'énoncé s'applique à la fonction $\exp(-k^2|x|^2)$.

A partir de $g_1(x) = \pi^{-n/2} \exp(-|x|^2)$, on vérifie de suite qu'on peut définir une unité approchée de convolution $(g_m(x) = m^n g_1(mx))_{m \in \mathbb{N}_0}$. En particulier, on a

a) $f \star g_m \rightarrow f$ dans L^1 ,

b) $g \star g_m \Rightarrow_{\mathbb{R}^n} g$ pour toute fonction g uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^n donc pour $g = \mathcal{F}^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} f$.

Cela étant, il vient successivement

$$\begin{aligned} (2\pi)^n (f \star g_m)(x) &= (f \star \mathcal{F}^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} g_m)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}_{x-y}^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} g_m \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}_{t \rightarrow y}^{\pm} (e^{\mp i \langle x, t \rangle} \mathcal{F}_t^{\pm} g_m) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_y^{\pm} f \cdot e^{\mp i \langle x, y \rangle} \mathcal{F}_y^{\pm} g_m \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{t \rightarrow y}^{\pm} (e^{\mp i \langle x, t \rangle} \mathcal{F}_t^{\pm} f) \cdot g_m(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{x-y}^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} f \cdot g_m(y) \, dy = ((\mathcal{F}^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} f) \star g_m)(x) \end{aligned}$$

et on conclut aussitôt en recourant au fait que, de toute suite convergente dans L^1 , on peut extraire une sous-suite qui converge *pp* vers la même limite (on a utilisé le théorème de transfert pour obtenir les quatrième et cinquième égalités).■

Corollaire 6.5.5 a) *L'opérateur $\mathcal{F}^\pm : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ est injectif.*

b) *Si $f \in L^1$ est tel que $\mathcal{F}^\pm f \in L^1$, alors f est égal *pp* sur \mathbb{R}^n à une fonction uniformément continue, bornée et tendant vers 0 à l'infini. De plus, on a $\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}^\pm f\|_1$.*

c) *Si la fonction f est intégrable sur \mathbb{R}^n , continue à l'origine et telle que $\mathcal{F}^\pm f$ appartienne à L^1 et soit ≥ 0 , alors on a*

$$f(0) = \|f\|_\infty = (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}^\pm f\|_1.$$

d) *Une fonction $f \in L^1$ est paire (resp. impaire) si et seulement si $\mathcal{F}^\pm f$ est une fonction paire (resp. impaire).*

Preuve. a) De fait, si $f \in L^1$ vérifie $\mathcal{F}^\pm f = 0$, on a bien sûr les égalités $0 = \mathcal{F}^\mp 0 = (2\pi)^n f$ *pp*.

b) C'est trivial car on a $f = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm f$ *pp*.

c) résulte aussitôt des inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq \|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}^\pm f\|_1 \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \, dx = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}_0 \mathcal{F}^\pm f = f(0). \end{aligned}$$

d) Dans le cas de la parité, par exemple, cela résulte aussitôt de ce que

$$\mathcal{F}_y^\pm f - \mathcal{F}_{-y}^\pm f = \mathcal{F}_y^\pm (f - \tilde{f}). \blacksquare$$

Exercice. *Etant donné $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $n \geq 2$, établir que $\mathcal{F}^\pm f$ est à variables séparées si et seulement si f est à variables séparées.*

Suggestion. La suffisance de la condition est connue; établissons sa nécessité. Soit δ la fonction $\rho_{1,1}$ définie à l'exemple fondamental c)1) du paragraphe 5.6 et, pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\delta_\varepsilon(x) = \delta(x/\varepsilon) / (\varepsilon^n \|\delta\|_1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il est alors clair que $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une unité approchée de convolution constituée de fonctions à variables séparées. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm \delta_{1/m} = \mathcal{F}^\pm (f \star \delta_{1/m})$ est une fonction intégrable et à variables séparées. Vu le théorème de Fourier, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction intégrable $f \star \delta_{1/m}$ est à variables séparées. Dès lors, comme la suite $f \star \delta_{1/m}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers f , il en existe une sous-suite qui converge *pp* sur \mathbb{R}^n vers f et f est donc à variables séparées, vu l'exercice de la page 58.□

Exercice. L'opérateur $\mathcal{F}^\pm: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$ n'est pas surjectif.

Suggestion. Nous allons établir cette propriété dans le cas $n = 1$; son extension au cas général résulte aussitôt de l'exercice précédent.

Bien sûr, la fonction

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y \mapsto \begin{cases} 1/\ln(y) & \text{si } e < y \\ y/e & \text{si } 0 \leq y \leq e \\ -g(-y) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

est uniformément continue sur \mathbb{R} et tend vers 0 à l'infini. De plus, pour tout $r > e$, on a

$$\int_e^r \frac{g(y)}{y} dy = \int_e^r \frac{dy}{y \ln(y)} = \ln(\ln(r))$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ si $r \rightarrow +\infty$. Si la fonction impaire g est la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$, f est une fonction impaire également et on a

$$\begin{aligned} \int_e^R \frac{\mathcal{F}_y^\pm f}{y} dy &= 2i \int_e^R \frac{1}{y} \left(\int_0^{+\infty} f(x) \sin(xy) dx \right) dy \\ &= 2i \int_0^{+\infty} f(x) \left(\int_{ex}^{Rx} \frac{\sin(y)}{y} dy \right) dx \end{aligned}$$

(pour obtenir la dernière égalité, on a appliqué les théorèmes de Tonelli et de Fubini). Comme la fonction

$$h: [0, +\infty[; \quad t \mapsto \int_0^t \frac{\sin(y)}{y} dy$$

est continue sur $[0, +\infty[$, vaut 0 en 0 et converge vers $\pi/2$ si $y \rightarrow +\infty$, il existe $C > 0$ tel que $|h(t)| \leq C$ pour tout $t \geq 0$ donc tel que

$$\left| \int_e^R \frac{\mathcal{F}_y^\pm f}{y} dy \right| \leq 2C \|f\|.$$

D'où une contradiction. \square

Théorème 6.5.6 (Parseval) a) Si $f, g \in L^1$ sont tels que $\mathcal{F}^\pm f \in L^1$, alors $\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g$ est intégrable et on a

$$\mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g) = (2\pi)^n f \star g \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \cdot \overline{\mathcal{F}^\pm g} dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dx.$$

b) Pour tout $f \in L^1 \cap L^2$ (ce qui a lieu pour tout $f \in L^1 \cap L^\infty$), on a

$$\mathcal{F}^\pm f \in L^2 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}^\pm f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2.$$

De plus, pour tous $f, g \in L^1 \cap L^2$, on a

$$\begin{cases} \mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g \in L^1 \\ \mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g) = (2\pi)^n f \star g \text{ sur } \mathbb{R}^n \\ \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \cdot \overline{\mathcal{F}^\pm g} dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dx. \end{cases}$$

Preuve. a) La fonction $f \star g$ est intégrable sur \mathbb{R}^n de même que la fonction $\mathcal{F}^\pm(f \star g) = \mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g$, comme produit d'un élément de L^1 par un élément de L^∞ . Dès lors, on obtient

$$\mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g) = \mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm(f \star g) = (2\pi)^n f \star g \text{ pp sur } \mathbb{R}^n$$

vu le théorème de Fourier, donc partout sur \mathbb{R}^n car $f \star g$ est continu sur \mathbb{R}^n comme produit de convolution de $f \in L^\infty$ par $g \in L^1$. La deuxième formule s'obtient de suite en appliquant la première en 0 pour $f = f$ et $g = g^*$; on peut aussi l'obtenir directement en appliquant successivement les théorèmes de transfert et de Fourier.

b) La fonction $\mathcal{F}^\pm f$ est bien sûr mesurable sur \mathbb{R}^n et vérifie

$$|\mathcal{F}^\pm f|^2 = \mathcal{F}^\pm f \cdot \overline{\mathcal{F}^\pm f} = \mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm f^* = \mathcal{F}^\pm(f \star f^*).$$

Comme $f \star f^*$ appartient à $L^1 \cap L^\infty$ et vérifie $\mathcal{F}^\pm(f \star f^*) \geq 0$, $\mathcal{F}^\pm(f \star f^*)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n . Au total, on a bien $\mathcal{F}^\pm f \in L^2$ et

$$\|\mathcal{F}^\pm f\|_2^2 = \mathcal{F}_0 \mathcal{F}^\pm(f \star f^*) = (2\pi)^n \cdot (f \star f^*)(0) = (2\pi)^n \|f\|_2^2.$$

Cela étant, la fonction

$$\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g = \mathcal{F}^\pm(f \star g) \text{ pp sur } \mathbb{R}^n$$

est intégrable comme produit de deux éléments de L^2 . Dès lors le théorème de Fourier donne

$$\mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm(f \star g) = (2\pi)^n f \star g \text{ pp sur } \mathbb{R}^n$$

donc partout sur \mathbb{R}^n car $f \star g$ est continu sur \mathbb{R}^n , comme produit de convolution de deux éléments de L^2 . La dernière formule s'obtient de suite en appliquant la deuxième en 0 pour $f = f$ et $g = g^*$. ■

Exercice. L'espace $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des éléments f de $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $(1 + |x|^2)^p D^\alpha f(x)$ soit bornée sur \mathbb{R}^n . Etablir successivement que

- $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est une sous-algèbre de $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ contient $D_\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ contient toutes les dérivées de ses éléments.

d) tout élément de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est une fonction intégrable.

e) $\mathcal{F}^\pm \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Dès lors, la restriction suivante de la transformation de Fourier

$$(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^\pm : \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$$

est une bijection linéaire d'inverse égal à $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^\mp$.

f) pour tous $f, g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, les fonctions f et g sont convolables et telles que $f \star g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Suggestion. f) Comme tout élément de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est intégrable et de carré intégrable, f et g sont convolables et tels que $\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ comme produit de deux éléments de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour conclure, il suffit de noter qu'on a $\mathcal{F}^\pm(f \star g) = \mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g$ donc $f \star g = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g) \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. \square

Exercice. Etant donné $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, posons

$$S_f = \left\{ \sum_{k=1}^K c_k f(\cdot + r_k) : c_k \in \mathbb{C}, r_k \in \mathbb{R}^n, K \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Etablir successivement que

a) l'adhérence $\overline{S_f}$ de S_f dans L^1 est un sous-espace vectoriel de L^1 .

b) pour tout $g \in \overline{S_f}$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a $g(\cdot + r) \in \overline{S_f}$.

c) pour tout $g \in \overline{S_f}$, on a $\overline{S_g} \subset \overline{S_f}$.

Un théorème de N. Wiener signale que S_f est une partie dense de L^1 si et seulement si on a $\mathcal{F}_x^\pm f \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Cf. [2], pp. 68–73.) \square

Remarque. La fonction

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$$

est intégrable et à valeurs positives sur \mathbb{R} . De plus, on a $\|H\|_1 = 1$; on peut donc utiliser H pour définir une unité approchée de convolution. Enfin, on a

$$\mathcal{F}_y^+ H = (1 - |y|) \chi_{[-1,1]}.$$

Dès lors, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, la suite $f \star H_m$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$ vers f alors que $\mathcal{F}^+(f \star H_m) = \mathcal{F}^+ f \cdot \mathcal{F}^+ H_m$ est une fonction à support compact. \square

6.6 Formule de Bochner

Théorème 6.6.1 Si $f \in L^1$ est une fonction radiale, alors $\mathcal{F}^\pm f$ est aussi une fonction radiale.

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice orthogonale U , on a $\mathcal{F}_y^\pm f = \mathcal{F}_{Uy}^\pm f$. Or il vient successivement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{Uy}^\pm f &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle x, Uy \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle \tilde{U}x, y \rangle} f(\tilde{U}x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle z, y \rangle} f(z) dz = \mathcal{F}_y^\pm f\end{aligned}$$

(pour obtenir l'avant dernière égalité, on a effectué le changement de variable linéaire $\tilde{U}x = z$). ■

Théorème 6.6.2 (Formule de Bochner) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale. Si on définit g pp sur $[0, +\infty[$ par $r \mapsto f(x)$ si $|x| = r$, il vient*

$$\mathcal{F}_y^\pm f = \int_0^{+\infty} g(r) r^{n-1} V_n(r|y|) dr$$

où

$$\begin{aligned}V_1(t) &= 2 \cos(t) \\ V_n(t) &= 4 \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos(\theta)) \sin^{n-2}(\theta) d\theta \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

donc, en particulier, $V_3(t) = 4\pi \sin(t)/t$.

Preuve. Le cas $n = 1$ est immédiat car f est alors une fonction paire et il vient

$$\mathcal{F}_y^\pm f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ixy} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \cos(x|y|) dx.$$

Pour le cas général, on procède comme suit:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y^\pm f &= \mathcal{F}_{|y|e_1}^\pm f = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\pm ix_1|y|} f(x_1, z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ix_1|y|} dx_1 \int_0^{+\infty} \rho^{n-2} g\left(\sqrt{x_1^2 + \rho^2}\right) d\rho \cdot \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \\ &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^{+\infty} g(r)r^{n-1} dr \int_0^\pi e^{\pm ir|y|\cos(\theta)} \sin^{n-2}(\theta) d\theta\end{aligned}$$

(pour obtenir l'avant dernière égalité, on effectue le passage en coordonnées polaires dans \mathbb{R}^{n-1} et on note que $2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$ est égal à $(n-1)$ fois la mesure de la boule de rayon 1 dans \mathbb{R}^{n-1} ; pour obtenir la dernière égalité, on effectue le passage en coordonnées polaires $x_1 = r \cos(\theta)$, $\rho = r \sin(\theta)$). Pour conclure, il suffit alors de transformer l'intégrale $\int_{\pi/2}^\pi$ par $\theta = \pi - \varphi$.

La valeur particulière de V_3 s'obtient directement par variation de la primitive si on note que

$$D_\theta \sin(t \cos(\theta)) = -t \cos(t \cos(\theta)) \sin(\theta). \blacksquare$$

Exercice. Dans \mathbb{R}^3 , pour tout $R > 0$, établir l'égalité

$$\mathcal{F}^\pm \chi_{\{x:|x|\leq R\}} = \frac{4\pi}{|y|^3} (\sin(R|y|) - R|y| \cos(R|y|)).$$

(Bien remarquer que, par continuité, on a de suite $\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{F}^\pm \chi_{\{x:|x|\leq R\}} = 4\pi R^3/3$.)

Exercice. Dans \mathbb{R}^3 , pour tout $a > 0$, établir l'égalité

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow k}^\pm e^{-a|x|} = 8\pi \frac{a}{(a^2 + |k|^2)^2}.$$

Suggestion. Il vient successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow k}^\pm e^{-a|x|} &= 4\pi \int_0^{+\infty} e^{-ar} r^2 \frac{\sin(r|k|)}{r|k|} dr = \frac{4\pi}{|k|} \Im \int_0^{+\infty} r e^{(-a+i|k|)r} dr \\ &= \frac{4\pi}{|k|} \Im \frac{(a+i|k|)^2}{(a^2+|k|^2)^2} = 8\pi \frac{a}{(a^2+|k|^2)^2} \end{aligned}$$

(la dernière égalité s'obtient par intégration par parties). \square

Exercice. Dans \mathbb{R}^3 , pour tout $a > 0$, établir l'égalité

$$\mathcal{F}_{(k,l,m)}^\pm(x, y, z) e^{-a|(x,y,z)|} = \mp i(D_k, D_l, D_m) \frac{8\pi a}{(a^2 + k^2 + l^2 + m^2)^2}.$$

Suggestion. C'est une simple application du deuxième théorème du paragraphe 6.3 car on a

$$(x, y, z)^\alpha e^{-a|(x,y,z)|} \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \square$$

6.7 Transformations de Fourier en cosinus ou en sinus

Définitions. Pour tout $f \in L^1(]0, +\infty[)$ et tout $y \in [0, +\infty[$, les fonctions $f(x) \cos(xy)$ et $f(x) \sin(xy)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$. Les intégrales trigonométriques

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^c f = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy) dx \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^s f = \int_0^{+\infty} f(x) \sin(xy) dx$$

sont appelées respectivement *transformation de Fourier en cosinus* et *transformation de Fourier en sinus* de f .

Définitions. Pour tout $f \in L^1(]0, +\infty[)$, la fonction symétrisée f_s de f et la fonction antisymétrisée f_a de f sont définies pp sur \mathbb{R} par

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Bien sûr, ces fonctions f_s et f_a appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 6.7.1 a) Pour tout $f \in L^1(]0, +\infty[)$, on a

$$\mathcal{F}^c f = \frac{1}{2} (\mathcal{F}^\pm f_s)|_{]0, +\infty[} \text{ et } \mathcal{F}^s f = \pm \frac{1}{2i} (\mathcal{F}^\pm f_a)|_{]0, +\infty[}.$$

b) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{F}^\pm f = \mathcal{F}^c((f + \tilde{f})|_{]0, +\infty[}) \pm i\mathcal{F}^s((f - \tilde{f})|_{]0, +\infty[}) \text{ sur } [0, +\infty[.$$

En particulier,

b.1) si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est pair, on a $\mathcal{F}^\pm f = 2\mathcal{F}^c(f|_{]0, +\infty[})$ sur $[0, +\infty[$,

b.2) si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est impair, on a $\mathcal{F}^\pm f = \pm 2i\mathcal{F}^s(f|_{]0, +\infty[})$ sur $[0, +\infty[$.

Preuve. a) De fait, pour tout $y \geq 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^c f &= \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f_s(x) \cos(xy) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} f_s(x) dx = \frac{1}{2} \mathcal{F}_y^\pm f_s \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{F}_y^s f = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f_a(x) \sin(xy) dx = \pm \frac{1}{2i} \mathcal{F}_y^\pm f_a.$$

b) De fait, pour tout $y \geq 0$, on a

$$\mathcal{F}_y^\pm f = \int_0^{+\infty} (\cos(xy) \pm i \sin(xy)) f(x) dx + \int_{-\infty}^0 (\cos(xy) \pm i \sin(xy)) f(x) dx$$

et il suffit d'effectuer le changement de variable $x' = -x$ dans la dernière intégrale pour conclure. ■

Remarque. On déduit facilement les propriétés des applications \mathcal{F}^c et \mathcal{F}^s à partir de celles des opérateurs \mathcal{F}^\pm . Mentionnons-en trois. □

Théorème 6.7.2 a) Pour tout $f \in L^1(]0, +\infty[)$, $\mathcal{F}^c f$ et $\mathcal{F}^s f$ sont des fonctions uniformément continues et bornées sur $]0, +\infty[$ qui tendent vers 0 en $+\infty$. De plus, on a

$$\sup_{y \in]0, +\infty[} |\mathcal{F}_y^c f| \leq \|f\|_1 \quad \text{et} \quad \sup_{y \in]0, +\infty[} |\mathcal{F}_y^s f| \leq \|f\|_1.$$

b) Les opérateurs

$$\mathcal{F}^c : L^1(]0, +\infty[) \rightarrow C_0^0(]0, +\infty[) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^s : L^1(]0, +\infty[) \rightarrow C_0^0(]0, +\infty[)$$

sont linéaires. ■

Théorème 6.7.3 (Fourier) a) Pour toute fonction $f \in L^1(]0, +\infty[)$ telle que $\mathcal{F}^c f \in L^1(]0, +\infty[)$, on a $\mathcal{F}^c \mathcal{F}^c f = \frac{\pi}{2} f$ pp sur $]0, +\infty[$.

b) Pour toute fonction $f \in L^1(]0, +\infty[)$ telle que $\mathcal{F}^s f \in L^1(]0, +\infty[)$, on a $\mathcal{F}^s \mathcal{F}^s f = \frac{\pi}{2} f$ pp sur $]0, +\infty[$.

Preuve. a) De fait, on a successivement

$$\mathcal{F}^c \mathcal{F}^c f = \frac{1}{2} \mathcal{F}^c(\mathcal{F}^+ f_s)|_{]0, +\infty[} = \frac{1}{4} (\mathcal{F}^- \mathcal{F}^+ f_s)|_{]0, +\infty[} = \frac{\pi}{2} f$$

pp sur $]0, +\infty[$ si on remarque que $\mathcal{F}^+ f_s$ est une fonction paire.

b) De fait, on a successivement

$$\mathcal{F}^s \mathcal{F}^s f = \frac{1}{2i} \mathcal{F}^s(\mathcal{F}^+ f_a)|_{]0, +\infty[} = \frac{1}{4} (\mathcal{F}^- \mathcal{F}^+ f_a)|_{]0, +\infty[} = \frac{\pi}{2} f$$

pp sur $]0, +\infty[$ si on remarque que $\mathcal{F}^+ f_a$ est une fonction impaire. ■

Théorème 6.7.4 (Parseval) a) Si les fonctions $f, g \in L^1(]0, +\infty[)$ sont telles que $\mathcal{F}^c f \in L^1(]0, +\infty[)$, alors $\mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et tel que

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} f g \, dx.$$

De même, si $f, g \in L^1(]0, +\infty[)$ sont tels que $\mathcal{F}^s f \in L^1(]0, +\infty[)$, alors $\mathcal{F}^s f \cdot \mathcal{F}^s g$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et tel que

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}^s f \cdot \mathcal{F}^s g \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} f g \, dx.$$

b) Pour tout $f \in L^1(]0, +\infty[) \cap L^2(]0, +\infty[)$, on a

$$\mathcal{F}^c f, \mathcal{F}^s f \in L^2(]0, +\infty[) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}^c f\|_2 = \|\mathcal{F}^s f\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\|_2.$$

De plus, pour tous $f, g \in L^1(]0, +\infty[) \cap L^2(]0, +\infty[)$, on a

$$\mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g, \mathcal{F}^s f \cdot \mathcal{F}^s g \in L^1(]0, +\infty[)$$

et

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g \, dx = \int_0^{+\infty} \mathcal{F}^s f \cdot \mathcal{F}^s g \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} fg \, dx.$$

Preuve. a) Etablissons le cas de \mathcal{F}^c ; celui de \mathcal{F}^s se traite de manière analogue. Il est clair que $\mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, on a bien sûr

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g \, dx &= \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^+ f_s \cdot \mathcal{F}^+ g_s \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} (f_s \star g_s)(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} fg \, dx. \end{aligned}$$

b) Etablissons le cas de \mathcal{F}^c ; celui de \mathcal{F}^s se traite de manière analogue. Il est clair que $\mathcal{F}^c f$ appartient à $L^2(]0, +\infty[)$. De plus, on a bien sûr

$$\|\mathcal{F}^c f\|_2^2 = \frac{1}{8} \|\mathcal{F}^+ f_s\|_2^2 = \frac{\pi}{4} \|f_s\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \|f\|_2^2.$$

Cela étant, il est clair que $\mathcal{F}^c f \cdot \mathcal{F}^c g$ appartient à $L^1(]0, +\infty[)$. On termine alors comme en a) en utilisant bien sûr cette fois-ci la partie b) du théorème de Parseval. ■

6.8 Exemples remarquables

Voici quelques formules remarquables présentées sous la forme d'exercices.

Exercice. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}_y^c \chi_{]0, a]} = \frac{\sin(ay)}{y} \text{ et } \mathcal{F}_y^s \chi_{]0, a]} = \frac{1 - \cos(ay)}{y} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Il suffit de prendre les parties réelle et imaginaire dans l'égalité

$$\int_0^a e^{ixy} \, dx = -i \frac{e^{ixy}}{y} \Big|_0^a,$$

valable pour tout $y > 0$. □

Exercice. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^c e^{-ax} = \frac{a}{a^2 + y^2} \text{ et } \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^s e^{-ax} = \frac{y}{a^2 + y^2} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Suggestion. Il suffit de prendre les parties réelle et imaginaire dans l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+iy)x} dx = \frac{e^{(-a+iy)x}}{-a+iy} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{-a+iy}, \quad \forall y > 0. \square$$

Exercice. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^c \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ay} \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Suggestion. Cela résulte de la formule précédente et du théorème de Fourier. \square

Exercice. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^c e^{-ax^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-y^2/(4a)} \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Suggestion. Il s'agit là d'un résultat connu (cf. les résultats obtenus comme conséquences de l'intégrale de Poisson). \square

Exercice. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}_y^c \left(\left(1 - \frac{|\cdot|}{a} \right) \chi_{[-a,a]} \right) = \frac{1}{2a} \left(\frac{\sin(ay/2)}{y/2} \right)^2.$$

Suggestion. On a bien sûr

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^c \left(\left(1 - \frac{|\cdot|}{a} \right) \chi_{[-a,a]} \right) &= a \int_0^1 (1-x) \cos(axy) dx = a \int_0^1 (1-x) D_x \frac{\sin(axy)}{ay} dx \\ &= a \int_0^1 \frac{\sin(axy)}{ay} dx = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\sin(ay/2)}{ay/2} \right)^2. \square \end{aligned}$$

6.9 Intégrales trigonométriques

Définition. Une *intégrale trigonométrique* est une intégrale qui se présente sous une des formes

$$\int_a^{\rightarrow+\infty} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx \text{ ou } \int_a^{\rightarrow+\infty} f(x) \cdot \sin(\lambda x) dx$$

avec $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f fonction mesurable sur $]a, +\infty[$; c'est donc une fonction de λ définie sur une partie de \mathbb{R} . En fait, on exige l'intégrabilité de $f(x) \cdot \cos(\lambda x)$ ou de $f(x) \cdot \sin(\lambda x)$ sur $]a, \beta[$ pour tout $\beta > a$; ceci est notamment réalisé si ces fonctions sont intégrables sur $]a, +\infty[$, auquel cas on n'a plus besoin de flécher l'intégrale.

Remarquons que les transformées de Fourier en cosinus et en sinus dans L^1 sont des intégrales trigonométriques particulières.

Proposition 6.9.1 *Soit $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable sur $]a, +\infty[$, les intégrales trigonométriques*

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx \text{ et } \int_a^{+\infty} f(x) \cdot \sin(\lambda x) dx$$

existent pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a

$$\int_a^\beta f(x) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} dx \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_a^{+\infty} f(x) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} dx$$

si $\beta \rightarrow +\infty$.

Inversement s'il existe $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ tel que la fonction f soit mesurable sur $]a, +\infty[$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les intégrales trigonométriques

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx \text{ et } \int_a^{+\infty} f(x) \cdot \sin(\lambda x) dx$$

existent, alors f est intégrable sur $]a, +\infty[$.

Preuve. Tout est direct car on a notamment

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \int_\beta^{+\infty} f(x) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} dx \right| \leq \int_\beta^{+\infty} |f(x)| dx$$

pour tout $\beta > a$ et tout $f \in L^1(]a, +\infty[)$. ■

Lemme 6.9.2 *Soient $[a, b[$ un intervalle borné de \mathbb{R} et λ un point de $]0, +\infty[$. Si f est une fonction mesurable, à valeurs positives et décroissante sur $[a, b[$ et si $f(x) \cos(\lambda x)$ (resp. $f(x) \sin(\lambda x)$) est une fonction intégrable sur $]a, b[$, alors on a*

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} dx \right| \leq \frac{2}{\lambda} f(a).$$

Preuve. Établissons la formule en cosinus; l'autre s'établit de même.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, posons $a_{m,k} = a + k(b-a)/m$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il vient alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_{m,k}}^{a_{m,k+1}} (f(x) - f(a_{m,k})) \cdot \cos(\lambda x) dx \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} f(a_{m,k}) \int_{a_{m,k}}^{a_{m,k+1}} \cos(\lambda x) dx \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx \right| \leq \frac{b-a}{m} f(a) + \frac{2}{\lambda} f(a)$$

si on remarque que la deuxième somme peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} & f(a_{m,0}) \int_a^{a_{m,1}} \cos(\lambda x) dx + \sum_{k=1}^{m-1} f(a_{m,k}) \cdot \left(\int_a^{a_{m,k+1}} - \int_a^{a_{m,k}} \cos(\lambda x) dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} (f(a_{m,k}) - f(a_{m,k+1})) \int_a^{a_{m,k+1}} \cos(\lambda x) dx + f(a_{m,m-1}) \int_a^b \cos(\lambda x) dx \end{aligned}$$

donc a son module majoré par $2f(a)/\lambda$ car, pour tous $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $r < s$, on a

$$\left| \int_r^s \cos(\lambda x) dx \right| = \left| \frac{\sin(\lambda s) - \sin(\lambda r)}{\lambda} \right| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Pour conclure, il suffit alors de faire tendre m vers $+\infty$ dans la majoration établie. ■

Proposition 6.9.3 *Soit f une fonction mesurable, à valeurs positives et décroissante vers 0 sur $]a, +\infty[$ avec $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$ tel que $f(x) \cos(\lambda x)$ (resp. $f(x) \sin(\lambda x)$) soit intégrable en a^+ , l'intégrale trigonométrique*

$$\int_a^{\rightarrow+\infty} f(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{array} \right\} dx$$

existe.

De plus, pour tout $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$

a) on a alors

$$\left| \int_b^{\rightarrow+\infty} f(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{array} \right\} dx \right| \leq \frac{2}{\lambda} f(b),$$

b) et pour tout $\varepsilon > 0$, on a alors

$$\int_b^\beta f(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{array} \right\} dx \xrightarrow{[\varepsilon, +\infty[} \int_b^{\rightarrow+\infty} f(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{array} \right\} dx.$$

Preuve. Pour tous $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $a < r < s$, on a en effet

$$\left| \int_r^s f(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{array} \right\} dx \right| \leq \frac{2}{\lambda} f(r)$$

avec $f(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow +\infty$.

a) et b) sont alors clairs. ■

Remarque. Si, dans les résultats précédents, $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = g(x) \cos(ax)$ ou $f(x) = g(x) \sin(ax)$, on peut recourir aux formules

$$\begin{aligned} 2 \cos(ax) \cdot \cos(\lambda x) &= \cos((a + \lambda)x) + \cos((a - \lambda)x) \\ 2 \sin(ax) \cdot \sin(\lambda x) &= \cos((a - \lambda)x) - \cos((a + \lambda)x) \\ 2 \sin(ax) \cdot \cos(\lambda x) &= \sin((a + \lambda)x) + \sin((a - \lambda)x) \\ 2 \cos(ax) \cdot \sin(\lambda x) &= \sin((a + \lambda)x) - \sin((a - \lambda)x) \end{aligned}$$

pour en revenir à des intégrales trigonométriques portant sur g . \square

Passons en revue quelques exemples remarquables d'intégrales trigonométriques.

Exercice. *Etablir qu'on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Suggestion. L'existence de cette intégrale fléchée ne pose aucun problème mais la flèche est nécessaire (cf. p. 115).

Le changement de variable $x = y/\lambda$ établit que la valeur de cette intégrale fléchée ne dépend pas de λ . Il en existe de nombreuses méthodes de calcul. En voici une qui recourt à un artifice fort intéressant. Pour tout $b > 0$, on a

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^b \sin(x) \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^b e^{-xt} \sin(x) dx \right) dt$$

(la dernière égalité résulte du fait que $e^{-xt} \sin(x)$ est une fonction intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[\times]0, b[$). Cela étant, comme on a

$$\int_0^b e^{-xt} \sin(x) dx = \Im \int_0^b e^{(-t+i)x} dx = \frac{1}{1+t^2} - \frac{e^{-tb}}{1+t^2} (\cos(b) + t \sin(b)),$$

il vient

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} + R_b = \frac{\pi}{2} + R_b \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

si $b \rightarrow +\infty$ car

$$|R_b| \leq \int_0^{+\infty} 2e^{-bt} dt = 2 \frac{-e^{-bt}}{b} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{b}. \square$$

Exercice. *Etablir qu'on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda a}, \quad \forall a, \lambda > 0.$$

Suggestion. En recourant au théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on établit aisément que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_m définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_m(\lambda) = \int_0^m \frac{\cos(\lambda x)}{x^2 + a^2} dx$$

appartient à $C_1(]0, +\infty[)$ et vérifie

$$D_\lambda f_m(\lambda) = - \int_0^m \frac{x}{x^2 + a^2} \sin(\lambda x) dx.$$

Or, d'une part, comme $1/(x^2 + a^2)$ est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$, on a

$$f_m(\lambda) \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2 + a^2} dx, \quad \forall \lambda > 0,$$

c'est-à-dire

$$f_m(\lambda) \rightarrow \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}, \quad \forall \lambda > 0.$$

D'autre part, vu la proposition précédente, on a aussi

$$\int_0^m \frac{x}{x^2 + a^2} \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{K} \int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \sin(\lambda x) dx$$

pour tout compact $K \subset]0, +\infty[$. Vu le théorème de dérivation des limites uniformes, nous obtenons finalement

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \sin(\lambda x) dx = -D_\lambda \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a} = \frac{\pi}{a} e^{-\lambda a}. \square$$

Exercice. (Intégrale de Fresnel) *Etablir qu'on a*

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Suggestion. L'existence de ces intégrales fléchées ne pose aucun problème. (Il est cependant nécessaire de laisser les flèches.)

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, vu l'intégrale de Poisson, on a

$$\begin{aligned} \int_0^m \frac{\begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix}}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^m \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\begin{Bmatrix} t^2 \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{1}{\lambda^2 + t^4} - \int_m^{+\infty} e^{-xt^2} \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} dx \right) dt \end{aligned}$$

car $\exp((-t^2 + i\lambda)x)$ est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[\times]0, m[$. Cela étant, on a d'une part

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\lambda^2 + t^4} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} B\left(\frac{3}{4}, 1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^4} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} B\left(\frac{1}{4}, 1 - \frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

en recourant aux intégrales eulériennes et d'autre part

$$\int_0^{+\infty} \left| \int_m^{+\infty} e^{-xt^2} \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} dx \right| dt \leq \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-mt^2} dt = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{m}}.$$

D'où la conclusion. \square

6.10 Localisation de Riemann

Question. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est tel que $\mathcal{F}^+ f \in L^1(\mathbb{R})$, les théorèmes de la convergence majorée et de Fourier donnent

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m \mathcal{F}_y^+ f \cdot e^{-ixy} dy \rightarrow f(x) \text{ pour p.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Cela étant, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ sont tels que la suite

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m \mathcal{F}_y^+ f \cdot e^{-ixy} dy$$

converge, dans quelle mesure sa limite donne-t-elle connaissance de $f(x)$?

Avant d'envisager répondre à cette question, nous allons développer deux résultats connus sous le nom de *théorèmes de la moyenne*.

Théorème 6.10.1 Soit g une fonction mesurable, réelle et bornée pp sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$. Notons c (resp. d) la borne inférieure (resp. supérieure) pp sur $]a, b[$ de g .

Pour tout $f \in L^1(]a, b[)$ réel et de signe constant, il existe alors $r \in [c, d]$ tel que $\int_a^b fg dx = r \int_a^b f dx$.

En particulier, il existe $r \in [c, d]$ tel que $\int_a^b g dx = r(b - a)$.

Preuve. Il suffit de noter que si, par exemple, f est positif pp sur $]a, b[$, alors on a $cf \leq fg \leq df$ pp sur $]a, b[$. \blacksquare

Notation. Etant donné une fonction g réelle et monotone sur $]x - \varepsilon, x[$ (resp. $]x, x + \varepsilon[$) avec $\varepsilon > 0$, posons

$$f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \text{ et } f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y).$$

Théorème 6.10.2 *Etant donné $f \in L^1(]a, b[)$ réel et continu, et g réel, borné et monotone sur $]a, b[$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que*

$$\int_a^b fg \, dx = g(a^+) \int_a^\xi f \, dx + g(b^-) \int_\xi^b f \, dx.$$

Preuve. Quitte à remplacer g par $-g$ ou g par $g - g(b^-)$, nous pouvons supposer g croissant et tel que $g(b^-) = 0$. De plus, le cas $f = 0$ étant trivial, nous pouvons supposer avoir $f \neq 0$.

Vu le théorème de la convergence majorée, si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $[a_0^{(m)}, \dots, a_{J(m)}^{(m)}]$ est un découpage de $[a, b]$ subordonné à $1/m$, on a

$$\Sigma_m = \sum_{j=1}^{J(m)} g(a_j^{(m)}) \int_{a_{j-1}^{(m)}}^{a_j^{(m)}} f \, dx \rightarrow \int_a^b fg \, dx.$$

Posons

$$F(\cdot) = \int_a^\cdot f \, dx \text{ sur } [a, b], \quad F_{m,j} = F(a_j^{(m)}), \quad A = \inf_{x \in [a,b]} F(x) \text{ et } B = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

Cela étant, il vient

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \sum_{j=1}^{J(m)} (F_{m,j} - F_{m,j-1}) \cdot g(a_j^{(m)}) \\ &= -g(a_1^{(m)}) \cdot F_{m,0} + \left(g(a_1^{(m)}) - g(a_2^{(m)}) \right) \cdot F_{m,1} \\ &\quad + \dots + \left(g(a_{J(m)-1}^{(m)}) - g(a_{J(m)}^{(m)}) \right) \cdot F_{m,J(m)-1} + g(a_{J(m)}^{(m)}) \cdot F_{m,J(m)}. \end{aligned}$$

Comme on a $F_{m,0} = 0$ et comme g est une fonction croissante à valeurs négatives, il vient

$$g(a_1^{(m)}) B \leq S_m \leq g(a_1^{(m)}) A$$

donc

$$g(a^+) B \leq \int_a^b fg \, dx \leq g(a^+) A.$$

Vu la continuité de F sur $[a, b]$, il existe alors $\xi \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b fg \, dx = g(a^+) \int_a^\xi f \, dx,$$

ce qui suffit. ■

Remarque. *La preuve précédente s'applique aussi au cas où f est une fonction intégrable au sens de Darboux sur $[a, b]$. □*

Donnons à présent une autre écriture de $S_m(x)$, à savoir

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \frac{\sin(mt)}{t} dt$$

qu'on obtient aisément si on note que la fonction $f(t) \cdot e^{i(t-x)y}$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times]-m, m[$. Cela étant, les deux résultats suivants, connus sous le nom de *théorèmes de localisation de Riemann*, répondent à la question envisagée.

Théorème 6.10.3 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ sont tels que

$$\frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2r|}{t} \in L^1(]0, \delta[),$$

alors la suite $(S_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers r .

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. Vu le premier exercice du paragraphe précédent, pour tout $\eta \in]0, \delta[$, on a

$$S_m(x) - r = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\eta + \int_\eta^{+\infty} \right) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - r \right) \cdot \frac{\sin(mt)}{t} dt.$$

Cela étant, par hypothèse, il est possible de fixer $\eta \in]0, \delta[$ tel que la majoration $|\frac{2}{\pi} \int_0^\eta \dots| \leq \varepsilon/2$ ait lieu pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On conclut alors aussitôt au moyen du théorème de Riemann-Lebesgue et du premier exercice du paragraphe précédent. ■

Théorème 6.10.4 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est réel et si f est monotone sur un voisinage V de $x \in \mathbb{R}$, alors la suite $(S_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $(f(x^+) + f(x^-))/2$.

Preuve. a Etablissons tout d'abord que, si $\delta > 0$ donne lieu à $]x, x + \delta[\subset V$, on

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\delta f(x+t) \frac{\sin(mt)}{t} dt \rightarrow f(x^+).$$

Quitte à considérer $g = \pm(f(x + \cdot) - f(x^+))$, nous pouvons supposer f croissant sur V , $x = 0$ et $f(x^+) = 0$. Cela étant, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta \in]0, \delta[$ tel que $f(\eta) \leq \varepsilon$. En recourant au deuxième théorème de la moyenne, il existe ensuite $\xi_m \in]0, \eta[$ tel que

$$\int_0^\eta f(t) \frac{\sin(mt)}{t} dt = f(\eta^-) \int_{\xi_m}^\eta \frac{\sin(mt)}{t} dt.$$

La fonction $\int_0^x (\sin(mt))/t dt$ étant bornée sur $[0, +\infty[$, il existe donc $M > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \int_0^\eta f(t) \frac{\sin(mt)}{t} dt \right| \leq \varepsilon M$$

donc tel que

$$\left| \int_0^\delta f(t) \frac{\sin(mt)}{t} dt \right| \leq \varepsilon M + \left| \int_\eta^\delta \frac{f(t)}{t} \sin(mt) dt \right|.$$

Comme la fonction $(f(t)/t) \cdot \chi_{]0, \delta[}(t)$ est intégrable, l'assertion résulte du théorème de Riemann-Lebesgue.

Cela étant, dans

$$S_m(x) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty} \right) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin(mt)}{t} dt,$$

la deuxième intégrale converge vers 0 si $m \rightarrow \infty$, en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue, alors que la première intégrale converge vers $(f(x^+) + f(x^-))/2$ vu la première partie de cette preuve. ■

Remarque. *Ce dernier résultat conduit à la notion de transformation de Mellin (cf. [2]). □*

Remarques. *1) La fonction $f(x) = x \sin(1/x) \chi_{]0, 1/\pi[}(x)$ vérifie l'hypothèse du premier théorème de localisation de Riemann mais pas celle du second.

2) Inversement la fonction paire f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} -1/\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1/e \\ 1/(ex)^2 & \text{si } 1/e < x \end{cases}$$

vérifie l'hypothèse du deuxième théorème de localisation de Riemann mais pas celle du premier. □*

Chapitre 7

Transformation de Laplace

7.1 Définition et généralités

Notations. Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, les notations ξ et η désignent des points de \mathbb{R}^n et on pose $p = \xi + i\eta$ ou $p = (\xi, \eta)$. Il s'ensuit que p est un point de \mathbb{C}^n ou de \mathbb{R}^{2n} suivant le cas. Le contexte lèvera systématiquement tout doute entre ces deux points de vues complémentaires. La notation $\langle p, x \rangle$ désigne toujours le nombre complexe $\langle \xi, x \rangle + i \langle \eta, x \rangle$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition. Soit F une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n . La transformée de Laplace de F est définie en p si $e^{-\langle p, x \rangle} F(x)$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n et est alors définie selon

$$\mathcal{L}_p F = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle p, x \rangle} F(x) dx.$$

La transformée de Laplace de F apparaît donc comme étant une fonction $f(p) = \mathcal{L}_p F$ définie sur une partie de \mathbb{C}^n .

Remarque. Si la transformée de Laplace de F est définie en $\xi + i0$, la fonction $e^{-\langle \xi, x \rangle} F(x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n . Par conséquent, $e^{-\langle \xi + i\eta, x \rangle} F(x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$ et on a

$$\mathcal{L}_{\xi + i\eta} F = \mathcal{F}_{x \rightarrow \eta}^- \left(e^{-\langle \xi, x \rangle} F(x) \right). \square$$

Un premier problème que nous devons résoudre est celui de la description de l'ensemble des points p de \mathbb{C}^n pour lesquels $\mathcal{L}_p F$ existe.

Définition. Pour toute fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n , posons

$$\Gamma_F = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : e^{-\langle \xi, \cdot \rangle} F(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n) \}.$$

Le théorème suivant ramène le problème de l'existence de $\mathcal{L}_p F$ à celui de la description de Γ_F .

Théorème 7.1.1 *Si F est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n , alors $\mathcal{L}_p F$ est défini si et seulement si ξ appartient à Γ_F . ■*

Passons à présent à l'étude de l'ensemble Γ_F .

Proposition 7.1.2 *Pour toute fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n , l'ensemble Γ_F est convexe.*

Preuve. De fait, pour tous $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma_F$ et tout $\theta \in]0, 1[$, $e^{-(\theta\xi_1 + (1-\theta)\xi_2, x)} F(x)$ est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n telle que

$$|e^{-(\theta\xi_1 + (1-\theta)\xi_2, x)} F(x)| = (e^{-\langle \xi_1, x \rangle})^\theta (e^{-\langle \xi_2, x \rangle})^{1-\theta} |F(x)| \leq (e^{-\langle \xi_1, x \rangle} + e^{-\langle \xi_2, x \rangle}) |F(x)|$$

pp sur \mathbb{R}^n , où la majorante est intégrable sur \mathbb{R}^n . ■

Définition. Une fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n est *nulle pp sous $a \in \mathbb{R}$ dans la direction e* si elle est nulle pp sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e \rangle < a\}$.

Il revient au même de dire que le support pp de F est inclus dans le demi-espace fermé $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e \rangle \geq a\}$.

Proposition 7.1.3 *Si la fonction F mesurable sur \mathbb{R} est nulle pp sous $a \in \mathbb{R}$ dans la direction e et si ξ appartient à Γ_F , alors on a $\xi + re \in \Gamma_F$ pour tout $r \geq 0$.*

Preuve. Pour tout $r \geq 0$, $e^{-(\xi + re, x)} F(x)$ est en effet une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n et on a $e^{-\langle re, x \rangle} \leq e^{-ra}$ sur son support pp donc

$$|e^{-(\xi + re, x)} F(x)| \leq e^{-ra} e^{-\langle \xi, x \rangle} |F(x)|$$

pp sur \mathbb{R}^n , où la majorante appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$. ■

Remarque. a) L'ensemble Γ_F peut ne pas être borné même s'il n'existe pas de direction e telle que F s'annule pp sous un nombre $a \in \mathbb{R}$ dans la direction e . Ainsi, on a bien sûr $\Gamma_F = \mathbb{R}^n$ pour $F(x) = \exp(-|x|^2)$.

b) Vérifier qu'on a

$\Gamma_F = \emptyset$	pour	$F(x) = \chi_{\mathbb{R}}(x),$
$\Gamma_F = \{0\}$	pour	$F(x) = (1 + x^2)^{-1},$
$\Gamma_F =]-1, +1[$	pour	$F(x) = e^{- x },$
$\Gamma_F = [-1, +1]$	pour	$F(x) = (1 + x^2)^{-1} e^{- x },$
$\Gamma_F =]0, +\infty[$	pour	$F(x) = x \chi_{]0, +\infty[}(x),$
$\Gamma_F = [0, +\infty[$	pour	$F(x) = \sqrt{x} (1 + x^2)^{-1} \chi_{]0, +\infty[}(x),$
$\Gamma_F = \mathbb{R}$	pour	$F(x) = e^{-x^2}. \square$

7.2 Propriétés générales

Proposition 7.2.1 *Si F_1, \dots, F_J sont des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n en nombre fini et si on a $c_1, \dots, c_J \in \mathbb{C}$, alors il vient*

$$\Gamma_{\sum_{j=1}^J c_j F_j} \supset \bigcap_{j=1}^J \Gamma_{F_j}$$

et

$$\mathcal{L}_p \left(\sum_{j=1}^J c_j F_j \right) = \sum_{j=1}^J c_j \mathcal{L}_p F_j, \quad \forall p \in \bigcap_{j=1}^J \Gamma_{F_j} + i\mathbb{R}^n. \blacksquare$$

Remarque. On peut évidemment avoir $\Gamma_{\sum_{j=1}^J c_j F_j} \neq \bigcap_{j=1}^J \Gamma_{F_j}$; le cas $F - F$ est particulièrement frappant. \square

Proposition 7.2.2 *Si F_1, \dots, F_n sont des fonctions mesurables sur \mathbb{R} et si on pose $F(x) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ pp sur \mathbb{R}^n , on obtient*

$$\Gamma_F \supset \Gamma_{F_1} \times \cdots \times \Gamma_{F_n}$$

et

$$\mathcal{L}_p F = \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_{p_j} F_j, \quad \forall p \in \Gamma_{F_1} \times \cdots \times \Gamma_{F_n} + i\mathbb{R}^n. \blacksquare$$

Remarque. On peut évidemment avoir $\Gamma_F \neq \Gamma_{F_1} \times \cdots \times \Gamma_{F_n}$ sous les hypothèses de la proposition précédente; le cas où un des F_j est nul pp est particulièrement frappant. \square

Proposition 7.2.3 *Pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et toutes fonctions F_1, \dots, F_J convolables sur \mathbb{R}^n , on a*

$$\Gamma_{F_1 \star \cdots \star F_J} \supset \bigcap_{j=1}^J \Gamma_{F_j}$$

et

$$\mathcal{L}_p (F_1 \star \cdots \star F_J) = \prod_{j=1}^J \mathcal{L}_p F_j, \quad \forall p \in \bigcap_{j=1}^J \Gamma_{F_j} + i\mathbb{R}^n.$$

Preuve. Les fonctions F_1, \dots, F_J étant convolables, nous savons que, pour tout $p \in \mathbb{C}^n$, les fonctions $e^{-\langle p, x \rangle} F_1(x), \dots, e^{-\langle p, x \rangle} F_J(x)$ sont convolables et telles que

$$\left((e^{-\langle p, \cdot \rangle} F_1) \star \cdots \star (e^{-\langle p, \cdot \rangle} F_J) \right) (x) = e^{-\langle p, x \rangle} \cdot (F_1 \star \cdots \star F_J) (x).$$

Si, en outre, ξ appartient à $\bigcap_{j=1}^J \Gamma_{F_j}$, ces fonctions $e^{-\langle p, x \rangle} F_1(x), \dots, e^{-\langle p, x \rangle} F_J(x)$ sont intégrables sur \mathbb{R}^n ; il s'ensuit d'une part que leur produit de convolution est intégrable sur \mathbb{R}^n donc que ξ appartient à $\Gamma_{F_1 \star \dots \star F_J}$ et d'autre part que la formule annoncée pour $\mathcal{L}_p(F_1 \star \dots \star F_J)$ a bien lieu. ■

Proposition 7.2.4 *Soit A une matrice réelle de dimension $n \times n$ non singulière et soit a un point de \mathbb{R}^n .*

Pour toute fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n ,

a) $\Gamma_{F(Ax+a)} = \tilde{A} \Gamma_F$ et

$$\mathcal{L}_p(F(Ax + a)) = \frac{e^{\langle p, A^{-1}a \rangle}}{|\det(A)|} \mathcal{L}_{\tilde{A}^{-1}p} F, \quad \forall p \in \tilde{A} \Gamma_F + i\mathbb{R}^n.$$

b) $\Gamma_{(\exp(-\langle A^{-1}a, x \rangle) \cdot F(\tilde{A}^{-1}x))} = A^{-1}(\Gamma_F - \{a\})$ et

$$\mathcal{L}_{Ap+a} F = \mathcal{L}_p \left(\frac{e^{-\langle A^{-1}a, x \rangle}}{|\det(A)|} F(\tilde{A}^{-1}x) \right), \quad \forall p \in A^{-1}(\Gamma_F - \{a\}) + i\mathbb{R}^n.$$

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème de changement de variable. ■

7.3 Compléments sur \mathbb{R}^n

7.3.1 Enveloppe convexe d'un nombre fini de points

Définition. Rappelons qu'une partie C de \mathbb{R}^n est *convexe* si, pour tous $x, y \in C$ et tout $r \in]0, 1[$, le point $rx + (1-r)y$ appartient à C . On vérifie de suite que toute intersection de parties convexes de \mathbb{R}^n est convexe. Dès lors, on peut introduire *l'enveloppe convexe* d'une partie A non vide de \mathbb{R}^n , notée $\text{co}(A)$, comme étant l'intersection de toutes les parties convexes de \mathbb{R}^n qui contiennent A : c'est "la plus petite partie convexe de \mathbb{R}^n qui contient A ". Nous n'allons pas faire l'étude générale de cette notion d'enveloppe convexe mais nous contenter du résultat suivant relatif au cas où A est une partie finie de \mathbb{R}^n .

Proposition 7.3.1 *Pour toute partie finie et non vide $A = \{x_1, \dots, x_J\}$ de \mathbb{R}^n , on a*

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^J r_j x_j : 0 \leq r_j \leq 1; \sum_{j=1}^J r_j = 1 \right\}$$

et cet ensemble est compact.

Preuve. Posons

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^J r_j x_j : 0 \leq r_j \leq 1; \sum_{j=1}^J r_j = 1 \right\}.$$

Cet ensemble C

- a) contient bien sûr chacun des points x_1, \dots, x_J , donc A ,
 b) est convexe. De fait, si on a

$$0 \leq r_j, r'_j \leq 1; \sum_{j=1}^J r_j = \sum_{j=1}^J r'_j = 1 \text{ et } 0 \leq r \leq 1,$$

il vient bien sûr

$$r \sum_{j=1}^J r_j x_j + (1-r) \sum_{j=1}^J r'_j x_j = \sum_{j=1}^J (r r_j + (1-r) r'_j) x_j \in C.$$

- c) est inclus dans toute partie convexe C' de \mathbb{R}^n qui contient A . De fait, si on a $0 \leq r_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^J r_j = 1$, l'un au moins de ces nombres r_j est strictement positif et, à une permutation des indices près, nous pouvons supposer avoir $r_1 > 0$. Cela étant, pour tout $j \leq J$, on a

$$\frac{1}{r_1 + \dots + r_j} (r_1 x_1 + \dots + r_j x_j) \in C'$$

car, pour $j = 1$, c'est trivial et, si c'est vrai pour $j = k < J$, c'est aussi vrai pour $j = k + 1$ car on a

$$\frac{r_1 x_1 + \dots + r_{k+1} x_{k+1}}{r_1 + \dots + r_{k+1}} = \frac{r_1 + \dots + r_k}{r_1 + \dots + r_{k+1}} \frac{r_1 x_1 + \dots + r_k x_k}{r_1 + \dots + r_k} + \frac{r_{k+1} x_{k+1}}{r_1 + \dots + r_{k+1}}.$$

Au total, on a alors $\sum_{j=1}^J r_j x_j \in C'$, ce qui suffit.

- d) est borné car on a $\left| \sum_{j=1}^J r_j x_j \right| \leq \sum_{j=1}^J |x_j|$ pour tous $r_1, \dots, r_J \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^J r_j = 1$,

e) est fermé. Supposons que la suite $(\sum_{j=1}^J r_{j,m} x_j)_{m \in \mathbb{N}_0}$ avec

$$0 \leq r_{j,m} \leq 1, \quad \forall j \leq J, \forall m \in \mathbb{N}_0 \text{ et } \sum_{j=1}^J r_{j,m} = 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

converge. Par J extractions successives, on obtient aisément une suite strictement croissante $k(m)$ de \mathbb{N}_0 telle que, pour tout $j \leq J$, la suite $r_{j,k(m)}$ converge vers un point r_j du compact $[0, 1]$. Dès lors, la suite $(\sum_{j=1}^J r_{j,k(m)} x_j)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $\sum_{j=1}^J r_j x_j$. La conclusion s'ensuit aussitôt car la suite $(\sum_{j=1}^J r_{j,k(m)} = 1)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge bien sûr vers $\sum_{j=1}^J r_j$. ■

7.3.2 Deux propriétés de l'exponentielle

Proposition 7.3.2 Pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et tous $\xi_1, \dots, \xi_J \in \mathbb{R}^n$, on a

$$e^{-\langle \xi, x \rangle} \leq \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} \text{ sur } \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \text{co}(\{\xi_1, \dots, \xi_J\}).$$

Preuve. Pour tous $r_1, \dots, r_J \in [0, 1]$ tels que $\sum_{j=1}^J r_j = 1$, on a en effet

$$\prod_{k=1}^J e^{-r_k \langle \xi_k, x \rangle} \leq \prod_{k=1}^J \left(\sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} \right)^{r_k} = \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \blacksquare$$

Proposition 7.3.3 Soient $J \in \mathbb{N}_0$; $\xi_1, \dots, \xi_J \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Si le point $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - \xi_0| \leq \varepsilon\} \subset \text{co}(\{\xi_1, \dots, \xi_J\}),$$

alors on a

$$e^{-\langle \xi_0, x \rangle} \leq e^{-\varepsilon|x|} \cdot \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Preuve. L'inégalité est triviale en $x = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de

$$\xi_0 - \varepsilon \frac{x}{|x|} \in \text{co}(\{\xi_1, \dots, \xi_J\}),$$

on tire de suite

$$e^{-\langle \xi_0 - \varepsilon \frac{x}{|x|}, x \rangle} \leq \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle}. \blacksquare$$

7.3.3 Compacts enveloppés dans Γ_F

Définition. Soit F une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n . Un compact K de \mathbb{R}^n est enveloppé dans Γ_F s'il est inclus dans l'enveloppe convexe d'une partie finie de Γ_F .

Proposition 7.3.4 Si F est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n , alors tout compact inclus dans l'intérieur de Γ_F est enveloppé dans Γ_F .

Preuve. Fixons $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r\sqrt{n} < d(K, \mathbb{R}^n \setminus (\Gamma_F)^\circ)$. Choisissons un quadrillage de \mathbb{R}^n d'équidistance r . L'ensemble A des sommets des mailles de ce quadrillage qui rencontrent K , est bien sûr fini et inclus dans l'intérieur de Γ_F . D'où la conclusion car on a évidemment $K \subset \text{co}(A) \subset \Gamma_F$. \blacksquare

7.4 Propriétés de la fonction $\mathcal{L}_p F$

Convention. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, F est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n et nous nous proposons d'étudier les propriétés de la fonction $\mathcal{L}_p F$ considérée comme fonction de $p = (\xi, \eta)$ sur $\Gamma_F \times \mathbb{R}^n$.

Proposition 7.4.1 *On a $\Gamma_{\tilde{F}} = -\Gamma_F$ et $\mathcal{L}_p F = \mathcal{L}_{-p} \tilde{F}$.
En particulier, si F est pair, $\mathcal{L}_p F$ est pair.*

Preuve. C'est immédiat, par le changement de variable $x' = -x$. ■

Proposition 7.4.2 *On a $\Gamma_{\overline{F}} = \Gamma_F$ et $\overline{\mathcal{L}_p F} = \mathcal{L}_{\overline{p}} \overline{F}$. ■*

Proposition 7.4.3 *Pour tout $\xi \in \Gamma_F$, $\mathcal{L}_{\xi+i\eta} F$ tend vers 0 à l'infini.*

Preuve. C'est un cas particulier du théorème de Riemann-Lebesgue. ■

Théorème 7.4.4 *Si K est un compact enveloppé dans Γ_F ,*

a) *alors $\mathcal{L}_p F$ est continu sur $K \times \mathbb{R}^n$ et il existe $C(K) > 0$ tel que*

$$|\mathcal{L}_p F| \leq C(K), \quad \forall p = (\xi, \eta) \in K \times \mathbb{R}^n.$$

b) *et si F est nul pp sous a dans la direction e , alors $\mathcal{L}_p F$ est continu sur l'ensemble $(K + \{re : r \geq 0\}) \times \mathbb{R}^n$ et il existe $C(K) > 0$ tel que*

$$e^{ra} |\mathcal{L}_{(\xi+re, \eta)} F| \leq C(K), \quad \forall \xi \in K, \forall r \geq 0, \forall \eta \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\sup_{\xi \in K} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} e^{ra} |\mathcal{L}_{(\xi+re, \eta)} F| \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty.$$

Preuve. Il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $\xi_1, \dots, \xi_J \in \Gamma_F$ tels que K soit inclus dans $\text{co}(\{\xi_1, \dots, \xi_J\})$.

a) Pour tout $p = (\xi, \eta)$ avec $\xi \in K$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$, on a alors

$$|e^{-\langle p, x \rangle} F(x)| = e^{-\langle \xi, x \rangle} |F(x)| \leq \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)|$$

pp sur \mathbb{R}^n , où la majorante est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n . Cela étant, la continuité de $\mathcal{L}_p F$ sur $K \times \mathbb{R}^n$ résulte aussitôt du théorème de la convergence majorée et on peut poser

$$C(K) = \sum_{j=1}^J \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)| dx.$$

b) Pour tout $\xi \in K$, tout $r \geq 0$ et tout $\eta \in \mathbb{R}^n$, on a alors

$$e^{ra} |e^{-\langle \xi + re + i\eta, x \rangle} F(x)| \leq \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)|$$

pp sur \mathbb{R}^n , où la majorante est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n . Cela étant, la continuité de $\mathcal{L}_p F$ sur $(K + \{re : r \geq 0\}) \times \mathbb{R}^n$ résulte aussitôt du théorème de la convergence majorée et on peut prendre pour $C(K)$ le même nombre qu'en a). Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle x, e \rangle > a$, on a bien sûr $e^{r(a - \langle x, e \rangle)} \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$, ce qui permet de conclure. ■

Proposition 7.4.5 *Si F appartient à $C_L(\mathbb{R}^n)$ et si $\Gamma = \bigcap_{|\alpha| \leq L} \Gamma_{D^\alpha F}$ n'est pas vide, alors, pour tout $p \in \Gamma \times \mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{L}_p(D^\alpha F) = p^\alpha \mathcal{L}_p F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$.*

Preuve. La démonstration est analogue à celle effectuée pour établir la propriété correspondante relative à la transformation de Fourier. ■

Proposition 7.4.6 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\Gamma_{x^\alpha F(x)} \supset (\Gamma_F)^\circ$.*

De plus, $\mathcal{L}_p F$ appartient à $C_\infty((\Gamma_F)^\circ \times \mathbb{R}^n)$, les dérivées s'obtenant par dérivation sous le signe d'intégration.

Preuve. Pour tout $\xi_0 \in (\Gamma_F)^\circ$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule compacte $\{\xi : |\xi - \xi_0| \leq \varepsilon\}$ soit incluse dans l'intérieur de Γ_F donc soit enveloppée dans Γ_F : il existe par conséquent $J \in \mathbb{N}_0$ et $\xi_1, \dots, \xi_J \in \Gamma_F$ tels que cette boule compacte soit aussi incluse dans $\text{co}(\{\xi_1, \dots, \xi_J\})$ donc tels que

$$e^{-\langle \xi_0, x \rangle} \leq e^{-\varepsilon|x|} \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Dès lors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il vient

$$e^{-\langle \xi_0, x \rangle} |x^\alpha F(x)| \leq |e^{-\varepsilon|x|} x^\alpha| \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)|$$

pp sur \mathbb{R}^n . Il s'ensuit déjà qu'on a $\xi_0 \in \Gamma_{x^\alpha F(x)}$ car la fonction $e^{-\varepsilon|x|} x^\alpha$ est bornée sur \mathbb{R}^n .

La deuxième partie de l'énoncé résulte alors du théorème de dérivation des intégrales paramétriques car

a) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $e^{-\langle p, x \rangle} F(x)$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

b) pour tout $\xi \in (\Gamma_F)^\circ$, tout $\eta \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^n$,

$$D_\xi^\alpha D_\eta^{\alpha'} e^{-\langle p, x \rangle} F(x) = (-1)^{|\alpha|} (-i)^{|\alpha'|} x^{\alpha + \alpha'} e^{-\langle p, x \rangle} F(x)$$

est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n ,

c) pour tout compact K inclus dans $(\Gamma_F)^\circ \times \mathbb{R}^n$,

$$K' = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \exists \eta \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \xi \in K \}$$

est visiblement un compact inclus dans l'intérieur de Γ_F . Cela étant, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le compact $K'_\varepsilon = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : d(\xi, K') \leq \varepsilon \}$ soit lui aussi inclus dans $(\Gamma_F)^\circ$ donc soit un compact enveloppé dans Γ_F : il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $\xi_1, \dots, \xi_J \in \Gamma_F$ tels que $K'_\varepsilon \subset \text{co}(\{\xi_1, \dots, \xi_J\})$. Dès lors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $p \in K \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{p \in K} |e^{-\langle p, x \rangle} x^\alpha F(x)| \leq |e^{-\varepsilon|x|} x^\alpha| \cdot \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)|$$

pp sur \mathbb{R}^n , où le second membre est majoré pp sur \mathbb{R}^n par un multiple de la fonction intégrable $\sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)|$. ■

Théorème 7.4.7 Pour tout $j \leq n$, on a

$$(D_{\xi_j} + iD_{\eta_j}) \mathcal{L}_p F = 0 \text{ sur } (\Gamma_F)^\circ \times \mathbb{R}^n.$$

* \rightarrow La fonction $\mathcal{L}_p F$ est holomorphe sur $(\Gamma_F)^\circ + i\mathbb{R}^n$. \leftarrow *

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème précédent. ■

Théorème 7.4.8 * \rightarrow Si on a $\mathcal{L}_\xi F = 0$ en tout point ξ d'un ouvert non vide ω inclus dans Γ_F , alors on a $F = 0$ pp sur \mathbb{R}^n . \leftarrow *

Preuve. Soit ξ_0 un point de ω . Bien sûr, on a alors $(D_\xi^\alpha \mathcal{L}_p F)(\xi_0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ donc $(D_\xi^\alpha D_\eta^\beta \mathcal{L}_p F)(\xi_0) = 0$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, vu le théorème précédent. * \rightarrow Comme $\mathcal{L}_p F$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe $(\Gamma_F)^\circ + i\mathbb{R}^n$ \leftarrow *, on sait alors que

$$\mathcal{L}_{\xi_0 + i\eta} F = \mathcal{F}_{x \rightarrow \eta}^- (e^{-\langle \xi_0, x \rangle} F(x))$$

est égal à 0 pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$, donc que $e^{-\langle \xi_0, x \rangle} F(x)$ est nul pp sur \mathbb{R}^n , ce qui suffit pour conclure. ■

Corollaire 7.4.9 * \rightarrow Si F et G sont des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n et s'il existe un ouvert non vide ω inclus dans $\Gamma_F \cap \Gamma_G$ tel que $\mathcal{L}_\xi F = \mathcal{L}_\xi G$ en tout $\xi \in \omega$, alors on a $F = G$ pp sur \mathbb{R}^n . ■ \leftarrow *

Proposition 7.4.10 $*$ \rightarrow Si F et G sont des fonctions convolables telles que $F \star G = 0$ pp et si $(\Gamma_F)^\circ \cap (\Gamma_G)^\circ$ n'est pas vide, alors on a $F = 0$ pp sur \mathbb{R}^n ou $G = 0$ pp sur \mathbb{R}^n . $\leftarrow *$

Preuve. Pour tout $(\xi, \eta) \in (\Gamma_F \cap \Gamma_G) \times \mathbb{R}^n$, on a alors

$$\mathcal{L}_p(F \star G) = \mathcal{L}_p F \cdot \mathcal{L}_p G = 0.$$

$*$ \rightarrow Pour conclure au moyen du théorème précédent $\leftarrow *$, il suffit donc de prouver l'existence d'un ouvert non vide ω inclus dans $\Gamma_F \cap \Gamma_G$ tel que $\mathcal{L}_\xi F$ ou $\mathcal{L}_\xi G$ soit identiquement nul sur ω . Si $\xi_0 \in (\Gamma_F)^\circ \cap (\Gamma_G)^\circ$ est tel que $\mathcal{L}_{\xi_0} F \neq 0$, comme $\mathcal{L}_\xi F$ est une fonction continue sur $(\Gamma_F)^\circ \cap (\Gamma_G)^\circ$, on obtient de suite l'existence d'une boule ouverte b de centre ξ_0 et incluse dans $(\Gamma_F)^\circ \cap (\Gamma_G)^\circ$ telle que $\mathcal{L}_\xi F \neq 0$ en tout $\xi \in b$. On a donc $\mathcal{L}_\xi G = 0$ pour tout $\xi \in b$, ce qui suffit. ■

7.5 Transformation de Laplace unilatérale

Définition. Soit F une fonction mesurable sur \mathbb{R} . La transformée de Laplace unilatérale de F est définie en $p \in \mathbb{C}$ si $e^{-px} F(x) \chi_{]0, +\infty[}(x)$ est intégrable, et est définie comme étant égale à $\int_0^{+\infty} e^{-px} F(x) dx$. Il s'agit donc tout simplement de $\mathcal{L}_p(F \chi_{]0, +\infty[})$: c'est la transformée de Laplace d'une fonction nulle pp sous 0 dans la direction 1 (c'est-à-dire nulle pp sur $] - \infty, 0[$), ce qui permet d'appliquer la théorie que nous venons de développer. Si aucun doute n'est possible, on la note $\mathcal{L}_p F$, les deux significations de la notation $\mathcal{L}_p F$ coïncidant si on a $F = F \chi_{]0, +\infty[}$ pp sur \mathbb{R} .

En particulier, on vérifie aussitôt que, pour une fonction F mesurable sur \mathbb{R} et nulle pp sur $] - \infty, 0[$, on a $\Gamma_F = \mathbb{R}$ ou $\Gamma_F = \emptyset$ ou il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_F = [\xi_0, +\infty[$ ou $\Gamma_F =]\xi_0, +\infty[$.

Proposition 7.5.1 Soit F une fonction mesurable et bornée pp sur \mathbb{R} , identiquement nulle sur $] - \infty, 0[$. S'il existe $T > 0$ tel que $F(x+T) = \pm F(x)$ pour tout $x \geq 0$, alors on a $\Gamma_F \supset]0, +\infty[$ et

$$\mathcal{L}_p F = \frac{1}{1 \mp e^{-pT}} \int_0^T e^{-px} F(x) dx$$

pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p > 0$.

Preuve. L'inclusion $\Gamma_F \supset]0, +\infty[$ résulte aussitôt du fait qu'il existe $C > 0$ tel que $|F| \leq C \chi_{]0, +\infty[}$ pp sur \mathbb{R} . Cela étant, pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p > 0$, $\mathcal{L}_p F$ est égal à

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_{mT}^{(m+1)T} e^{-px} F(x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ (-1)^m \end{matrix} \right\} e^{-mpT} \int_0^T e^{-px} F(x) dx$$

en recourant au changement de variable $x = mT + y$. La conclusion est alors immédiate car on a une série géométrique de raison $\pm e^{-pT}$ dont le module est strictement inférieur à 1. ■

Théorème 7.5.2 Soit F une fonction mesurable sur \mathbb{R} , identiquement nulle sur $] -\infty, 0[$, appartenant à $C_L(]0, +\infty[)$ et telle que $\Gamma = \Gamma_F \cap \Gamma_{DF} \cap \dots \cap \Gamma_{D^{L-1}F}$ n'est pas vide.

a) Les fonctions F, DF, \dots et $D^{L-1}F$ ont des limites finies en 0^+ , que nous notons $F(0), DF(0), \dots$ et $D^{L-1}F(0)$ respectivement.

b) Pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p \in \Gamma$, les fonctions $e^{-px}F(x), e^{-px}DF(x), \dots$ et $e^{-px}D^{L-1}F(x)$ convergent vers 0 si $x \rightarrow +\infty$.

c) Pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p \in \Gamma$ et tout opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants $L(D) = c_L D^L + \dots + c_1 D + c_0$, on a

$$\mathcal{L}_p(L(D)F) = L(p)\mathcal{L}_p F - \vec{F}(0) \times A \times \vec{p}$$

où

i) $\vec{F}(0)$ est le vecteur ligne $(F(0), DF(0), \dots, D^{L-1}F(0))$,

ii) A est la matrice

$$\begin{pmatrix} c_L & c_{L-1} & \dots & c_2 & c_1 \\ & c_L & \dots & c_3 & c_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & c_L & c_{L-1} \\ & & & & c_L \end{pmatrix},$$

iii) \vec{p} est le vecteur colonne $(p^{L-1}, \dots, p, 1)$.

Preuve. a) et b) Pour tout $k \in \{1, \dots, L\}$, on a

$$D(e^{-px}D^{k-1}F(x)) = e^{-px}D^k F(x) - pe^{-px}D^{k-1}F(x),$$

où le second membre est continu et intégrable sur $]0, +\infty[$; il s'ensuit que sa primitive $e^{-px}D^{k-1}F(x)$ admet une limite finie en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

c) Cela étant, le cas $L(D) = D^k$ s'obtient tout simplement en intégrant par parties. Le cas général est alors immédiat vu la linéarité de l'opérateur $L(D)$. ■

Exemple. Dans le cas $L = 1$, le résultat précédent devient

$$\mathcal{L}_p(aDF + bF) = (ap + b)\mathcal{L}_p F - aF(0). \square$$

Exemple. Dans le cas $L = 2$, le résultat précédent devient

$$\mathcal{L}_p(aD^2F + bDF + cF) = (ap^2 + bp + c)\mathcal{L}_p F - (ap + b)F(0) - aDF(0). \square$$

Remarque. Pour mettre en évidence le rôle de la transformation de Laplace, il suffit de recourir au résultat précédent et aux propriétés de la fonction $\mathcal{L}_p F$. Pour réaliser concrètement cette affirmation, nous devons disposer de transformées de Laplace particulières. \square

7.6 Exemples de transformées de Laplace unilatérales

Commençons par rappeler que nous avons déjà établi que, pour toute fonction F mesurable sur \mathbb{R} , nous avons

- a) $\Gamma_{F(ax)} = a\Gamma_F$ et $\mathcal{L}_p F(ax) = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}_{p/a} F$ pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- b) $\Gamma_{F(x+a)} = \Gamma_F$ et $\mathcal{L}_p F(x+a) = e^{ap} \mathcal{L}_p F$ pour tout $a \in \mathbb{R}$,
- c) $\Gamma_{e^{-ax} F(x)} = -a + \Gamma_F$ et $\mathcal{L}_p (e^{-ax} F(x)) = \mathcal{L}_{p+a} F$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. $*$ \rightarrow Pour tout $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p > 0$, on a

$$\mathcal{L}_p (x^\alpha \chi_{]0, +\infty[}(x)) = p^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1). \leftarrow *$$

En recourant au changement de variable $px = y$ avec $p > 0$, on voit de suite que cette formule est valable pour tout $p > 0$. D'où la conclusion $*$ \rightarrow car les deux membres sont holomorphes sur $\{p \in \mathbb{C} : \Re p > 0\}$. $\leftarrow * \square$

Exemple. Pour tous α et $p \in \mathbb{C}$ tels que $\Re p > \Re \alpha$, on a

$$\mathcal{L}_p (e^{\alpha x} \chi_{]0, +\infty[}(x)) = \frac{1}{p - \alpha}.$$

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$

a) et tout $p \in \mathbb{C}$ tels que $\Re p > a$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p (\operatorname{ch}(ax) \cdot \chi_{]0, +\infty[}(x)) &= \frac{p}{p^2 - a^2} \\ \mathcal{L}_p (\operatorname{sh}(ax) \cdot \chi_{]0, +\infty[}(x)) &= \frac{a}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

b) et tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p > 0$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p (\cos(ax) \cdot \chi_{]0, +\infty[}(x)) &= \frac{p}{p^2 + a^2} \\ \mathcal{L}_p (\sin(ax) \cdot \chi_{]0, +\infty[}(x)) &= \frac{a}{p^2 + a^2}. \square \end{aligned}$$

Exemple. La suite $(\sum_{k=1}^m 1/k - \ln(m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge; sa limite C est appelée constante d'Euler (et on a $C \simeq 0,577$). *Pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p > 0$, on a

$$\mathcal{L}_p(\ln(x) \cdot \chi_{]0, +\infty[}(x)) = -\frac{\ln(p) + C}{p}.*$$

Comme on a

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right) + \frac{1}{m},$$

il suffit de noter que le terme général de la somme du second membre est positif car il est égal à $\int_0^1 (1/k - 1/(k+x)) dx$ et qu'il est majoré par $\int_0^1 x/(k(x+k)) dx$ donc par k^{-2} , c'est-à-dire par le terme général d'une série absolument convergente.

Cela étant, pour tout $p > 0$, on vérifie de suite que $e^{-px} \ln(x)$ est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \ln(x) dx = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x/p) dx = -\frac{\ln(p)}{p} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx.$$

Tout revient alors à établir l'égalité

$$C = -\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx.$$

Or on a successivement

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m) &= \int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x} dx - \int_1^m \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^m (1 - (1-t/m)^m) \frac{dt}{t} - \int_1^m \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^1 (1 - (1-t/m)^m) \frac{dt}{t} - \int_1^m (1-t/m)^m \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

(pour obtenir la deuxième égalité, on a effectué le changement de variable linéaire $1-x = t/m$). Par conséquent, vu le théorème de la convergence monotone, il vient

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^\varepsilon \frac{1-e^{-x}}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-e^{-\varepsilon} \ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx. \square \end{aligned}$$

Formules remarquables. Etablir les formules suivantes, dans lesquelles on a posé $\mathcal{L}_p F = \int_0^{+\infty} e^{-px} F(x) dx$,

$$1) \mathcal{L}_p \left(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha x} \right) = \frac{1}{(p-\alpha)^m} \text{ si } m \in \mathbb{N}_0 \text{ et } p, \alpha \in \mathbb{C} \text{ vérifient } \Re p > \Re \alpha,$$

$$2) \mathcal{L}_p \left(\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} e^{bx} \left(\frac{1}{2a} D_a \right)^{m-1} \frac{\sin(ax)}{a} \right) = \frac{1}{((p-b)^2 + a^2)^m} \text{ si } m \in \mathbb{N}_0; a, b \in \mathbb{R}$$

et $p \in \mathbb{C}$ vérifient $\Re p > b$,

$$3) \mathcal{L}_p \left(\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} e^{bx} \left(\frac{1}{2a} D_a \right)^{m-1} \cos(ax) \right) = \frac{p-b}{((p-b)^2 + a^2)^m} \text{ si } m \in \mathbb{N}_0; a, b \in \mathbb{R}$$

et $p \in \mathbb{C}$ vérifient $\Re p > b$.

En déduire que, pour toute fraction rationnelle P sur \mathbb{R} , il existe une et une seule fonction F mesurable sur \mathbb{R} , nulle pp sur $] -\infty, 0[$ et $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}_p F = P(p)$ pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p > \xi$.

Formules remarquables. Etablir les formules suivantes, dans lesquelles on a posé $\mathcal{L}_p F = \int_0^{+\infty} e^{-px} F(x) dx$,

$$1) \mathcal{L}_p \left(\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{p+a}} \text{ si } a, p \in]0, +\infty[,$$

$$2) \mathcal{L}_p \left(\frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{\pi}{p} \right)^{1/2} e^{-2\sqrt{ap}} \text{ si } a, p \in]0, +\infty[,$$

$$3) \mathcal{L}_p \left(\frac{\cos(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{\pi}{p} \right)^{1/2} e^{-a^2/(4p)} \text{ si } p \in]0, +\infty[\text{ et } a \in \mathbb{R},$$

$$4) \mathcal{L}_p \left(\frac{\text{ch}(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{\pi}{p} \right)^{1/2} e^{a^2/(4p)} \text{ si } p \in]0, +\infty[\text{ et } a \in \mathbb{R},$$

$$5) \mathcal{L}_p \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right) = \frac{1}{p} \ln(1+p) \text{ si } p \in]0, +\infty[,$$

$$6) \mathcal{L}_p \left(\int_0^x \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi \right) = \frac{1}{p} \text{arctg}(1/p) \text{ si } p \in]0, +\infty[,$$

$$7) \mathcal{L}_p \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(\xi)}{\xi} d\xi \right) = \frac{1}{2p} \ln(1+p^2) \text{ si } p \in]0, +\infty[,$$

$$8) \mathcal{L}_p \left(\frac{2e^{-ax}}{\sqrt{a\pi}} \int_0^{\sqrt{ax}} e^{\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{p}(p+a)} \text{ si } a, p \in]0, +\infty[,$$

$$9) \mathcal{L}_p \left(e^{ax} \left(\ln(a) + \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right) \right) = \frac{\ln(p)}{p-a} \text{ si } 0 < a < p$$

$$10) \mathcal{L}_p \left(\sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\xi)}{\xi} d\xi - \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi \right) = \frac{\ln(p) - \pi p/2}{1+p^2} \text{ si } p \in]0, +\infty[.$$

Formules remarquables. Etablir les formules suivantes

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px} dx = \ln \left(\frac{p-b}{p-a} \right)$ si $a, b, p \in \mathbb{R}$ vérifient $p > \sup\{a, b\}$;
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \frac{e^{-px}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{\pi} \left(\sqrt{p-b} - \sqrt{p-a} \right)$ si $a, b, p \in \mathbb{R}$ vérifient $p > \sup\{a, b\}$;
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-px} dx = \operatorname{arctg}(a/p)$ si $p \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}$;
- 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p^2 + b^2}{p^2 + a^2} \right)$ si $a, b, p \in \mathbb{R}$ vérifient $p > 0$.

7.7 Applications

Soit $L(D) = c_L D^L + \dots + c_1 D + c_0$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants sur \mathbb{R} et soit f un élément de $C_0(]0, +\infty[)$. Si $F = f\chi_{]0, +\infty[}$ est tel que $\Gamma_F \neq \emptyset$, alors, pour tous $z_0, \dots, z_{L-1} \in \mathbb{C}$, on peut chercher à résoudre l'équation

$$\begin{cases} L(D)u = f \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} D^k u(x) = z_k, \quad \forall k \in \{0, \dots, L-1\} \end{cases}$$

au moyen des considérations suivantes où la notation $\mathcal{L}_p g$ désigne la transformée de Laplace unilatérale de g .

Analyse. Comme $\Gamma_F \neq \emptyset$, $\mathcal{L}_p f$ est défini pour $p \gg$. Cela étant, s'il existe une solution $u_0 \in C_L(]0, +\infty[)$ telle que $U_0 = u_0 \chi_{]0, +\infty[}$ donne lieu à $\Gamma = \cap_{l=0}^L \Gamma_{D^l U_0} \neq \emptyset$, la formule établie au théorème du paragraphe 7.5 donne donc

$$\mathcal{L}_p u_0 = \frac{\vec{U}_0(0) \times A \times \vec{p} + \mathcal{L}_p f}{L(p)} \text{ pour } \Re p \gg .$$

Synthèse. Vu les propriétés de la transformation de Laplace, tout revient donc à déterminer une fonction u sur $]0, +\infty[$ dont la transformée unilatérale de Laplace est connue. Pour ce faire, on recourt à des tables de transformées de Laplace dont les résultats du paragraphe précédent sont extraits. Remarquons en outre que si une telle fonction existe, elle admet automatiquement un prolongement appartenant à $C_{L-1}(\mathbb{R})$; cela permet d'écrire la condition $\lim_{x \rightarrow 0^+} D^k u(x) = z_k$ selon $D^l u(0) = z_l$.

Insistons sur le fait que les premières formules fondamentales du paragraphe précédent ramènent la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants du type

$$L(D)u = x^m e^{\alpha x} \quad (\text{resp. } x^m \cos(ax); x^m \sin(ax); x^m \operatorname{ch}(ax); x^m \operatorname{sh}(ax))$$

avec $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ (ou même avec une combinaison linéaire de tels seconds membres) à la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions rationnelles simples.

Exemple. Trouver la solution de l'équation $Du + u = e^x$ sur $]0, +\infty[$ qui vaut 0 en 0. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{L}_p e^x = \frac{1}{p-1} \text{ avec } \Gamma_{e^x} =]1, +\infty[$$

et, formellement,

$$\mathcal{L}_p(Du + u) = (p+1)\mathcal{L}_p u - u(0).$$

Tout revient donc à trouver une fonction u_0 telle que

$$\mathcal{L}_p u_0 = \frac{1}{p^2 - 1} \text{ pour } \Re p \gg .$$

Or on a $\mathcal{L}_p(\text{sh}(x)) = (p^2 - 1)^{-1}$ sur $]1, +\infty[$. Dans ces conditions, la fonction $u_0(x) = \text{sh}(x)$ est la solution et, *par prolongement analytique, il s'agit même d'une solution sur \mathbb{R}^* . \square

Cette méthode de résolution s'adapte aussitôt à la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Exemple. Résoudre, par transformation de Laplace, l'équation différentielle

$$\begin{cases} Du - Dv = x \sin(x) \\ 2u + v + D^2v = 0 \\ u(0) = v(0) = 0 \\ Dv(0) = 1 \end{cases}$$

sur \mathbb{R} . Considérons cette équation sur $]0, +\infty[$. Par recours à la transformation de Laplace, cette équation différentielle donne lieu au système formel

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p u - \mathcal{L}_p v = \frac{2}{(1+p^2)^2} \\ 2\mathcal{L}_p u + (1+p^2)\mathcal{L}_p v = 1 \end{cases}$$

On obtient donc formellement

$$\mathcal{L}_p u = \frac{1}{1+p^2} \text{ et } \mathcal{L}_p v = \frac{p^2 - 1}{(1+p^2)^2}$$

d'où on tire la solution

$$u(x) = \sin(x) \text{ et } v(x) = x \cos(x). \square$$

Chapitre 8

Transformation de Fourier dans L^2

8.1 Définition et généralités

Rappels. a) Vu le théorème de Parseval, nous savons que

i) pour tout $f \in L^1 \cap L^2$, $\mathcal{F}^\pm f$ appartient à L^2 et vérifie

$$\|\mathcal{F}^\pm f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2;$$

ii) pour tous $f, g \in L^1 \cap L^2$, on a $\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g \in L^1$ et

$$\mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g) = (2\pi)^n f \star g \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

b) Cela étant, le théorème de transfert s'adapte directement au cas des éléments de $L^1 \cap L^2$ sous la forme suivante: on a

$$\langle \mathcal{F}^\pm f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F}^\mp g \rangle, \quad \forall f, g \in L^1 \cap L^2.$$

c) On a évidemment

$$D_\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De plus, pour tout $\varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $D^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dès lors, il vient

$$\mathcal{F}^\pm \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall \varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n).$$

d) Vu le deuxième théorème d'approximation, pour tout $f \in L^2$, il existe une suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $D_\infty(\mathbb{R}^n)$, donc de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, qui converge dans L^2 vers f .

Proposition 8.1.1 *Soit f un élément de L^2 . Pour toute suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ qui converge dans L^2 vers f , la suite $(\mathcal{F}^\pm g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L^2 et sa limite ne dépend pas de la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$.*

Preuve. D'une part, la suite $(\mathcal{F}^\pm g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans L^2 car on a

$$\|\mathcal{F}^\pm g_r - \mathcal{F}^\pm g_s\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|g_r - g_s\|_2, \quad \forall r, s \in \mathbb{N}_0,$$

donc converge. D'autre part, si la suite $(h_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ converge aussi dans L^2 vers f , la suite

$$g_1, h_1, g_2, h_2, \dots, g_m, h_m, \dots$$

de $L^1 \cap L^2$ converge dans L^2 vers f . Dès lors, la suite

$$\mathcal{F}^\pm g_1, \mathcal{F}^\pm h_1, \mathcal{F}^\pm g_2, \mathcal{F}^\pm h_2, \dots, \mathcal{F}^\pm g_m, \mathcal{F}^\pm h_m, \dots$$

converge dans L^2 , ce qui entraîne l'égalité des limites des suites $\mathcal{F}^\pm g_m$ et $\mathcal{F}^\pm h_m$. ■

Définitions. Vu la proposition précédente, il est licite de définir *la transformée de Fourier* $\mathbb{F}^\pm f$ dans L^2 de f comme étant la limite commune dans L^2 de toutes les suites $(\mathcal{F}^\pm f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ telles que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ appartienne à $L^1 \cap L^2$ et converge dans L^2 vers f . Cela étant, *la transformation positive* \mathbb{F}^+ et *la transformation négative* \mathbb{F}^- de Fourier sont les applications

$$\mathbb{F}^\pm : L^2 \rightarrow L^2; \quad f \mapsto \mathbb{F}^\pm f.$$

Le résultat suivant donne un lien fort étroit entre \mathcal{F}^\pm et \mathbb{F}^\pm .

Théorème 8.1.2 *Pour tout $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\mathcal{F}^\pm f = \mathbb{F}^\pm f$ pp.*

Preuve. C'est trivial si on considère la suite $(f_m = f)_{m \in \mathbb{N}_0}$. ■

Remarque. Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ converge dans L^2 vers f et si la suite $(\mathcal{F}^\pm f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur \mathbb{R}^n vers g , on a $g = \mathbb{F}^\pm f$ pp sur \mathbb{R}^n car, de la suite $(\mathcal{F}^\pm f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui converge dans L^2 vers $\mathbb{F}^\pm f$, on peut extraire une sous-suite qui converge pp vers $\mathbb{F}^\pm f$. C'est notamment le cas pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que l'intégrale fléchée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ixy} f(x) dx = g(y)$$

existe pour presque tout $y \in \mathbb{R}$: il suffit de poser $f_m = f \chi_{]-m, m]}$; on obtient de suite $\mathbb{F}^\pm f = g$ pp. (cf. l'exemple remarquable du paragraphe 6.9 qui souligne l'importance des intégrales trigonométriques). □

Proposition 8.1.3 *Pour tout $f \in L^2$, tout $a \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice réelle et non singulière A de dimension $n \times n$,*

a) $\mathbb{F}_y^\pm f = \mathbb{F}_{-y}^\mp f = \mathbb{F}_y^\mp \tilde{f} = \mathbb{F}_{-y}^\pm \tilde{f}$ pp;

b) $\overline{\mathbb{F}^\pm f} = \mathbb{F}^\mp \bar{f} = \mathbb{F}^\pm f^*$ pp;

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathbb{F}_y^\pm(f(A \cdot + a)) &= \frac{e^{\mp i \langle A^{-1}a, y \rangle}}{|\det(A)|} \mathbb{F}_{\tilde{A}^{-1}y}^\pm f; \\ \text{d) } \mathbb{F}_{Ay+a}^\pm f &= \mathbb{F}_y^\pm \left(\frac{e^{\pm i \langle \cdot, A^{-1}a \rangle}}{|\det(A)|} f(\tilde{A}^{-1} \cdot) \right) \end{aligned}$$

Preuve. Les formules correspondantes en \mathcal{F}^\pm étant vraies pour tout élément de $L^1 \cap L^2$, tout résulte donc d'un passage à la limite dans L^2 . ■

8.2 Propriétés fondamentales

Théorème 8.2.1 *La transformation de Fourier dans L^2*

$$\mathbb{F}^\pm: L^2 \rightarrow L^2$$

est un opérateur linéaire bijectif tel que

$$\|\mathbb{F}^\pm f\| = (2\pi)^{n/2} \|f\|, \quad \forall f \in L^2.$$

En fait, l'opérateur $(2\pi)^{-n/2} \mathbb{F}^\pm: L^2 \rightarrow L^2$ est une isométrie linéaire d'inverse égal à $(2\pi)^{-n/2} \mathbb{F}^\mp$.

Preuve. L'opérateur $\mathbb{F}^\pm: L^2 \rightarrow L^2$ est linéaire car

a) pour tous $f, g \in L^2$, il existe des suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ telles que $f_m \rightarrow f$ dans L^2 et $g_m \rightarrow g$ dans L^2 donc telles que la suite $(f_m + g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ converge dans L^2 vers $f + g$. Cela étant, on a

$$\mathcal{F}^\pm(f_m + g_m) \xrightarrow[L^2]{} \mathbb{F}^\pm(f + g)$$

et

$$\mathcal{F}^\pm f_m + \mathcal{F}^\pm g_m \xrightarrow[L^2]{} \mathbb{F}^\pm f + \mathbb{F}^\pm g$$

donc $\mathbb{F}^\pm(f + g) = \mathbb{F}^\pm f + \mathbb{F}^\pm g$ car on a $\mathcal{F}^\pm(f_m + g_m) = \mathcal{F}^\pm f_m + \mathcal{F}^\pm g_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

b) pour tout $f \in L^2$ et tout $c \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ qui converge dans L^2 vers f donc telle que $\mathcal{F}^\pm f_m \rightarrow \mathbb{F}^\pm f$ dans L^2 . Comme la suite $(cf_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L^2 vers cf alors que tous ses éléments appartiennent à $L^1 \cap L^2$, on a aussi $\mathcal{F}^\pm(cf_m) \rightarrow \mathbb{F}^\pm(cf)$ dans L^2 . Au total, il vient alors $\mathbb{F}^\pm(cf) = c\mathbb{F}^\pm f$ car on a bien sûr $\mathcal{F}^\pm(cf_m) = c\mathcal{F}^\pm f_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

De plus, on a $\|\mathbb{F}^\pm f\| = (2\pi)^{n/2} \|f\|$ pour tout $f \in L^2$ car, si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ converge dans L^2 vers f , il vient $\mathcal{F}^\pm f_m \rightarrow \mathbb{F}^\pm f$ dans L^2 donc $\|\mathcal{F}^\pm f_m\|_2 \rightarrow \|\mathbb{F}^\pm f\|_2$ avec $\|\mathcal{F}^\pm f_m\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f_m\|_2$ pour tout m et $\|f_m\|_2 \rightarrow \|f\|_2$.

On en déduit aussitôt l'injectivité de \mathbb{F}^\pm .

La surjectivité de \mathbb{F}^\pm résulte directement du résultat suivant. ■

Théorème 8.2.2 (Fourier) *On a*

$$\mathbb{F}^\mp \mathbb{F}^\pm f = (2\pi)^n f, \quad \forall f \in L^2.$$

Preuve. Pour tout $f \in L^2$, il existe une suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $D_\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans L^2 vers f . On a alors $\mathcal{F}^\pm \varphi_m \rightarrow \mathbb{F}^\pm f$ dans L^2 et, comme les fonctions $\mathcal{F}^\pm \varphi_m$ appartiennent à $L^1 \cap L^2$, on a aussi $\mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm \varphi_m \rightarrow \mathbb{F}^\mp \mathbb{F}^\pm f$ dans L^2 , c'est-à-dire, vu le théorème de Fourier dans L^1 , $(2\pi)^n \varphi_m \rightarrow \mathbb{F}^\mp \mathbb{F}^\pm f$ dans L^2 , ce qui suffit. ■

Remarque. Par conséquent, il ne peut y avoir de propriétés générales de continuité, de bornation, de convergence vers 0 à l'infini ou d'appartenance à L^1 pour $\mathbb{F}^\pm f$. On trouvera cependant des résultats partiels de cet ordre au paragraphe suivant. □

Théorème 8.2.3 (Transfert) *On a*

$$\langle \mathbb{F}^\pm f, g \rangle = \langle f, \mathbb{F}^\mp g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2$$

donc, en particulier,

$$\langle \mathbb{F}^\pm f, \mathbb{F}^\pm g \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2.$$

Preuve. De fait, si les suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ convergent dans L^2 vers f et g respectivement, on a successivement

$$\langle \mathbb{F}^\pm f, g \rangle = \lim_m \langle \mathcal{F}^\pm f_m, g_m \rangle = \lim_m \langle f_m, \mathcal{F}^\mp g_m \rangle = \langle f, \mathbb{F}^\mp g \rangle.$$

Le cas particulier résulte alors aussitôt du théorème de Fourier. ■

Exercice. Vérifier qu'on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 dx &= \pi; \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ax) \cdot \sin(bx)}{x^2} dx &= \pi \inf\{a, b\} \quad \text{si } 0 < a, b; \\ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(rx)}{x} \right)^4 dx &= \frac{2\pi}{3} r^3 \quad \text{si } r \geq 0; \\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} &= \frac{\pi}{2ab(a+b)} \quad \text{si } 0 < a, b. \end{aligned}$$

Suggestion. Etablissons par exemple la première formule: $f = \chi_{]-1,1[}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et vérifie $\mathcal{F}_y^\pm f = \mathbb{F}_y^\pm f = 2(\sin(y))/y$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}^+ f \cdot \mathbb{F}^- f dx = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} f \bar{f} dx = \pi. \square$$

Exercice. a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m \left(1 - \frac{|x|}{m} \right) e^{ixy} dx$$

(cf. exercice p. 128).

b) Etablir que

$$\frac{m}{2\pi} \left(\frac{\sin(my/2)}{my/2} \right)^2$$

définit une unité approchée de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, (cf. première partie de l'exercice précédent).

c) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, calculer

$$f_m(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m \left(1 - \frac{|x|}{m} \right) e^{ixy} \mathcal{F}_x^- f dx.$$

d) En déduire que, pour toute fonction uniformément continue, bornée et intégrable f sur \mathbb{R} , la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f . \square

Question. Etant donné $f \in L^2(\mathbb{R})$, envisageons d'étudier la convergence de la suite

$$\left(S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m \mathbb{F}_y^+ f \cdot e^{-ixy} dy \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

vers $f(x)$ si $m \rightarrow +\infty$. (Comme la suite $(\mathbb{F}^+ f \cdot \chi_{]-m,m[})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{F}^+ f$, nous savons déjà que la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers f .)

Etablissons d'abord une autre expression de $S_m(x)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, le théorème de Fourier affirme qu'il existe $g_m \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\mathbb{F}_y^+ g_m = \frac{e^{ixy}}{2\pi} \chi_{]-m,m[}(y),$$

à savoir

$$g_m(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{F}_t^- \mathbb{F}^+ g_m = \dots = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin(m(x-t))}{x-t}.$$

Dès lors il vient successivement

$$S_m(x) = \langle \mathbb{F}^+ f, \mathbb{F}^+ g_m \rangle = \dots = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x+t) + f(x-t)) \cdot \frac{\sin(mt)}{t} dt. \square$$

Théorème 8.2.4 *Si la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie et monotone sur un voisinage de $x \in \mathbb{R}$, alors la suite $S_m(x)$ converge vers $(f(x^+) - f(x^-))/2$.*

Preuve. Adapter la preuve de la propriété correspondante relative au cas $f \in L^1(\mathbb{R})$. ■

Théorème 8.2.5 (Parseval) *On a*

$$\mathcal{F}^\mp(\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g) = (2\pi)^n f \star g \text{ sur } \mathbb{R}^n, \quad \forall f, g \in L^2,$$

donc, en particulier,

$$\mathcal{F}^\mp|\mathbb{F}^\pm f|^2 = (2\pi)^n f \star f^* \text{ sur } \mathbb{R}^n, \quad \forall f \in L^2.$$

Preuve. Soient $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ des suites de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 vers f et g respectivement. Vu le théorème de Parseval dans L^1 , nous avons

$$\mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f_m \cdot \mathcal{F}^\pm g_m) = (2\pi)^n f_m \star g_m \text{ sur } \mathbb{R}^n, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Or, d'une part, la suite $(\mathcal{F}^\pm f_m \cdot \mathcal{F}^\pm g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L^1 vers $\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g$, ce qui entraîne

$$\mathcal{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f_m \cdot \mathcal{F}^\pm g_m) \xrightarrow[L^\infty]{} \mathcal{F}^\mp(\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g).$$

D'autre part, la suite $(f_m \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge dans L^∞ vers $f \star g$. Au total, les fonctions $\mathcal{F}^\mp(\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g)$ et $(2\pi)^n f \star g$ sont continues et égales pp sur \mathbb{R}^n , donc sont égales sur \mathbb{R}^n .

Le cas particulier est direct. ■

8.3 Propriétés particulières

Proposition 8.3.1 *Si $f \in L^2$ est tel que $\mathbb{F}^\pm f \in L^\infty$ (ce qui a lieu pour tout $f \in L^1 \cap L^2$), alors, pour tout $g \in L^2$, on a*

$$\begin{cases} f \star g \in L^2 \\ \mathbb{F}^\pm(f \star g) = \mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g \\ \|f \star g\|_2 \leq \|\mathbb{F}^\pm f\|_\infty \cdot \|g\|_2. \end{cases}$$

Preuve. Vu le théorème de Parseval et le fait que $\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g$ appartient à L^2 , on a

$$(2\pi)^n f \star g = \mathcal{F}^\mp(\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g) = \mathbb{F}^\mp(\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g)$$

pp sur \mathbb{R}^n . Cela étant,

- a) la première assertion est triviale,
 b) la deuxième assertion résulte aussitôt du théorème de Fourier dans L^2 ,
 c) on a successivement

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \|f \star g\|_2 &= \|\mathbb{F}^\mp(\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g)\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\mathbb{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g\|_2 \\ &\leq (2\pi)^{n/2} \|\mathbb{F}^\pm f\|_\infty \|\mathbb{F}^\pm g\|_2 = (2\pi)^n \|\mathbb{F}^\pm f\|_\infty \|g\|_2. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 8.3.2 *Pour tout $f \in L^1$ et tout $g \in L^2$, on a $f \star g \in L^2$ et*

$$\mathbb{F}^\pm(f \star g) = \mathcal{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g \text{ pp sur } \mathbb{R}^n.$$

Preuve. L'appartenance de $f \star g$ à L^2 est connue.

Si la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^1 \cap L^2$ converge dans L^2 vers g , $(f \star g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de $L^1 \cap L^2$ qui converge dans L^2 vers $f \star g$. Dès lors, on a successivement

$$\mathbb{F}^\pm(f \star g) = \lim_m \mathcal{F}^\pm(f \star g_m) = \lim_m (\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm g_m) = \mathcal{F}^\pm f \cdot \mathbb{F}^\pm g$$

dans L^2 , ce qui suffit. \blacksquare

Exercice. Etablir que, pour tout $f \in L^1$ tel que $\mathcal{F}^\pm f \in L^2$, on a $f \in L^2$.

Suggestion. a) Si ρ_ε est une unité approchée universelle de convolution, on a $\mathcal{F}^\pm \rho_\varepsilon \in L^1 \cap L^2 \cap L^\infty$, $\|\mathcal{F}^\pm \rho_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ et $\mathcal{F}_y^\pm \rho_\varepsilon \rightarrow 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

b) Si $f \in L^1$ est tel que $\mathcal{F}^\pm f \in L^2$, établir successivement que

i) $\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm \rho_\varepsilon \rightarrow \mathcal{F}^\pm f$ dans L^2 ,

ii) $\mathbb{F}^\mp(\mathcal{F}^\pm f \cdot \mathcal{F}^\pm \rho_\varepsilon) \rightarrow (2\pi)^n f$ dans L^1 .

c) On a alors $(2\pi)^n f = \mathbb{F}^\mp \mathcal{F}^\pm f$ dans L^2 . \square

Proposition 8.3.3 *Pour tout $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ tel que $D^\alpha f$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$, on a*

$$\mathbb{F}_y^\pm(D^\alpha f) = (\mp iy)^\alpha \mathbb{F}_y^\pm f \text{ pp sur } \mathbb{R}^n$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$.

Preuve. Soit ρ_ε une unité approchée universelle de convolution. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$, on a alors successivement

$$\mathbb{F}_y^\pm(D^\alpha f) = \lim \mathbb{F}_y^\pm((D^\alpha f) \star \rho_\varepsilon) = \lim \mathbb{F}_y^\pm(f \star (D^\alpha \rho_\varepsilon)) = \lim \mathbb{F}_y^\pm f \cdot (\mp iy)^\alpha \mathcal{F}_y^\pm \rho_\varepsilon$$

dans L^2 . Pour conclure, il suffit alors d'établir que $\mathcal{F}_y^\pm \rho_\varepsilon$ converge vers 1 en tout point y de \mathbb{R}^n . Or, on a bien sûr

$$\mathcal{F}_y^\pm \rho_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle x, y \rangle} \rho_1(x/\varepsilon) dx \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \varepsilon \langle x', y \rangle} \rho_1(x') dx' \stackrel{(**)}{\rightarrow} 1$$

en recourant en (*) au changement de variable linéaire $x' = x/\varepsilon$ et en (**) au théorème de la convergence majorée. \blacksquare

Proposition 8.3.4 *Pour tout $f \in L^2 \cap L^\infty$ tel que $\mathbb{F}^\pm f \geq 0$ pp, on a $\mathbb{F}^\pm f \in L^1$.*

Preuve. Comme les fonctions

$$f_m(y) = \mathbb{F}_y^\pm f \cdot e^{-|y|^2/m}$$

- a) appartiennent à L^1 (comme produit de deux éléments de L^2),
- b) constituent une suite qui croît pp sur \mathbb{R}^n vers $\mathbb{F}_y^\pm f$,
- c) vérifient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y) dy &\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathbb{F}_{x \rightarrow y}^\pm \left(e^{-|x|^2/m} \right) dy \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot (m\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-m|y|^2/4} dy = (2\pi)^n \|f\|_\infty \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ (en (*), on utilise le théorème de transfert), la propriété résulte aussitôt du théorème de la convergence monotone. ■

Voici un complément intéressant relatif aux transformées de Fourier dans L^1 .

Proposition 8.3.5 *Une fonction f intégrable sur \mathbb{R}^n vérifie $\mathcal{F}^\pm f \geq 0$ si et seulement si on a*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-y) \varphi(x) \overline{\varphi(y)} dx dy \geq 0, \quad \forall \varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varphi \in D_\infty(\mathbb{R}^n)$, on vérifie de suite en recourant au théorème de Tonelli que la fonction $f(x-y) \varphi(x) \overline{\varphi(y)}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{2n} :

- a) elle est mesurable sur \mathbb{R}^{2n} ,
- b) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|\varphi(x)| \cdot \left| f(x-y) \overline{\varphi(y)} \right|$ est intégrable sur \mathbb{R}^n vu le cas $L^1 \star L^1$,
- c) $(|f| \star |\varphi|)(x) \cdot |\varphi(x)|$ est majoré pp sur \mathbb{R}^n par la fonction intégrable $\| |f| \star |\varphi| \|_\infty \cdot |\varphi|$. Cela étant, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-y) \varphi(x) \overline{\varphi(y)} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot (f \star \overline{\varphi})(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\mp \varphi \cdot \mathcal{F}^\pm (f \star \overline{\varphi}) dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \cdot |\mathcal{F}^\mp \varphi|^2 dx \end{aligned}$$

(en (*), on utilise l'égalité $\varphi = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^\pm \mathcal{F}^\mp \varphi$ et le théorème de transfert).

Cela étant acquis, la condition est évidemment nécessaire.

Etablissons qu'elle est suffisante. Comme, pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans $D_\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers g donc telle que $|\mathcal{F}^\mp \varphi_m|^2 \rightarrow |\mathcal{F}^\mp g|^2$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \cdot |\mathcal{F}^\mp g|^2 dx \geq 0, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Cela étant, vu la surjectivité de \mathbb{F}^\pm , il vient

$$\int \mathbb{R}^n \mathcal{F}^\pm f \cdot |h| dx \geq 0, \quad \forall h \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Dès lors, la fonction continue $\mathcal{F}^\pm f$ est réelle car si sa partie imaginaire diffère de 0 en un point y_0 de \mathbb{R}^n , elle est strictement positive ou strictement négative en tout point d'une boule b de centre y_0 et on obtient la contradiction

$$\Im \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \cdot \chi_b dx \neq 0.$$

Enfin la fonction réelle et continue $\mathcal{F}^\pm f$ est ≥ 0 car s'il existe un point y_0 de \mathbb{R}^n où elle prend une valeur strictement négative, il existe une boule b de centre y_0 telle que $\mathcal{F}_y^\pm f < 0$ en tout $y \in b$, d'où on tire la contradiction

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^\pm f \cdot \chi_b dx < 0. \blacksquare$$

Exercice. Etablir qu'il existe $f \in L^2$ tel que $\mathbb{F}^+ f \in L^\infty$ et $f \notin L^1$.

Suggestion. La fonction $g = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{]m, m+2^{-m}]}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas égale pp à un élément de $C^0(\mathbb{R})$. Dès lors, $f = (2\pi)^{-1} \mathbb{F}^- g$ est un élément de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{F}^+ f = g$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. Cependant f ne peut appartenir à $L^1(\mathbb{R})$ car cela entraînerait $\mathcal{F}^+ f = \mathbb{F}^+ f$ pp sur \mathbb{R} avec $\mathcal{F}^+ f \in C^0(\mathbb{R})$. Le cas \mathbb{R}^n s'en déduit aussitôt. \square

Exercice. Etablir que si $f \in L^{1,2}(\mathbb{R})$ a un support pp compact non vide, alors sa transformée de Fourier a \mathbb{R} pour support pp.

Suggestion. Soient f un élément non nul de $L^{1,2}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tels que $f = 0$ pp sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$. On en déduit de suite que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}^\pm f \in C_\infty(\mathbb{R})$, les dérivées s'effectuant sous le signe \mathcal{F}^\pm . Supposons qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathcal{F}_x^\pm f = 0$ pour tout $x \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Par dérivations successives, on obtient alors

$$\int_{-a}^a e^{\pm ixy} y^k f(y) dy = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[.$$

Cela étant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{m=0}^M \frac{(\pm i)^k (x-b)^k}{k!} y^k f(y) e^{\pm i b y} \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

est une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R} , qui converge pp sur \mathbb{R} vers

$$e^{\pm i(x-b)y} f(y) e^{\pm i b y} = e^{\pm i x y} f(y)$$

et telle que

$$\left| \sum_{m=0}^M \frac{(\pm i)^k (x-b)^k}{k!} y^k f(y) e^{\pm i b y} \right| \leq \sum_{m=0}^M \frac{|x-b|^k}{k!} a^k |f(y)| \leq e^{a|x-b|} |f(y)|$$

pp sur \mathbb{R} , où la dernière majorante appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Vu le théorème de la convergence majorée, on obtient $\mathcal{F}_x^\pm f = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$ pp sur \mathbb{R} . D'où la conclusion. \square

Exercice. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ non nul et tout $r \in \mathbb{R}$, posons

$$\Delta_r f = \frac{\|(x-r)f(x)\|^2}{\|f\|^2}$$

si $(x-r)f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\Delta_r f = +\infty$ sinon.

Cela étant, établir l'**inégalité de Heisenberg**: pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ et tous $r, s \in \mathbb{R}$, on a $(\Delta_r f) \cdot (\Delta_s \mathbb{F}^- f) \geq 1/4$.

Suggestion. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Pour tous $r, s \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x) = e^{-irx} f(x+s)$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et on a tôt fait de vérifier que $\Delta_r \mathbb{F}^- f = \Delta_0 \mathbb{F}^- g$ et $\Delta_s f = \Delta_0 g$. Il suffit donc de prouver que $(\Delta_0 f) \cdot (\Delta_0 \mathbb{F}^- f) \geq 1/4$.

En voici une preuve dans le cas où f appartient aussi à $C_1(\mathbb{R})$ et vérifie $Df \in L^2(\mathbb{R})$.

Vu la définition de $\Delta_0 f$, seul le cas où $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est à considérer. Cela étant, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, par intégration par parties, il vient

$$\int_a^b x \overline{f(x)} Df(x) dx = x |f(x)|^2 \Big|_a^b - \int_a^b |f(x)|^2 + x f(x) \overline{Df(x)} dx$$

donc

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = -2 \Re \int_a^b x \overline{f(x)} Df(x) dx + x |f(x)|^2 \Big|_a^b$$

et, comme f^2 et $x \overline{f(x)} Df(x)$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, on obtient que $x |f(x)|^2$ admet des limites en $+\infty$ et en $-\infty$, qui doivent être nulles car $x |f(x)|^2$ est intégrable sur \mathbb{R} . Il vient alors

$$\|f\|^2 = -2 \Re \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} Df(x) dx$$

donc, vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|f\|^4 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |Df(x)|^2 dx.$$

Mais on a $\|f\|^2 = (2\pi)^{-1} \|\mathbb{F}^- f\|^2$ et

$$\|Df\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathbb{F}^- Df\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|x\mathbb{F}^- f(x)\|^2,$$

ce qui suffit. \square

Exercice. Si on pose $F = (2\pi)^{-n/2} \mathbb{F}^+$, établir que

a) $FFFF = \text{id}$,

b) pour

$$\begin{aligned} P_0 &= (\text{id} + F + FF + FFF)/4 \\ P_1 &= (\text{id} - iF - FF + iFFF)/4 \\ P_2 &= (\text{id} - F + FF - FFF)/4 \\ P_3 &= (\text{id} + iF - FF - iFFF)/4, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} P_k P_l &= \begin{cases} \text{id} & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l, \end{cases} \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= \text{id} \\ P_k F &= F P_k = i^k P_k. \end{aligned}$$

En particulier, tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet une décomposition $f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$ en éléments de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $Ff = f_0 + if_1 - f_2 - if_3$. \square

Exercice. Etant donné $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, posons

$$S_f = \left\{ \sum_{k=1}^K c_k f(\cdot + r_k) : c_k \in \mathbb{C}, r_k \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Etablir successivement que

- l'adhérence $\overline{S_f}$ de S_f dans L^2 est un sous-espace vectoriel de L^2 .
- pour tout $g \in \overline{S_f}$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a $g(\cdot + r) \in \overline{S_f}$.
- pour tout $g \in \overline{S_f}$, on a $\overline{S_g} \subset \overline{S_f}$.

Un théorème de N. Wiener signale que S_f est une partie dense de L^2 si on a $\mathbb{F}_x^\pm f \neq 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. (Cf. [2], pp. 104–105.) \square

8.4 Exemple remarquable

Nous savons (cf. remarque, paragraphe 6.4) que la fonction $(\sin(x))/x$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$. Cependant, pour tout $N > 0$, la fonction

$$\frac{\sin(x)}{x} \chi_{]-N, N[}(x)$$

est intégrable sur \mathbb{R} et, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \left(\frac{\sin(x)}{x} \chi_{]-N, N[}(x) \right) &= \int_{-N}^N \frac{\sin(x)}{x} \cos(xy) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-N}^N \frac{\sin(x(1+y)) + \sin(x(1-y))}{x} dx \\ &\xrightarrow{(*)} \pi \chi_{]-1, 1[}(y) + \frac{\pi}{2} \chi_{\{-1, 1\}}(y) \end{aligned}$$

(en (*), on utilise le résultat du premier exercice du paragraphe 6.9). Par conséquent, il vient

$$\mathbb{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \frac{\sin(x)}{x} = \pi \chi_{]-1, 1[}(y) \quad pp \text{ sur } \mathbb{R},$$

résultat qu'on pouvait aussi déduire directement de la formule

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \chi_{]-1, 1[} = 2 \frac{\sin(y)}{y} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Chapitre 9

Transformation de Laplace dans L^2

9.1 Définition

Par analogie avec l'introduction de la transformation de Fourier dans L^2 , on peut introduire une transformation de Laplace dans L^2 .

Définition. La fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n admet une *transformée de Laplace* $\mathbb{L}_p F$ dans L^2 en $p = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ si $e^{-\langle p, x \rangle} F(x)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$; elle est alors définie selon

$$\mathbb{L}_p F = \mathbb{F}_\eta^- (e^{-\langle \xi, \cdot \rangle} F(\cdot)).$$

Proposition 9.1.1 *La transformée de Laplace en $p \in \mathbb{R}^{2n}$ de la fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n existe si et seulement si ξ appartient à l'ensemble convexe*

$$\mathbb{I}_F = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : e^{-\langle \xi, x \rangle} F(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \} \blacksquare$$

La propriété suivante limite considérablement l'intérêt de l'introduction de cette transformation de Laplace dans L^2 .

Proposition 9.1.2 *Pour toute fonction F mesurable sur \mathbb{R}^n , on a $(\mathbb{I}_F)^\circ \subset \Gamma_F$ et, pour tout $\xi \in (\mathbb{I}_F)^\circ$, on a $\mathbb{L}_p F = \mathcal{L}_p F$ pp.*

Preuve. Pour tout $\xi_0 \in (\mathbb{I}_F)^\circ$, il existe $r > 0$ tel que la boule compacte $\{ \xi : |\xi - \xi_0| \leq r \}$ soit incluse dans $(\mathbb{I}_F)^\circ$ donc soit enveloppée dans \mathbb{I}_F : il existe $r \geq 0$, $J \in \mathbb{N}_0$ et $\xi_1, \dots, \xi_J \in \mathbb{I}_F$ tels que

$$e^{-\langle \xi_0, x \rangle} |F(x)| \leq e^{-r|x|} \sum_{j=1}^J e^{-\langle \xi_j, x \rangle} |F(x)|$$

donc tels que la fonction mesurable $e^{-\langle \xi_0, x \rangle} F(x)$ ait son module majoré par une fonction intégrable. \blacksquare

Chapitre 10

Séries de Fourier dans $L^2(E)$

10.1 Suites orthogonales dans $L^2(E)$

Soit E une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

Définition. Deux éléments u et v de $L^2(E)$ sont *orthogonaux* et on écrit $u \perp v$ si on a $\langle u, v \rangle = 0$. Il est clair qu'on a alors $v \perp u$ également.

Proposition 10.1.1 *Toute combinaison linéaire d'éléments de $L^2(E)$ orthogonaux à $f \in L^2(E)$ est aussi orthogonale à f .* ■

Proposition 10.1.2 *Soient u_m et f des éléments de $L^2(E)$.*

Si la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(E)$ vers u_0 et si chacun des u_m est orthogonal à f , alors u_0 est orthogonal à f .

Preuve. De fait, on a alors $\langle u_m, f \rangle \rightarrow \langle u_0, f \rangle$. ■

Théorème 10.1.3 (Pythagore) a) *Pour tout nombre fini d'éléments u_1, \dots, u_J de $L^2(E)$ orthogonaux deux à deux, on a*

$$\left\| \sum_{j=1}^J u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^J \|u_j\|^2.$$

b) *Si $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite d'éléments de $L^2(E)$ qui sont orthogonaux deux à deux, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ converge dans $L^2(E)$ si et seulement si la série numérique réelle à termes positifs $\sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2$ converge, auquel cas on a*

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} u_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2.$$

Preuve. a) est immédiat vu que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^J u_j \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^J u_j, \sum_{k=1}^J u_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \langle u_j, u_k \rangle = \sum_{j=1}^J \langle u_j, u_j \rangle = \sum_{j=1}^J \|u_j\|^2. \end{aligned}$$

b) Vu a), pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ tels que $r < s$, il vient

$$\left\| \sum_{m=r}^s u_m \right\|^2 = \sum_{m=r}^s \|u_m\|^2,$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ est de Cauchy dans $L^2(E)$ si et seulement si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2$ est de Cauchy. La conclusion est alors immédiate. ■

10.2 Suites orthonormées dans $L^2(E)$

Soit E une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

Définition. Une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^2(E)$ est *orthonormée* si ses éléments sont normés et orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si et seulement si on a $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$.

Théorème 10.2.1 Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée de $L^2(E)$.

a) Si $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de nombres complexes, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$ converge dans $L^2(E)$ si et seulement si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge, auquel cas il vient

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2.$$

b) Pour tout $f \in L^2(E)$, il existe une suite $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{C} et $g \in L^2(E)$ tels que

i) $g \perp u_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

ii) la série $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge,

iii) $f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m + g$.

En fait, cette décomposition est unique et on a

$$\begin{cases} c_m &= \langle f, u_m \rangle, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \\ \|f\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2 + \|g\|^2. \end{cases}$$

Preuve. a) est un cas particulier du théorème de Pythagore car les $c_m u_m$ sont orthogonaux deux à deux et tels que $\|c_m u_m\| = |c_m|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

b) Si une telle décomposition existe, elle est unique et c_m est égal à $\langle f, u_m \rangle$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ car on a alors

$$\langle f, u_m \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j, u_m \right\rangle + \langle g, u_m \rangle = \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^J c_j \langle u_j, u_m \rangle = c_m.$$

Cela étant, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons

$$g_M = f - \sum_{m=1}^M \langle f, u_m \rangle u_m.$$

On vérifie de suite que, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, la fonction g_M est orthogonale aux u_1, \dots, u_M ; cela implique l'égalité

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^M |\langle f, u_m \rangle|^2 + \|g_M\|^2, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0.$$

Ceci assure que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle u_m$ converge dans $L^2(E)$. Dès lors, la suite $(g_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge dans $L^2(E)$ vers un élément g tel que

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle u_m + g.$$

Enfin, vu la continuité du produit scalaire, g est orthogonal à chacun des u_m . D'où la conclusion. ■

10.3 Suites orthonormées totales dans L^2

Soit E une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

Définition. La suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^2(E)$ est *totale* dans cet espace si 0 est le seul élément de $L^2(E)$ qui soit orthogonal à chacun des u_m , c'est-à-dire si on a

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(E) \\ f \perp u_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\} \implies f = 0.$$

Théorème 10.3.1 Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée totale dans $L^2(E)$.

a) **Développement en série de Fourier.** On a

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle u_m, \quad \forall f \in L^2(E).$$

b) **Formules de Parseval.** On a

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2, \quad \forall f \in L^2(E),$$

et

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle \overline{\langle g, u_m \rangle}, \quad \forall f, g \in L^2(E).$$

Preuve. a) et la première formule de Parseval résultent aussitôt du paragraphe précédent et du fait que la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est totale.

La deuxième formule de Parseval est alors une conséquence immédiate de la continuité du produit scalaire car on a successivement

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=1}^M \langle f, u_j \rangle u_j, \sum_{k=1}^M \langle g, u_k \rangle u_k \right\rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \langle f, u_m \rangle \overline{\langle g, u_m \rangle} = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle \overline{\langle g, u_m \rangle}. \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 10.3.2 Si $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite orthonormée totale dans $L^2(E)$, alors le développement en série de Fourier de $f \in L^2(E)$ peut être intégré terme à terme sur toute partie intégrable de E .

Preuve. De fait, pour une telle partie intégrable A de E , on a $\chi_A \in L^2(E)$ donc

$$\int_A f \, dx = \langle f, \chi_A \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle \overline{\langle \chi_A, u_m \rangle}$$

c'est-à-dire

$$\int_A \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle u_m \, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle \cdot \int_A u_m \, dx. \blacksquare$$

Critère 10.3.3 (Totalité) Une suite orthonormée $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $L^2(E)$ est totale dans cet espace si et seulement si, pour tout $f \in L^2(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ et des coefficients complexes c_1, \dots, c_M tels que

$$\left\| f - \sum_{m=1}^M c_m u_m \right\| \leq \varepsilon.$$

Preuve. La nécessité de la condition résulte aussitôt du théorème précédent.

La condition est suffisante. Soit g un élément de $L^2(E)$, orthogonal à chacun des u_m . Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ et des $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left\| g - \sum_{m=1}^M c_m u_m \right\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{m=1}^M |c_m|^2 \leq \varepsilon^2$$

donc tels que $\|g\| \leq \varepsilon$, ce qui suffit pour conclure. ■

10.4 Convergence *pp* des séries de Fourier

Soit E une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

Remarque. Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée totale dans $L^2(E)$. Nous venons de voir que, pour tout $f \in L^2(E)$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m \rangle u_m$ converge dans $L^2(E)$ vers f . Vu le critère de Cauchy, il existe une sous-suite de la suite des sommes partielles de cette série qui converge *pp* sur E vers f . Dans ce paragraphe, nous cherchons à préciser la connaissance de telles sous-suites.

Lemme 10.4.1 Soient $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée dans $L^2(E)$ et $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge.

Si les $M(k) \in \mathbb{N}_0$ croissent et sont tels que

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m - \sum_{m=1}^{M(k)} c_m u_m \right\|^2 = \sum_{m=M(k)+1}^{\infty} |c_m|^2 = R_k$$

soit le terme général d'une série convergente, alors la suite $\sum_{m=1}^{M(k)} c_m u_m$ converge *pp* sur E vers $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$.

Preuve. Afin de simplifier les notations, posons $S_{M(k)} = \sum_{m=1}^{M(k)} c_m u_m$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et $S = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$.

Cela étant, on vérifie aisément que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k=1}^{\infty} |S - S_{M(k)}|^2$ vérifie les conditions d'application du théorème de la convergence

monotone:

- a) les sommes partielles appartiennent à $L^1(E)$,
- b) la suite des sommes partielles croît *pp* sur E ,
- c) on a bien sûr

$$\int_E \sum_{k=1}^K |S - S_{M(k)}|^2 dx = \sum_{k=1}^K \|S - S_{M(k)}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} R_k, \quad \forall K \in \mathbb{N}_0.$$

Dès lors, cette série converge *pp* sur E et son terme général doit donc converger *pp* sur E vers 0, ce qui suffit. ■

Proposition 10.4.2 Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée dans $L^2(E)$ et soit $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de nombres complexes.

S'il existe $M \in \mathbb{N}_0$ et $C > 0$ tels que

$$|c_m| \leq \frac{C}{m} \text{ et } |u_m(x)| \leq C \text{ pp sur } E, \quad \forall m \geq M,$$

alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$ converge dans $L^2(E)$ et *pp* sur E vers la même limite.

Preuve. D'une part, la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$ converge dans $L^2(E)$ car la série $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge.

D'autre part, on établit d'abord au moyen du lemme précédent que la suite $(\sum_{m=1}^{M(k)} c_m u_m)_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge *pp* sur E si on pose $M(k) = k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. En effet, pour k suffisamment grand, on a bien sûr $k^2 + 1 \geq M$ donc

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m - \sum_{m=1}^{k^2} c_m u_m \right\|^2 = \sum_{m=k^2+1}^{\infty} |c_m|^2 \leq C^2 \sum_{m=k^2+1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

avec

$$\sum_{m=k^2+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \int_{k^2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{k^2},$$

ce qui suffit. Cela étant, il suffit de noter que, pour tout $N \geq M^2$, il existe un entier $k \geq M$ tel que $k^2 \leq N < (k+1)^2$ donc tel que

$$|S_N - S_{k^2}| \leq ((k+1)^2 - k^2) \frac{C^2}{k^2} = \frac{2k+1}{k^2} C^2 \text{ pp sur } E$$

où la majorante converge vers 0 si $k \rightarrow \infty$. ■

Voici deux compléments relatifs aux éléments des séries de Fourier convergentes.

Proposition 10.4.3 Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée dans $L^2(E)$ et soit $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de nombres complexes.

Si la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$ converge dans $L^2(E)$, alors la suite c_m converge vers 0 et la suite $c_m u_m$ converge pp sur E vers 0.

Preuve. D'une part, comme la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$ converge dans $L^2(E)$, il est clair que la suite c_m converge vers 0; $*$ \rightarrow en fait, elle appartient même à l'espace $\ell^2 \leftarrow *$.

D'autre part, on vérifie directement que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m u_m|^2$ vérifie les conditions d'application du théorème de la convergence monotone, ce qui implique la convergence pp sur E de cette série, ce qui suffit pour conclure. ■

10.5 Suite trigonométrique de Fourier

Convention. Dans ce paragraphe et le suivant, sauf mention explicite du contraire,

- a) I est l'intervalle compact $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ de \mathbb{R}^n , on a donc $a_j < b_j$ pour tout $j \leq n$,
- b) r_1, \dots, r_n sont des nombres réels,
- c) pour tout $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell(I)}} e^{2i\pi \sum_{j=1}^n m_j \frac{x_j - r_j}{b_j - a_j}} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{b_j - a_j}} e^{2i\pi m_j \frac{x_j - r_j}{b_j - a_j}}.$$

Le résultat suivant donne les propriétés immédiates de ces fonctions u_m .

Proposition 10.5.1 Pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$, on a

- a) $\overline{u_m} = u_{-m}$ (on pose bien sûr $-m = (-m_1, \dots, -m_n)$);
- b) $u_m \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ donc $u_m|_I \in L^1(I) \cap L^2(I) \cap L^{\infty}(I)$;
- c) $|u_m(x)| \leq 1/\sqrt{\ell(I)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;
- d) $u_m(x_1 + k_1(b_1 - a_1), \dots, x_n + k_n(b_n - a_n)) = u_m(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$: u_m est une fonction périodique sur \mathbb{R}^n , de période $T = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$. ■

Théorème 10.5.2 Pour toute numérotation de \mathbb{Z}^n , $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ est une suite orthonormée totale dans $L^2(I)$, appelée suite trigonométrique de Fourier dans $L^2(I)$.

Preuve. Bien sûr \mathbb{Z}^n est un ensemble dénombrable; on peut donc le numéroté.

a) La suite $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ est orthonormée dans $L^2(I)$.

Comme les u_m sont à variables séparées, il suffit de noter que, pour tous $m', m'' \in \mathbb{Z}$ et tous $a, b, r \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{e^{2i\pi m' \frac{x-r}{b-a}}}{\sqrt{b-a}} \cdot \frac{e^{-2i\pi m'' \frac{x-r}{b-a}}}{\sqrt{b-a}} dx &= \frac{e^{2i\pi r \frac{m''-m'}{b-a}}}{b-a} \int_a^b e^{2i\pi \frac{m'-m''}{b-a} x} dx \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } m' = m'' \\ 0 & \text{si } m' \neq m'' \end{cases}. \end{aligned}$$

b) la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ est totale dans $L^2(I)$.

Vu le critère de totalité, il suffit de prouver que, pour tout $f \in L^2(I)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ et des $c_m \in \mathbb{C}$ avec $m \in \mathbb{Z}^n$, $-M \leq m_j \leq M$ pour tout $j = 1, \dots, n$, tels que

$$\left\| f - \sum_{m_1=-M}^M \dots \sum_{m_n=-M}^M c_m u_m \right\| \leq \varepsilon.$$

Vu le deuxième théorème d'approximation, il existe une fonction $\varphi \in D_\infty(I^\circ)$ telle que $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon/2$. Cela étant, désignons par Φ la fonction périodique de période $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ égale à φ sur I° et à 0 sur I^\bullet ; bien sûr, on a alors $\Phi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Vu le théorème d'approximation trigonométrique de Weierstrass 3.7.9, il existe alors $M \in \mathbb{N}_0$ et des $c_m \in \mathbb{C}$ avec $m \in \mathbb{Z}^n$ et $|m| \leq M$, tels que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \Phi(x) - \sum_{m_1=-M}^M \dots \sum_{m_n=-M}^M c_m u_m(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\ell(I)}}.$$

Pour conclure, il suffit de noter que cela entraîne

$$\left\| \varphi - \sum_{m_1=-M}^M \dots \sum_{m_n=-M}^M c_m u_m \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

10.6 Séries trigonométriques de Fourier

Dans ce paragraphe, nous utilisons les notations introduites dans la convention du paragraphe précédent.

Bien sûr le résultat fondamental s'énonce comme suit.

Théorème 10.6.1 Développement en série trigonométrique. Pour toute numérotation $(m(M))_{M \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{Z}^n , on a

$$f = \sum_{M=1}^{\infty} \langle f, u_{m(M)} \rangle u_{m(M)} \text{ dans } L^2(I), \quad \forall f \in L^2(I),$$

formule qu'on écrit bien souvent sous une des formes

$$f = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} \langle f, u_m \rangle u_m \text{ ou } f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, u_m \rangle u_m.$$

Formules de Parseval. On a

$$\|f\|^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, u_m \rangle|^2, \quad \forall f \in L^2(I),$$

ainsi que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} \langle f, u_m \rangle \overline{\langle g, u_m \rangle}, \quad \forall f, g \in L^2(I),$$

ces séries numériques étant absolument convergentes.■

Remarque. Les u_m sont des éléments très particuliers de $L^2(I)$: par exemple, ils appartiennent à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et sont périodiques. On peut donc s'attendre à ce que les développements en séries trigonométriques de Fourier dans $L^2(I)$ jouissent de propriétés particulières.□

Remarque. Insistons sur le fait que nous savons déjà que, pour toute fonction $f \in L^2(I)$, la série trigonométrique de Fourier de f

a) converge dans $L^2(I)$ vers f ,

b) converge *pp* sur I vers f s'il existe une numérotation $m(M)$ de \mathbb{Z}^n , $N \in \mathbb{N}_0$ et $C > 0$ tels que $|\langle f, u_{m(M)} \rangle| \leq C/M$ pour tout $M \geq N$ car nous avons $|u_m(x)| \leq 1/\sqrt{\ell(I)}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.□

Théorème 10.6.2 (Carleson) Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$, alors, pour tout $f \in L^2(]a, b[)$, la suite $(\sum_{m=-M}^M \langle f, u_m \rangle u_m)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge dans $L^2(]a, b[)$ et *pp* sur $]a, b[$ vers f .

Preuve. Résultat admis (cf. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. **116**(1966), 135–137).■

Théorème 10.6.3 Si $f \in C_L(I^\circ)$ vérifie les conditions suivantes:

- 1) $D^\alpha f \in L^2(I)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$,
 - 2) $\langle f, (-D)^\alpha u_m \rangle = \langle D^\alpha f, u_m \rangle$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$ et tout $m \in \mathbb{Z}^n$,
- alors on a la

a) **convergence dans $L^2(I)$ de la série des dérivées terme à terme:** pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L$, on a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, u_m \rangle D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha f \quad \text{dans } L^2(I),$$

b) **convergence uniforme de la série des dérivées terme à terme:** pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L - n$, la série

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, u_m \rangle D^\alpha u_m$$

converge absolument et uniformément sur \mathbb{R}^n et coïncide sur I° avec $D^\alpha f$.

Preuve. Remarquons d'abord que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $m \in \mathbb{Z}^n$ non égal à 0, on a

$$D^\alpha u_m = \prod_{j=1}^n \left(2i\pi \frac{m_j}{b_j - a_j} \right)^{\alpha_j} u_m;$$

formule que, pour simplifier les notations, nous écrivons

$$D^\alpha u_m = \left(2i\pi \frac{m}{b - a} \right)^\alpha u_m.$$

a) Pour $\alpha = 0$, c'est le théorème de développement en série de Fourier dans $L^2(I)$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ non nul et tel que $|\alpha| \leq L$, c'est aussi le théorème de développement en série de Fourier appliqué à la fonction $D^\alpha f \in L^2(I)$ car on a bien sûr

$$\langle f, u_0 \rangle D^\alpha u_0 = 0 = \langle f, (-D)^\alpha u_0 \rangle u_0 = \langle D^\alpha f, u_0 \rangle u_0$$

ainsi que, pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$ non nul,

$$\begin{aligned} \langle f, u_m \rangle D^\alpha u_m &= \langle f, u_m \rangle \left(2i\pi \frac{m}{b - a} \right)^\alpha u_m = \left\langle f, \left(-2i\pi \frac{m}{b - a} \right)^\alpha u_m \right\rangle u_m \\ &= \langle f, (-D)^\alpha u_m \rangle u_m = \langle D^\alpha f, u_m \rangle u_m. \end{aligned}$$

b) Établissons d'abord ce résultat dans le cas où $I = [a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} . Numérotions les u_m de la manière suivante:

$$M(m) = \left\{ \begin{array}{ll} 2m & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ -2m + 1 & \text{si } m < 0 \end{array} \right\}, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

et considérons les $u_{m(M)}$. Posons $r = 1/2$ (en fait, ce qui suit est correct pour tout $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$). Comme en a), on obtient

$$(m(M) + r) \langle f, u_{m(M)} \rangle D^\alpha u_{m(M)} = \left\langle \left(\frac{b-a}{2i\pi} D + r \right) D^\alpha f, u_{m(M)} \right\rangle u_{m(M)}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L - 1$. Par conséquent, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \leq q$, il vient même

$$\begin{aligned} & \sqrt{b-a} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{M=p}^q |\langle f, u_{m(M)} \rangle D^\alpha u_{m(M)}(x)| \\ & \leq \sum_{M=p}^q \frac{|\langle \left(\frac{b-a}{2i\pi} D + r \right) D^\alpha f, u_{m(M)} \rangle|}{|m(M) + r|} \\ & \stackrel{(*)}{\leq} \left(\sum_{M=p}^q \left| \left\langle \left(\frac{b-a}{2i\pi} D + r \right) D^\alpha f, u_{m(M)} \right\rangle \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{M=p}^q \frac{1}{(m(M) + r)^2} \right)^{1/2} \\ & \leq \left\| \left(\frac{b-a}{2i\pi} D + r \right) D^\alpha f \right\| \cdot \left(\sum_{M=p}^q \frac{1}{(m(M) + r)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

où la majorante tend vers 0 si $p \rightarrow \infty$ car la série $\sum_{M=p}^q (m(M) + r)^{-2}$ converge (en (*), on a utilisé l'inégalité de Schwarz dans \mathbb{R}^{q-p+1}).

Dans le cas général, on procède de manière analogue. On choisit une numérotation $M(m)$ de \mathbb{Z}^n et un nombre $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p < q$, on obtient alors

$$\begin{aligned} & \sqrt{\ell(I)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{M=p}^q |\langle f, u_{m(M)} \rangle D^\alpha u_{m(M)}(x)| \\ & \leq \left\| \prod_{j=1}^n \left(\left(\frac{b_j - a_j}{2i\pi} D_j + r \right) D_j^{\alpha_j} \right) f \right\| \left(\sum_{M=p}^q \prod_{j=1}^n (m_j(M) + r)^{-2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et cette majorante converge vers 0 si $p \rightarrow \infty$ car, la série $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (m + r)^{-2}$ étant convergente, il en est de même pour la série

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n (m_j + r)^{-2}. \blacksquare$$

Remarque. La condition ii) de l'hypothèse du théorème précédent semble être a priori une condition ad hoc. Elle est cependant vérifiée dans deux cas fort intéressants que nous allons étudier maintenant. \square

10.6.1 Cas des éléments de $D_L(I^\circ)$

Proposition 10.6.4 *La condition ii) de l'hypothèse du théorème précédent est réalisée pour tout $f \in D_L(I^\circ)$.*

Preuve. Cela résulte aussitôt de $|\alpha|$ applications du théorème d'intégration par parties: vu l'appartenance de f à $D_L(I^\circ)$, chacun des termes intégrés est nul. ■

10.6.2 Cas des fonctions périodiques

Définition. Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R}^n , de période T égale à (T_1, \dots, T_n) . Un *intervalle de période pour f* est un intervalle fermé J de \mathbb{R}^n tel que, pour tout $j \leq n$, la longueur du j -ième côté de J soit égale à T_j .

Bien sûr,

- i) toute combinaison linéaire de fonctions périodiques et de même période T sur \mathbb{R}^n est une fonction périodique de période T sur \mathbb{R}^n ,
- ii) tout produit fini de fonctions périodiques et de même période T sur \mathbb{R}^n est une fonction périodique de période T sur \mathbb{R}^n ,
- iii) toute dérivée d'une fonction dérivable et périodique de période T sur \mathbb{R}^n est une fonction périodique de période T sur \mathbb{R}^n .

Au point de vue de l'intégration des fonctions périodiques, on a les résultats suivants.

Proposition 10.6.5 *Si la fonction f périodique de période T est localement intégrable sur \mathbb{R}^n , son intégrale sur un intervalle de période ne dépend pas du choix de cet intervalle.*

Preuve. Vu le théorème de Fubini, il suffit de noter que, pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ périodique de période T et tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_b^{b+T} f \, dx + \int_{b+T}^{a+T} f \, dx = \int_b^{b+T} f \, dx$$

en recourant au changement de variable $x' = x - T$. ■

Proposition 10.6.6 *Si $f, g \in C_1(\mathbb{R}^n)$ sont périodiques de même période T , alors on a*

$$\int_J f \cdot D_k g \, dx = - \int_J g \cdot D_k f \, dx$$

pour tout $k \leq n$ et tout intervalle de période J pour f et g .

Preuve. Pour tous $x_1, \dots, [x_k], \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T_k} (f \cdot D_k g + g \cdot D_k f) dx_k = (fg) \Big|_{x_k=a}^{x_k=a+T_k} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dès lors, la propriété résulte aussitôt du théorème de Fubini. ■

Ces résultats sont à la base des conséquences importantes suivantes.

Théorème 10.6.7 a) *Les coefficients du développement en série trigonométrique de Fourier d'une fonction périodique $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sur un intervalle de période de f sont indépendants du choix de cet intervalle.*

b) *Si $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ est périodique, la série des dérivées D^α terme à terme de son développement en série trigonométrique de Fourier sur un intervalle de période I*

i) *converge dans $L^2(I)$ vers $D^\alpha f$ si on a $|\alpha| \leq L$,*

ii) *converge uniformément sur \mathbb{R}^n vers $D^\alpha f$ si on a $|\alpha| \leq L - n$. ■*

10.7 Séries trigonométriques et $L^2(]a, b[)$

Remarque. Dans le cas où I est l'intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , la suite trigonométrique de Fourier dans $L^2(I)$ s'écrit explicitement:

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left(\cos \left(2\pi m \frac{x-r}{b-a} \right) + i \sin \left(2\pi m \frac{x-r}{b-a} \right) \right), \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Dans ce cas, dans les développements en série, on regroupe le plus souvent les termes en m et $-m$ pour obtenir les formules réelles relatives au développement en série trigonométrique de Fourier. □

10.7.1 Forme réelle du développement

Théorème 10.7.1 *Pour tous $a, b, r \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et tout $f \in L^2(]a, b[)$, la série*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt + \frac{2}{b-a} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(t) \cos \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \cdot \cos \left(2\pi m \frac{x-r}{b-a} \right) \\ + \int_a^b f(t) \sin \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \cdot \sin \left(2\pi m \frac{x-r}{b-a} \right) \end{array} \right\}$$

converge dans $L^2(I)$ et pp sur I vers f avec $I =]a, b[$.

Si, en outre, f appartient à $D_L(I^\circ)$ ou à $C_L(\mathbb{R})$, et est périodique de période $b - a$, la série des dérivées D^k terme à terme converge dans $L^2(I)$ vers $D^k f$ pour tout $k \leq L$ et uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction dont la restriction à I est égale à $D^k f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq L - 1$.

Preuve. Il suffit de noter que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} & \langle f, u_m \rangle u_m + \langle f, u_{-m} \rangle u_{-m} \\ &= \langle f, \Re u_m + i \Im u_m \rangle (\Re u_m + i \Im u_m) + \langle f, \Re u_m - i \Im u_m \rangle (\Re u_m - i \Im u_m) \\ &= 2 \langle f, \Re u_m \rangle \Re u_m + 2 \langle f, \Im u_m \rangle \Im u_m \end{aligned}$$

et d'appliquer les résultats précédents. ■

10.7.2 Forme réelle des formules de Parseval

Théorème 10.7.2 *Etant donné $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et des fonctions $f, g \in L^2(]a, b[)$, la série numérique*

$$\frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(t) dt \right|^2 + \frac{2}{b-a} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) \cos \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \right|^2 \\ & + \left| \int_a^b f(t) \sin \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \right|^2 \end{aligned} \right\}$$

converge vers $\|f\|^2$ et la série numérique

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) dt \cdot \int_a^b \overline{g(t)} dt \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \int_a^b f(t) \cos \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \cdot \int_a^b \overline{g(t)} \cos \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \\ & + \int_a^b f(t) \sin \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \cdot \int_a^b \overline{g(t)} \sin \left(2\pi m \frac{t-r}{b-a} \right) dt \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

converge vers $(b-a) \langle f, g \rangle$.

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir le deuxième cas car il donne le premier pour $f = g$. Comme, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} & \langle f, u_m \rangle \cdot \overline{\langle g, u_m \rangle} + \langle f, u_{-m} \rangle \cdot \overline{\langle g, u_{-m} \rangle} \\ &= (\langle f, \Re u_m \rangle - i \langle f, \Im u_m \rangle) \cdot (\overline{\langle g, \Re u_m \rangle} + i \overline{\langle g, \Im u_m \rangle}) \\ & \quad + (\langle f, \Re u_m \rangle + i \langle f, \Im u_m \rangle) \cdot (\overline{\langle g, \Re u_m \rangle} - i \overline{\langle g, \Im u_m \rangle}) \\ &= 2 \langle f, \Re u_m \rangle \cdot \overline{\langle g, \Re u_m \rangle} + 2 \langle f, \Im u_m \rangle \cdot \overline{\langle g, \Im u_m \rangle}, \end{aligned}$$

on conclut aussitôt en recourant à la deuxième formule générale de Parseval. ■

10.7.3 Cas $b - a = 2\pi$ et $r = 0$

Le plus souvent, dans les applications, on choisit $r = 0$ et on effectue un changement d'unité pour avoir $b - a = 2\pi$. A ce moment, les trois formules explicites que nous venons d'établir prennent la forme simplifiée suivante.

Théorème 10.7.3 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in L^2(]a, a + 2\pi[)$, on a*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos(mt) dt \cdot \cos(mx) \\ + \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin(mt) dt \cdot \sin(mx) \end{array} \right\},$$

la convergence ayant lieu dans $L^2(]a, a + 2\pi[)$,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^{a+2\pi} f(t) dt \right|^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos(mt) dt \right|^2 \\ + \left| \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin(mt) dt \right|^2 \end{array} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt \cdot \int_a^{a+2\pi} \bar{g} dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos(mt) dt \cdot \int_a^{a+2\pi} \bar{g}(t) \cos(mt) dt \\ + \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin(mt) dt \cdot \int_a^{a+2\pi} \bar{g}(t) \sin(mt) dt \end{array} \right\}. \blacksquare \end{aligned}$$

10.8 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Nous sommes ainsi amenés à étudier de plus près les séries du type

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imx}$$

ou, de manière équivalente, du type

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx),$$

les coefficients a_m , b_m et c_m étant des nombres complexes.

10.8.1 Polynômes trigonométriques dans \mathbb{R}

Afin de simplifier les écritures, considérons le cas où $b - a = 2\pi$. Nous savons que, pour $m \in \mathbb{Z}$, les fonctions $(2\pi)^{-1/2}e^{imx}$ constituent une suite orthonormée totale dans $L^2(]a, a + 2\pi[)$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

Définition. Un *polynôme trigonométrique* P sur \mathbb{R} est une combinaison linéaire de ces fonctions. Il s'écrit donc explicitement sous la forme

$$P(x) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{imx} \text{ ou } P(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^M (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)),$$

avec $M \in \mathbb{N}$, les coefficients a_m, b_m, c_m étant des nombres complexes liés par les relations

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, \\ a_m &= c_m + c_{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \\ b_m &= i(c_m - c_{-m}), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \\ c_m &= (a_m - ib_m)/2, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Il est de *degré* M si on a $c_M \neq 0$ ou $c_{-M} \neq 0$; il revient au même de dire qu'on a $a_M \neq 0$ ou $b_M \neq 0$.

Etant donné un polynôme trigonométrique P , il est clair que ses coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} P(x) e^{-imx} dx, \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} P(x) \cos(mx) dx, \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} P(x) \sin(mx) dx, \end{aligned}$$

quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 10.8.1 a) *Un polynôme trigonométrique est une fonction périodique de période 2π , appartenant à $C_\infty(\mathbb{R})$.*

b) *Un polynôme trigonométrique P de degré $M \geq 1$ a au plus $2M$ zéros dans $[0, 2\pi[$; un polynôme trigonométrique est donc la fonction 0 si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.*

c) Le polynôme trigonométrique $\sum_{m=-M}^M c_m e^{imx}$ est réel si et seulement si on a $c_m = \overline{c_{-m}}$ pour tout $m = 0, 1, \dots, M$, c'est-à-dire si et seulement si ses coefficients a_m et b_m sont tous réels.

d) Un polynôme trigonométrique réel P de degré $M \geq 1$ et sans zéro est une fonction à valeurs strictement positives ou à valeurs strictement négatives. S'il est à valeurs strictement positives, il existe un polynôme trigonométrique Q (non nécessairement à valeurs réelles ni unique) tel que $P = |Q|^2$.

Preuve. a) est trivial.

b) Un des coefficients c_{-M} et c_M au moins diffère de 0. Quitte à considérer $P(-x)$, nous pouvons supposer avoir $c_M \neq 0$. Cela étant, il vient

$$P(x) = e^{-iMx} (c_{-M} + c_{-M+1}e^{ix} + \dots + c_M e^{2iMx}) = e^{-iMx} R(e^{ix})$$

où $R(z)$ est un polynôme sur \mathbb{C} de degré $2M$, ce qui suffit.

c) Il suffit de noter qu'on a

$$0 = \Im P(x) = \frac{1}{2i} \sum_{m=-M}^M (c_m - \overline{c_{-m}}) e^{imx}$$

et d'appliquer a).

d) La première partie résulte aussitôt du théorème des valeurs intermédiaires.

Considérons la deuxième partie. Vu ce qui précède, nous pouvons supposer qu'il existe un polynôme

$$R(z) = \sum_{m=-M}^M c_m z^{m+M} \text{ avec } c_m = \overline{c_{-m}} \text{ pour tout } m = 0, 1, \dots, M$$

tel que $P(x) = e^{-iMx} R(e^{ix})$. En particulier, on a $c_M = \overline{c_{-M}} \neq 0$ donc $R(0) \neq 0$, et

$$R(z) = z^{2M} (c_{-M} z^{-2M} + \dots + c_M) = z^{2M} (\overline{c_M} z^{-2M} + \dots + \overline{c_{-M}}) = z^{2M} \overline{R(1/\overline{z})}.$$

Il s'ensuit que si $z_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro de R , il en est de même pour $1/\overline{z_0}$: les zéros de R peuvent donc se grouper par paires du type $\{d_m, 1/\overline{d_m}\}$ avec $m = 1, \dots, M$. Comme on a alors

$$e^{-ix} (e^{ix} - d_m) \left(e^{ix} - \frac{1}{d_m} \right) = -\frac{1}{d_m} |e^{ix} - d_m|^2, \quad \forall m = 1, \dots, M,$$

il existe $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$P(x) = C \prod_{m=1}^M |e^{ix} - d_m|^2,$$

ce qui suffit pour conclure aussitôt. ■

Remarque. Les polynômes trigonométriques $\cos(Mx)$, $\cos(Mx) + 1$ et $\cos(Mx) + 2$ ont M pour degré et ont respectivement $2M$, M et 0 zéros dans $[0, 2\pi[$. \square

Exercice. Si P est un polynôme trigonométrique de degré $M \geq 1$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$ et si R est le polynôme sur \mathbb{C} défini par $P(x) = e^{-iMx} R(e^{ix})$, établir que

- a) tout zéro z_0 de R tel que $|z_0| = 1$ est de multiplicité paire,
 b) il existe un polynôme trigonométrique Q tel que $P = |Q|^2$.

Suggestion. Supposons que $z_0 = e^{ix_0}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ soit un zéro de multiplicité impaire m de R . Il existe alors un polynôme S tel que $R(z) = (z - z_0)^m S(z)$ avec $S(z_0) \neq 0$. Considérons les points $x_\varepsilon = (1 + \varepsilon)x_0$ et $x_{-\varepsilon} = (1 - \varepsilon)x_0$ avec $\varepsilon > 0$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{P(x_{-\varepsilon})}{P(x_\varepsilon)} &= \frac{e^{-iM(1-\varepsilon)x_0} (e^{i(1-\varepsilon)x_0} - e^{ix_0})^m S(e^{i(1-\varepsilon)x_0})}{e^{-iM(1+\varepsilon)x_0} (e^{i(1+\varepsilon)x_0} - e^{ix_0})^m S(e^{i(1+\varepsilon)x_0})} \\ &= e^{2iM\varepsilon x_0} \left(\frac{e^{-i\varepsilon x_0} - 1}{e^{i\varepsilon x_0} - 1} \right)^m \frac{S(e^{i(1-\varepsilon)x_0})}{S(e^{i(1+\varepsilon)x_0})} \longrightarrow -1 \end{aligned}$$

si $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Il s'ensuit que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $P(x_{-\varepsilon})$ et $P(x_\varepsilon)$ sont non nuls et de signes différents. D'où une contradiction. \square

Après cette étude des polynômes trigonométriques, abordons la convergence ponctuelle des séries trigonométriques.

10.8.2 Résultats généraux et exemples

Rappelons les critères de convergence suivants.

Critère 10.8.2 a) Si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$ converge absolument, les séries $\sum_{m=1}^{\infty} z_m \cos(mx)$ et $\sum_{m=1}^{\infty} z_m \sin(mx)$ convergent uniformément sur \mathbb{R} vers des fonctions $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$ respectivement telles que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot (\cos(mx) + i \sin(mx)) dx &= \pi z_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \\ \int_0^{2\pi} g(x) \cdot (\cos(mx) + i \sin(mx)) dx &= i\pi z_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

b) Si on a $c_m \downarrow 0$ et $s_m \downarrow 0$, la série

$$c + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \sin(mx)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemples remarquables. 1) Rappelons que, pour tout $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} c^m e^{imx} = \frac{1}{1 - ce^{ix}},$$

la convergence de la série ayant lieu uniformément sur \mathbb{R} .

*On peut en déduire les résultats suivants:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{m} &= -\ln(2 \sin(x/2)), \quad \forall x \in]0, 2\pi[, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{m} &= \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[, \end{aligned}$$

la convergence de ces séries ayant lieu dans $L^2(]0, 2\pi[)$ et ponctuellement sur $]0, 2\pi[$.

(Cf. Cahier d'exercices. A l'exercice 2) ci-dessous, on trouve un moyen plus simple pour établir la seconde formule.)*

2) Etablir que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{m^2} &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \text{ sur } [0, 2\pi] \\ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(mx)}{m^2} &= -\frac{\pi^2}{12} + \frac{x^2}{4} \text{ sur } [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

En particulier, en $x = 0$, on obtient les formules célèbres

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

De plus, en appliquant le théorème de dérivation des séries terme à terme, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{m} &= \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[, \\ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin(mx)}{m} &= \frac{x}{2}, \quad \forall x \in]-\pi, \pi[. \end{aligned}$$

3) Etablir les résultats suivants

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2} &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - |x| \right) \text{ sur } [-\pi, \pi], \\ 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mx)}{(2m)^2} &= -\frac{\pi^2}{12} + \left(\frac{\pi}{2} - |x| \right)^2 \text{ sur } [-\pi, \pi], \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)^2} &= f(x) \text{ sur } \mathbb{R}\end{aligned}$$

où f est la fonction impaire et périodique de période 2π sur \mathbb{R} déterminée par

$$f(x) = \frac{\pi}{4} x \chi_{]0, \pi/2]} - \frac{\pi}{4} (x - \pi) \chi_{] \pi/2, \pi]}, \quad \forall x \in]0, \pi].$$

Par dérivation on obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} &= \frac{\pi}{4} \text{sign}(x) \text{ sur } I, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2mx)}{2m} &= \frac{1}{4} (\pi - 2|x|) \text{sign}(x) \text{ sur } I\end{aligned}$$

avec $I =]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos((2m+1)x)}{2m+1} = g(x)$$

avec $g(x) = -\pi/4$ pour tout $x \in]-\pi, -\pi/2[\cup] \pi/2, \pi[$ et $g(x) = \pi/4$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

4) Etablir les résultats suivants

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(2mx)}{4m^2 - 1} &= |\cos(x)| \text{ sur } [-\pi, \pi], \\ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mx)}{4m^2 - 1} &= |\sin(x)| \text{ sur } [-\pi, \pi]. \square\end{aligned}$$

Exercice. a) Développer en série trigonométrique de Fourier la fonction impaire f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$. *Réponse:*

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)^3}.$$

b) Calculer $f(\pi/2)$ et $f(\pi/4)$ de deux manières différentes; en déduire que

$$1^{-3} - 3^{-3} + 5^{-3} - 7^{-3} + 9^{-3} - 11^{-3} + 13^{-3} - 15^{-3} + \dots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$1^{-3} + 3^{-3} - 5^{-3} - 7^{-3} + 9^{-3} + 11^{-3} - 13^{-3} - 15^{-3} + \dots = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}. \square$$

10.8.3 Intégrales de Dirichlet

Remarque. Par application du théorème de Riemann-Lebesgue à $\Re f$ et à $\Im f$, on obtient directement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0, \quad \forall f \in L^1(]a, b[).$$

Définition. Une *intégrale de Dirichlet* se présente sous la forme

$$\int_a^b f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous nous proposons de considérer la limite pour $\lambda \rightarrow +\infty$ de telles intégrales et d'en déduire des propriétés quant à la convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier.

Proposition 10.8.3 *Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle borné ou non $]a, b[$ de \mathbb{R} , la limite*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx$$

existe et est égale à

- 0 si a et b sont de même signe,*
- $\pi c/2$ si $a = 0$ et si $c \in \mathbb{C}$ est tel que $(f(x) - c)/x$ soit intégrable en 0^+ ,*
- $\pi c/2$ si $b = 0$ et si $c \in \mathbb{C}$ est tel que $(f(x) - c)/x$ soit intégrable en 0^- ,*
- $\pi c/2$ si $ab < 0$ et si $c \in \mathbb{C}$ est tel que $(f(x) + f(-x) - c)/x$ soit intégrable en 0^+ .*

Preuve. a) est connu (Cf. Remarque précédente).

b) Comme la fonction $(f(x) - c)/x$ est intégrable sur $]0, b[$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^b (f(x) - c) \cdot \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = 0.$$

Or l'intégrale considérée est aussi égale à

$$\int_0^b \frac{f(x)}{x} \sin(\lambda x) dx - c \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx$$

où la seconde intégrale converge vers $\pi/2$ si $\lambda \rightarrow +\infty$.

c) s'établit comme en b).

d) résulte aussitôt de b) et c). ■

Proposition 10.8.4 *Si $f \in L^1(]0, b[)$ est borné et monotone sur l'intervalle $]0, r[$ et si $0 < r < b$, on a*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0^+).$$

Preuve. Quitte à remplacer f par $\pm(f - f(0^+))$, nous pouvons supposer f croissant sur $]0, r[$ et tel que $f(0^+) = 0$. La fonction $\int_0^x (\sin(t))/t dt$ est réelle et continue sur $[0, +\infty[$, et converge vers $\pi/2$ en $+\infty$; elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$; soit M la borne supérieure de son module sur cet intervalle.

Cela étant, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0, r[$ tel que $0 \leq f(\eta) \leq \varepsilon/(4M)$. Dès lors, dans la majoration

$$\left| \int_0^b f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \right| \leq \left| \int_0^\eta f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \right| + \left| \int_\eta^b f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \right|,$$

a) pour tout $\lambda > 0$, en vertu du deuxième théorème de la moyenne, il existe $\xi(\lambda) \in]0, \eta[$ tel que

$$\int_0^\eta f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = f(\eta^-) \int_{\xi(\lambda)}^\eta \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx$$

(rappelons que $f(0^+) = 0$) ce qui implique

$$\left| \int_0^\eta f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{2},$$

b) le deuxième terme de la majorante tend vers 0 si $\lambda \rightarrow +\infty$, vu la proposition précédente.

La conclusion s'ensuit aussitôt. ■

Application. Soit f une fonction intégrable sur $]0, \pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx &= \left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi \right) f(x) \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{\pi/2} (f(x) + f(\pi-x)) \frac{x}{\sin(x)} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx \end{aligned}$$

(en (*), on a appliqué le changement de variable $\pi - x = t$ à l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi}$). Cela étant,

a) si f est intégrable sur $]0, \pi[$ et si $c \in \mathbb{C}$ sont tels que

$$\frac{f(x) + f(\pi - x) - c}{\sin(x)} \in L^1 \text{ en } 0^+,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \frac{\pi}{2} c,$$

b) si $f \in L^1(]0, \pi[)$ est borné et monotone sur $]0, r[$ et sur $]\pi - r, \pi[$ avec $0 < r < \pi$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \frac{\pi}{2} (f(0^+) + f(\pi^-)).$$

10.8.4 Retour aux séries de Fourier

Formule auxiliaire. Soit f une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} et périodique de période 2π . Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la somme partielle trigonométrique de Fourier

$$S_n(x) = \sum_{m=-n}^n \int_0^{2\pi} f(y) \overline{u_m(y)} dy \cdot u_m(x),$$

où les u_m sont les fonctions trigonométriques de Fourier avec $a = 0$, $b = 2\pi$ et $r = 0$, s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) \cos(mt) dt \cdot \cos(mx) \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) \sin(mt) dt \cdot \sin(mx) \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos(1(x-t)) + \dots + \cos(n(x-t)) \right) dt. \end{aligned}$$

Or on a

$$1 + 2e^{2ix} + \dots + 2e^{2inx} = 1 + 2 \frac{e^{i(2n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

(en recourant à la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique) donc

$$1 + 2 \cos(2x) + \dots + 2 \cos(2nx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}.$$

Cela étant, il vient

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)(x-t)}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} dt \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+2t) \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

(en (*), on a effectué le changement de variable $x - t = -2y$).

Exercice. Etablir que

$$\int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Suggestion. C'est direct si on recourt à la formule

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} = 1 + 2\cos(2x) + \dots + 2\cos(2nx)$$

que nous venons d'établir dans la preuve précédente. \square

Les résultats précédents permettent aussitôt d'énoncer le résultat que voici ainsi que la première partie du résultat le suivant.

Théorème 10.8.5 (Dini) *Si f est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} , périodique de période 2π et si $x \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$ sont tels que*

$$\frac{f(x+2t) + f(x-2t) - c}{\sin(t)} \in L^1 \text{ en } 0^+,$$

alors la suite $S_n(x)$ converge vers $\pi c/2$. ■

Remarque. Si f admet des limites à gauche et à droite de x , on essaiera bien sûr de vérifier cette hypothèse avec $r = f(x^+) + f(x^-)$. \square

Théorème 10.8.6 (Dirichlet-Jordan) *Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ est borné, périodique de période 2π et monotone sur $]0, 2\pi]$, alors la suite $S_n(x)$ converge vers $(f(x^+) + f(x^-))/2$ en tout $x \in \mathbb{R}$; elle converge même uniformément vers f sur tout intervalle compact constitué de points de continuité de f et inclus dans $]0, 2\pi[$.*

Preuve. La propriété relative à la convergence ponctuelle résulte aussitôt de ce qui précède.

Passons à la convergence uniforme. Désignons l'intervalle par I . Pour tout $x \in I$, nous avons

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x+2t) - f(x)) \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x-2t) - f(x)) \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt. \end{aligned}$$

Cela étant, il suffit de procéder comme dans la preuve d'une proposition précédente: la fonction

$$\int_0^x \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

est continue sur $[0, \pi/2]$ donc bornée sur cet intervalle; soit M la borne supérieure de son module sur cet intervalle. Fixons $\varepsilon > 0$. Si I s'écrit $[a, b]$, il existe $\eta(I) > 0$ tel que $0 < a - 2\eta(I)$, $b + 2\eta(I) < 2\pi$ et

$$\left| \frac{1}{\pi} (f(x+2t) - f(x)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{8M}$$

pour tout $t \in]0, \eta(I)[$ et tout $x \in I$. Cela étant, il vient, par exemple

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x+2t) - f(x)) \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\eta(I)} + \int_{\eta(I)}^{\pi/2} \right) \dots dt$$

où

a) pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $\xi_n \in]0, \eta(I)[$ tel que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta(I)} (f(x+2t) - f(x)) \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} (f((x+2\eta(I))^-) - f(x)) \cdot \int_{\xi_n}^{\eta(I)} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \end{aligned}$$

donc tel que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta(I)} (f(x+2t) - f(x)) \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{8M} \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{4},$$

b) la deuxième intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{\eta(I)}^{\pi/2} (f(x+2t) - f(x)) \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

tend vers 0 si $n \rightarrow \infty$.

La conclusion s'ensuit aussitôt. ■

10.9 Convergence à la Cesaro

Rappelons que le théorème de Cesaro affirme que *si la suite numérique $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers c_0 , alors la suite $(S_m = (c_1 + \dots + c_m)/m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ des moyennes arithmétiques converge vers c_0 .*

Dans ce paragraphe, nous allons considérer quelques propriétés de la convergence “à la Cesaro” des séries de Fourier $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}$, c’est-à-dire de la convergence de la suite

$$\left(\sigma_M(x) = \frac{S_0 + \cdots + S_M}{M+1} \right)_{M \in \mathbb{N}_0} \quad \text{où } S_k(x) = \sum_{m=-k}^k c_m e^{imx}.$$

Définitions. Le noyau de Dirichlet de degré $M \in \mathbb{N}$ est la fonction D_M définie sur \mathbb{R} par

$$D_M(x) = \frac{\sin((M+1/2)x)}{\sin(x/2)},$$

étant entendu qu’on pose $D_M(2k\pi) = 2M+1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Le noyau de Fejer de degré $M \in \mathbb{N}$ est la fonction F_M définie sur \mathbb{R} par

$$F_M(x) = \frac{1}{M+1} \left(\frac{\sin((M+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

étant entendu qu’on pose $F_M(2k\pi) = M+1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 10.9.1 a) Le noyau de Dirichlet de degré $M \in \mathbb{N}$ est égal à la somme $\sum_{m=-M}^M e^{imx}$.

b) Le noyau de Fejer de degré $M \in \mathbb{N}$ est égal à la moyenne arithmétique des $M+1$ premiers noyaux de Dirichlet.

Preuve. a) On a en effet

$$\frac{e^{-iMx} - e^{i(M+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(M+1/2)x} - e^{i(M+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}.$$

b) Il vient d’une part pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1 + 3 + \cdots + (2M+1)}{M+1} = \frac{(M+1)(2M+2)/2}{M+1} = M+1$$

et d’autre part pour tout $x \in]0, 2\pi[$

$$\Im \frac{e^{ix/2} + \cdots + e^{i(M+1/2)x}}{\sin(x/2)} = \Im \frac{e^{ix/2} - e^{i(M+3/2)x}}{\sin(x/2) \cdot (1 - e^{ix})} = \Im \frac{e^{i(M+1)x/2}}{\sin(x/2)} \cdot \frac{\sin((M+1)x/2)}{\sin(x/2)}. \blacksquare$$

Proposition 10.9.2 Relativement aux noyaux de Fejer, on a

a) $\int_a^{a+2\pi} F_M(x) dx = 2\pi$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{N}$,

b) $F_M(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{N}$,

- c) pour tout $\delta \in]0, 2\pi[$, la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$,
 d) $F_M(x) \leq M + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{N}$,
 e) il existe $C > 0$ tel que

$$F_M(x) \leq \frac{C}{(M+1)x^2}, \quad \forall x \in [-\pi, 0[\cup]0, \pi], \quad \forall M \in \mathbb{N}.$$

Preuve. a), b) et c) sont triviaux.

d) Comme on a bien sûr $|D_k(x)| \leq 2k + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il vient en effet

$$F_M(x) \leq \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M (2k+1) = F_M(0) = M+1.$$

e) Il suffit de noter qu'il existe $A > 0$ tel que $\sin(x/2) \geq Ax$ pour tout $x \in [0, \pi]$. ■

Théorème 10.9.3 a) Pour tout $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ périodique de période 2π , le $(M+1)$ -ème élément de la suite des moyennes de Cesaro relative à la série trigonométrique de Fourier de f s'écrit

$$\sigma_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_M(y) f(x-y) dy.$$

b) Pour tout $f \in C_0(\mathbb{R})$ périodique de période 2π , la suite $\sigma_M(f)$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f . Par conséquent, la suite des coefficients de Fourier de f caractérise f .

Preuve. a) Il suffit de noter que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la k -ème somme partielle de la série trigonométrique de Fourier de f s'écrit

$$\sum_{m=-k}^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \cdot e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-y) f(y) dy.$$

b) Comme la fonction f est uniformément continue et bornée sur \mathbb{R} , cela résulte aussitôt du fait que la suite $((2\pi)^{-1} F_M \chi_{]-\pi, \pi[})_{M \in \mathbb{N}}$ est une unité approchée de convolution. ■

Si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ converge absolument, la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m$ converge uniformément sur l'intervalle $[-1, 1]$ et sa limite f , étant continue, vérifie

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m.$$

Définitions. La suite numérique $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge au sens d'Abel vers c_0 si la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m$ converge pour tout $r \in [0, 1[$ et si sa limite ponctuelle f sur $[0, 1[$ est telle que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = c_0;$$

$f(r)$ est appelé la r -moyenne d'Abel et c_0 la moyenne d'Abel de la suite $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$.

Définition. Le noyau de Poisson est la fonction P définie sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$ par

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x) + r^2}.$$

Proposition 10.9.4 Pour tout $(r, x) \in] -1, 1[\times \mathbb{R}$,

$$P_r(x) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos(mx).$$

Preuve. De fait, on a

$$P_r(x) + 1 = \frac{2(1 - r \cos(x))}{1 - 2r \cos(x) + r^2} = \Re \frac{2}{1 - r e^{ix}} = 2 \Re \sum_{m=0}^{\infty} r^m e^{imx}. \blacksquare$$

Proposition 10.9.5 Relativement au noyau de Poisson, on a

- $\int_a^{a+2\pi} P_r(x) dx = 2\pi$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $r \in] -1, 1[$,
- $P_r(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in]0, 1[$,
- $P_r(x) = P_r(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in] -1, 1[$,
- pour tout $\delta \in]0, \pi[$, la suite $(P_{r_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers 0 sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ si $m \rightarrow 1^-$.

Preuve. a), b) et c) sont triviaux.

d) Pour $r \geq 1/2$, on a en effet

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos(x) + r^2 &\geq 1 - 2r \cos(\delta) + r^2 \\ &\geq (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos(\delta)) \geq 1 - \cos(\delta) \end{aligned}$$

donc

$$0 < P_r(x) < \frac{1 - r^2}{1 - \cos(\delta)}. \blacksquare$$

Théorème 10.9.6 a) Pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ périodique de période 2π , la r -ème moyenne d'Abel de la série trigonométrique de Fourier de f s'écrit

$$\mu_r(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x - y) f(y) dy.$$

b) Pour tout $f \in C_0(\mathbb{R})$ périodique de période 2π , la suite $(\mu_{r_m}(f))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f si $r_m \rightarrow 1^-$. \blacksquare

Chapitre 11

Suites orthonormées totales dans L^2

11.1 Polynômes de Legendre

Définition. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le m -ème polynôme de Legendre est la fonction P_m définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par

$$P_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \chi_{[-1,1]}(x),$$
$$P_m(x) = \frac{\sqrt{2m+1}}{\sqrt{2}} \frac{1}{2^m m!} D^m(x^2 - 1)^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Théorème 11.1.1 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le polynôme de Legendre P_m est la restriction à l'intervalle $[-1, 1]$ d'un polynôme sur \mathbb{R} , de degré m et à coefficients réels dont les m zéros sont réels, distincts deux à deux et éléments de $] - 1, 1[$.

Preuve. Tout est immédiat (pour la propriété relative aux zéros, il suffit de faire appel au théorème de Rolle).■

Théorème 11.1.2 La suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Legendre est orthonormée et totale dans $L^2([-1, 1])$.

Preuve. a) Pour tous $m, k \in \mathbb{N}_0$, on obtient directement

$$\int_{-1}^1 x^k D^m(x^2 - 1)^m dx = -k \int_{-1}^1 x^{k-1} D^{m-1}(x^2 - 1)^m dx$$

par intégration par partie car le terme intégré est bien sûr égal à 0. Dès lors, il vient

$$\int_{-1}^1 x^k D^m(x^2 - 1)^m dx = 0$$

pour tous $m, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < m$ et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^m D^m(x^2 - 1)^m dx &= (-1)^m m! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^m dx \\ &= m! 2^{2m+1} B(m+1, m+1) = \frac{2^{2m+1} (m!)^3}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

On en déduit aisément que la suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est orthonormée. D'une part, les P_m sont orthogonaux deux à deux car chaque P_m est un polynôme de degré m . D'autre part, chacun des P_m est normé: pour P_0 , cela est clair et, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ on a successivement

$$\begin{aligned} \langle P_m, P_m \rangle &= \frac{2m+1}{2 \cdot 2^{2m} (m!)^2} \int_{-1}^1 D^m(x^2 - 1)^m \cdot D^m(x^2 - 1)^m dx \\ &= \frac{2m+1}{2 \cdot 2^{2m} (m!)^2} \int_{-1}^1 \frac{(2m)!}{m!} x^m D^m(x^2 - 1)^m dx = 1. \end{aligned}$$

b) Vu ce qui précède, il suffit d'établir que, si $f \in L^2([-1, 1])$ vérifie $\langle f, x^m \rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors on a $f = 0$ pp sur $[-1, 1]$. Or, pour tout $p \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{m=0}^{\infty} (-p)^m x^m / m!$ converge uniformément sur le compact $[-1, 1]$ vers e^{-px} donc converge dans $L^2([-1, 1])$ vers e^{-px} . Par continuité du produit scalaire, on obtient alors $\langle e^{-px}, f \rangle = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{L}_p(f \chi_{[-1, 1]}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}$, ce qui suffit pour conclure. ■

Exercice. Etablir qu'on obtient les polynômes de Legendre en orthonormant dans $L^2([-1, 1])$ la suite des fonctions $(x^m \chi_{[-1, 1]})_{m \in \mathbb{N}_0}$ au moyen du processus de Schmidt. □

Exercice. Etablir que, si P_m désigne le m -ème polynôme de Legendre, alors

$$\left(\sqrt{2} P_{2m} \chi_{[0, 1]} \right)_{m \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{2} P_{2m+1} \chi_{[0, 1]} \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

sont deux suites orthonormées totales dans $L^2([0, 1])$.

Suggestion. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, P_{2m} est une fonction paire et P_{2m+1} une fonction impaire sur $[-1, 1]$. □

Remarque. Bien souvent, on introduit d'autres *polynômes de Legendre*, à savoir pour $m \in \mathbb{N}$ les fonctions \mathcal{P}_m , par la *formule de Rodrigues*

$$\mathcal{P}_m(x) = \frac{1}{2^m m!} D^m(x^2 - 1)^m.$$

Au facteur $\sqrt{2m+1}/\sqrt{2}$ près, ce sont les polynômes que nous venons d'étudier; ce facteur correspond à la normation des fonctions considérées. Cette présentation donne lieu à quelques formules intéressantes.

Etablir que

a) pour tout $m \in \mathbb{N}$ pair, on a

$$\mathcal{P}_m(x) = \sum_{k=0}^{m/2} (-1)^k \frac{(2m-2k)!}{2^{2m} k! (m-k)! (m-2k)!} x^{m-2k};$$

b) pour tout $m \in \mathbb{N}$ impair, on a

$$\mathcal{P}_m(x) = \sum_{k=0}^{(m-1)/2} (-1)^k \frac{(2m-2k)!}{2^{2m} k! (m-k)! (m-2k)!} x^{m-2k};$$

c) pour tout $m \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_m est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)D^2u - 2xDu + m(m+1)u = 0;$$

d) si on pose $\mathcal{P}_{-1} = 0$, ces polynômes vérifient la formule de récurrence suivante

$$(m+1)\mathcal{P}_{m+1}(x) = (2m+1)x\mathcal{P}_m(x) - m\mathcal{P}_{m-1}(x). \square$$

11.2 Fonctions de Laguerre

Définition. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la m -ème fonction de Laguerre est la fonction L_m définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$L_0(x) = e^{-x/2},$$

$$L_m(x) = \frac{e^{x/2}}{m!} D^m(e^{-x}x^m), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Théorème 11.2.1 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction de Laguerre L_m est la restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ d'une fonction du type $e^{-x/2}P(x)$ où P est un polynôme sur \mathbb{R} , de degré m et à coefficients réels dont les m zéros sont réels, distincts deux à deux et éléments de $]0, +\infty[$.

Preuve. Tout est immédiat sauf la propriété relative aux zéros. Cependant les zéros de P_m sont ceux de $D^m(e^{-x}x^m)$. Pour conclure, il suffit alors de noter que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < m$, $D^k(e^{-x}x^m)$ est une fonction réelle et dérivable sur $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 en 0^+ et en $+\infty$. On en déduit en effet aisément que $D^m(e^{-x}x^m)$ a au moins m zéros réels et distincts donc exactement m zéros réels et distincts qui appartiennent à $]0, +\infty[$. ■

Théorème 11.2.2 *La suite $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ des fonctions de Laguerre est orthonormée et totale dans $L^2([0, +\infty[)$.*

Preuve. a) Pour tous $m, k \in \mathbb{N}_0$, on obtient directement

$$\int_0^{+\infty} x^k D^m(e^{-x} x^m) dx = -k \int_0^{+\infty} x^{k-1} D^{m-1}(e^{-x} x^m) dx$$

par intégration par partie car le terme intégré est bien sûr égal à 0. Dès lors, il vient

$$\int_0^{+\infty} x^k D^m(e^{-x} x^m) dx = 0$$

pour tous $m, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < m$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^m D^m(e^{-x} x^m) dx &= (-1)^m m! \int_0^{+\infty} e^{-x} x^m dx \\ &= (-1)^m m! \Gamma(m+1) = (-1)^m (m!)^2 \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

On en déduit aisément que la suite $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est orthonormée. D'une part, les L_m sont orthogonaux deux à deux car on a

$$\langle L_k, L_m \rangle = \frac{1}{m! k!} \int_0^{+\infty} D^m(e^{-x} x^m) \cdot e^x D^k(e^{-x} x^k) dx = 0$$

pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $k < m$ vu que $e^x D^k(e^{-x} x^k)$ est un polynôme de degré k . D'autre part, chacun des L_m est normé: pour L_0 , cela est clair et, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a successivement

$$\langle L_m, L_m \rangle = \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \int_0^{+\infty} x^m D^m(e^{-x} x^m) dx = 1.$$

b) Établissons d'abord que, pour tout $p \in]-1/2, 1/2[$, on a

$$e^{-x/2} \sum_{m=0}^M \frac{(-px)^m}{m!} \rightarrow e^{-(p+1/2)x} \text{ dans } L^2(]0, +\infty[).$$

D'une part, cette série est de Cauchy dans cet espace car, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il vient

$$\left\| e^{-x/2} \frac{(-px)^m}{m!} \right\| = \frac{|p|^m}{m!} \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{2m} dx} = \frac{|p|^m}{m!} \sqrt{(2m)!}$$

et car, vu la formule de Stirling, il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{|p|^m}{m!} \sqrt{(2m)!} \leq C (2|p|)^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, on sait que cette série converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers $e^{-(p+1/2)x}$.

Cela étant, prouvons que l'ensemble $\{L_m : m \in \mathbb{N}\}$ est total dans $L^2(]0, +\infty[)$. Soit f un élément de cet espace tel que $\langle f, L_m \rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}$, L_m est une combinaison linéaire de $e^{-x/2}, \dots, x^m e^{-x/2}$, on obtient de suite $\langle f, x^m e^{-x/2} \rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ donc $\langle f, e^{-(p+1/2)x} \rangle = 0$ pour tout $p \in]-1/2, 1/2[$. D'où la conclusion en recourant aux propriétés de la transformation de Laplace. ■

Exercice. Etablir qu'on obtient les fonctions de Laguerre en orthonormant dans $L^2(]0, +\infty[)$ la suite $(x^m e^{-x/2} \chi_{]0, +\infty[})_{m \in \mathbb{N}}$ au moyen du processus de Schmidt. □

Remarque. Bien souvent, on introduit les *polynômes de Laguerre*. Il s'agit des fonctions \mathcal{L}_m définies par la *formule de Rodrigues*

$$\mathcal{L}_m(x) = e^x D^m (e^{-x} x^m).$$

Au facteur $e^{-x/2}/m!$ près, ce sont les fonctions que nous venons d'étudier; ce facteur correspond à la normation des fonctions considérées. Cette présentation donne lieu à des formules intéressantes.

Etablir que

a) pour tout $m \in \mathbb{N}$, \mathcal{L}_m est solution de l'équation différentielle

$$xD^2u + (1-x)Du + mu = 0;$$

b) ces polynômes vérifient la formule de récurrence suivante

$$\mathcal{L}_{m+1}(x) = (2m+1-x)\mathcal{L}_m(x) - m^2\mathcal{L}_{m-1}(x). \square$$

11.3 Fonctions d'Hermite

Définition. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la m -ème fonction d'Hermite est la fonction H_m définie sur \mathbb{R} par

$$H_0(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}},$$

$$H_m(x) = \frac{e^{x^2/2}}{2^{m/2} (m!)^{1/2} \pi^{1/4}} D^m e^{-x^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Théorème 11.3.1 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction d'Hermite H_m est une fonction du type $e^{-x^2/2}P(x)$ où P est un polynôme sur \mathbb{R} , de degré m et à coefficients réels dont les m zéros sont réels et distincts deux à deux.

Preuve. La preuve est analogue à celle de la propriété correspondante des fonctions de Laguerre. ■

Théorème 11.3.2 La suite $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$ des fonctions d'Hermite est orthonormée et totale dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. a) Pour tous $m, k \in \mathbb{N}_0$, on obtient directement

$$\int_{\mathbb{R}} x^k D^m e^{-x^2} dx = -k \int_{\mathbb{R}} x^{k-1} D^{m-1} e^{-x^2} dx$$

par intégration par partie car le terme intégré est bien sûr égal à 0. Dès lors, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} x^k D^m e^{-x^2} dx = 0$$

pour tous $m, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < m$ et

$$\int_{\mathbb{R}} x^m D^m e^{-x^2} dx = (-1)^m m! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = (-1)^m m! \sqrt{\pi}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

On en déduit aisément que la suite $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est orthonormée. D'une part, les H_m sont orthogonaux deux à deux car on a

$$\langle H_k, H_m \rangle = \frac{1}{(2^{m+k} k! m! \pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} D^m e^{-x^2} \cdot e^{x^2} D^k e^{-x^2} dx = 0$$

pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $k < m$ vu que $e^{x^2} D^k e^{-x^2}$ est un polynôme de degré k . D'autre part, chacun des H_m est normé: pour H_0 , cela est clair et, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a successivement

$$\langle H_m, H_m \rangle = \frac{1}{2^m m! \sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-1)^m 2^m x^m D^m e^{-x^2} dx = 1.$$

b) Établissons d'abord que, pour tout $p \in]-1, 1[$, on a

$$e^{-x^2/2} \sum_{m=0}^M \frac{(-px)^m}{m!} \rightarrow e^{-px-x^2/2} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

D'une part, cette série est de Cauchy dans cet espace car, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il vient

$$\begin{aligned} \left\| e^{-x^2/2} \frac{(-px)^m}{m!} \right\| &= \frac{|p|^m}{m!} \sqrt{2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2m} dx} \\ &= \frac{|p|^m}{m!} \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{m-1/2} dx} = \frac{|p|^m}{m!} \sqrt{\Gamma(m+1/2)} \end{aligned}$$

avec $(\Gamma(m+1/2))^{1/2}/\Gamma(m+1) \rightarrow 0$. D'autre part, cette série converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers $\exp(-px - x^2/2)$.

Cela étant, prouvons que l'ensemble $\{H_m : m \in \mathbb{N}\}$ est total dans $L^2(\mathbb{R})$. Soit f un élément de cet espace tel que $\langle f, H_m \rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}$, H_m est une combinaison linéaire de $e^{-x^2/2}, \dots, x^m e^{-x^2/2}$, on obtient de suite $\langle f, x^m e^{-x^2/2} \rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ donc $\langle f \cdot e^{-x^2/2}, e^{-px} \rangle = 0$ pour tout $p \in]-1, 1[$. D'où la conclusion en recourant aux propriétés de la transformation de Laplace. ■

Exercice. Etablir qu'on obtient les fonctions d'Hermite en orthonormant dans $L^2(\mathbb{R})$ la suite $(x^m e^{-x^2/2})_{m \in \mathbb{N}}$ au moyen du processus de Schmidt. □

Théorème 11.3.3 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm H_m = (\pm i)^m H_m.$$

Dès lors, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet $f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m H_m$ pour développement en série de Fourier, on a aussi $(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm f = \sum_{m=0}^{\infty} (\pm i)^m f_m H_m$.

Par conséquent, l'isométrie

$$(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

a $\{1, i, -1, -i\}$ pour ensemble des valeurs propres. Une base de l'ensemble des vecteurs propres relatifs à la valeur propre i^k avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ est constituée par l'ensemble

$$\mathcal{H}_{i^k} = \{H_m : m \equiv k \pmod{4}\}.$$

Enfin les enveloppes linéaires fermées L_k de ces bases \mathcal{H}_{i^k} constituent une décomposition de $L^2(\mathbb{R})$ en sous-espaces vectoriels propres de cette isométrie: tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet donc une décomposition unique $f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_k \in L_k$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ telle que $(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm f = f_0 + i f_1 - f_2 - i f_3$.

Preuve. Etablissons d'abord que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_y^\pm(x^m \cdot \exp(-x^2/2))$ s'écrit sous la forme $P(y) \cdot \exp(-y^2/2)$ où P est un polynôme de degré m . D'une

part, pour $m = 0$, la propriété est bien connue. D'autre part, si cette propriété est valable pour $m = 0, 1, \dots, k$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^\pm(x^{k+1} e^{-x^2/2}) &= - \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} x^k D e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\pm i y x^k + k x^{k-1}) \cdot e^{\pm ixy} e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

par intégration par partie car le terme intégré est nul. D'où la conclusion.

On en déduit aussitôt que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un coefficient $c_m \in \mathbb{C}$ tel que $(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm H_m = c_m H_m$.

Comme l'opérateur $(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm$ conserve la normation des éléments de $L^2(\mathbb{R})$, on doit avoir $|c_m| = 1$. Pour déterminer explicitement c_m , il suffit donc de calculer effectivement le coefficient du terme de plus haut "degré" dans

a) H_m : il vaut $\frac{(-2)^m}{2^{m/2} (m!)^{1/2} \pi^{1/4}}$,

b) $(2\pi)^{-1/2} \mathbb{F}^\pm H_m$. Comme cette fonction est égale à

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2} 2^{m/2} (m!)^{1/2} \pi^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} e^{x^2/2} D^m e^{-x^2} dx,$$

il est donné par le coefficient du terme en $y^m e^{-y^2/2}$ de

$$\frac{(-2)^m}{(2\pi)^{1/2} 2^{m/2} (m!)^{1/2} \pi^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} e^{-x^2/2} x^m dx;$$

après quelques intégrations par partie, c'est donc le coefficient du terme en $y^m e^{-y^2/2}$ de

$$\frac{(-2)^m}{(2\pi)^{1/2} 2^{m/2} (m!)^{1/2} \pi^{1/4}} (\pm i)^m y^m \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} e^{-x^2/2} dx.$$

D'où la conclusion. ■

Remarque. On introduit aussi les *polynômes d'Hermite*. Il s'agit des fonctions \mathcal{H}_m définies par la *formule de Rodrigues*

$$\mathcal{H}_m(x) = (-1)^m e^{x^2} D^m e^{-x^2}.$$

Au facteur $(-1)^m e^{-x^2/2} / (2^{m/2} (m!)^{1/2} \pi^{1/4})$ près, ce sont les fonctions que nous venons d'étudier; ce facteur correspond à la normation des fonctions considérées. Cette présentation donne lieu à des formules intéressantes.

Etablir que

a) pour tout $m \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_m est solution de l'équation différentielle

$$D^2 u - 2x D u + 2m u = 0;$$

b) ces polynômes vérifient la formule de récurrence suivante

$$\mathcal{H}_{m+1}(x) = 2x \mathcal{H}_m(x) - 2m \mathcal{H}_{m-1}(x). \square$$

Bibliographie

- [1] BASS J., *Cours de mathématique*, **III** (1971).
- [2] CHANDRASEKHARAN K., *Classical Fourier transforms*, Springer Universitext (1989).
- [3] DIXMIER J., *Topologie générale*, Presses Universitaires de France (1981).
- [4] FOLLAND G. B., *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics Series, Pacific Grove (1992).
- [5] GARNIR H. G., *Fonctions de variables réelles*, **I & II**, Vander (1970) & Gauthier-Villars et Librairie Universitaire (1965).
- [6] GARNIR H. G., DE WILDE M., SCHMETS J., *Analyse fonctionnelle*, **I & III**, Birkhäuser (1968 & 1973).
- [7] HEUSER H., *Lehrbuch der Analysis I & II*, Teubner (1980 & 1981).
- [8] HEWITT E., STROMBERG K., *Real and abstract analysis*, Springer (1965).
- [9] KÖRNER T. W., *Fourier analysis*, Cambridge University Press (1989).
- [10] KÖRNER T. W., *Exercises for Fourier analysis*, Cambridge University Press (1993).
- [11] LIGHTHILL M. J., *Introduction to Fourier analysis and generalized functions*, Cambridge University Press (1958).
- [12] SCHMETS J., *Analyse mathématique*, Derouaux (1990).
- [13] SCHWARTZ L., *Analyse: topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, **11** (1970).
- [14] SCHWARTZ L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (1961).
- [15] SIKORSKI R., *Advanced calculus: functions of several variables*, PWN-Polish Scientific Publishers (1969).
- [16] WALKER J. S., *Fourier analysis*, Oxford University Press, New York (1988).

- [17] ZAAANEN A. C., *Continuity, integration and Fourier theory*, Springer Universitext (1989).
- [18] ZYGMUND A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge (1968).

Index terminologique

- Abel
 - convergence d'— 194
 - moyenne d'— 194
- adhérence 7
- algèbre 27
 - avec unité 27
 - commutative 27
 - \mathbb{K} - — 27
- annulation *pp*
 - ouvert d'— 84
 - l'ouvert d'— 84
- application
 - continue 9
 - continue en un point 9
- approximation
 - théorème d'—
 - premier 70
 - second 99
 - trigonométrique 46
- Arzela
 - théorème d'— -Ascoli 41
- Ascoli
 - théorème d'Arzela- — 41
- Banach
 - espace de — 19, 68
- Bernstein
 - théorème de léthargie de — 48
- Bochner
 - formule de — 123
- Borel
 - théorème de — 91
- borné 6
- boule 4
 - fermée 4, 18
 - ouverte 4, 18
- Carleson
 - théorème de — 175
- Cauchy
 - critère de — 22, 32, 33, 68
 - suite de — 10, 68
- centre
 - d'une boule 4
 - d'une semi-boule 25
 - d'une sphère 4
- Cesaro
 - convergence à la — 191
- combinaison linéaire de parties 84
- compact 12
 - enveloppé 142
- composante
 - connexe 16
 - connexe d'un point 16
- constante
 - d'Euler 149
- convergence
 - à la Cesaro 191
 - compacte 37, 37, 38
 - d'Abel 194
 - dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ 107
 - ponctuelle 28
 - sur A 28
 - ponctuelle d'ensembles 29
 - simple 28
 - uniforme 31
- converger vers 10, 19, 66, 88
- composition 73
- convolution 73
 - unité approchée de — 93

- universelle 98
- critère
 - de Cauchy 22, 32, 33, 68
 - des séries
 - alternées 33
 - majorées 33
 - de totalité 171
 - deuxième — d'Abel 33
 - premier — d'Abel 33
- Degré
 - d'un polynôme trigonométrique 182
- diamètre 6
- dimension 4
- Dini
 - théorème de — 36, 190
- disconnexion 14
- distance 3, 4, 65
 - de deux parties 6
 - discrète 4
 - euclidienne 4, 4
 - induite 8
- Dirichlet
 - intégrale de — 187
 - noyau de — 192
 - théorème de — -Jordan 190
- douanes
 - théorème de passage des — 15
- Eléments
 - orthogonaux dans L^2 167
- enveloppe
 - convexe 140
- espace
 - à semi-normes dénombrables 24
 - complet 11
 - connexe 14
 - connexe par arc 15
 - de Banach 19, 68
 - de Fréchet 26
 - de Hilbert 68
 - discret associé 4
 - euclidien complexe 4
 - euclidien réel 4
 - métrique 3, 65
 - normé 18, 61
 - pré-hilbertien 62
- Euler
 - constante d'— 149
- extractable 12
- Fejer
 - noyau de — 192
- fermé 5
 - régulier 106
- fonction
 - antisymétrisée 125
 - bornée *pp* sur E
 - composables 73
 - convolables 73
 - de carré
 - localement intégrable 87
 - localement bornée *pp* 87
 - localement intégrable 87
 - nulle *pp* sous a 138
 - périodique 46, 173
 - symétrisée 125
- fonctions
 - bornée *pp* sur 57
 - composables 89
 - convolables 89
 - d'Hermite 199
 - de Laguerre 197
- formule
 - de Bochner 123
 - de Rodrigues 196, 199, 202
- Fourier
 - théorème de — 118, 126, 155
 - transformation de — dans L^1
 - en cosinus 124
 - en sinus 124
 - négative 111
 - positive 111
 - transformation de — dans L^2
 - négative 154
 - positive 154

- Fréchet
 espace de — 26
- Fresnel
 intégrale de — 132
- frontière 7
- Heisenberg
 inégalité de — 162
- Hermite
 fonctions d'— 199
 polynômes d'— 202
- Hilbert
 espace de — 68
- Inégalité
 de Heisenberg 162
 de Schwarz 62, 64
 triangulaire 3, 65
- intégrale
 de Dirichlet 187
 de Fresnel 132
 trigonométrique 128
- intérieur 7
- intervalle
 de période 178
- Jordan
 théorème de Dirichlet- — 190
- Laguerre
 fonctions de — 197
 polynômes de — 199
- Laplace
 transformation de — 137, 165
 unilatérale 146
- Lebesgue
 lemme de — 13
 théorème de Riemann- — 113
- Legendre
 polynôme de — 195, 196
- Lemme
 de Lebesgue 13
- léthargie
 théorème de — de Bernstein 48
- limite
 d'une suite 10, 66
 ponctuelle 28
 uniforme 31
- localisation
 théorèmes de — de Riemann 135
- Moment
 α -ème — 47
- moyenne
 d'Abel 194
 théorèmes de la — 133
- Norme 17, 61
 d'un opérateur 24
- noyau
 de Dirichlet 192
 de Fejer 192
 de Poisson 194
- Ouvert 5
 d'annulation *pp* 84
 l'— d'annulation *pp* 84
- Paquets
 théorème de sommation par — 22
- partie
 bornée 6
 compacte 12
 connexe 14
 convexe 140
 dense 7
 équicontinue 38
 en un point 38
 uniformément 38
 extractable 14
 fermée 5
 ouverte 5
 partout dense 7
 précompacte 11
 séparable 7
- partition de l'unité 104
 C_L 104
 continue 104

- dénombrable 104
- D_L 104
- localement finie 104
- théorème de — 105
- Parseval
 - théorème de — 120, 126, 158
- passage des douanes
 - théorème de — 15
- période
 - d'une fonction 46, 173
 - intervalle de — 178
- permutation des limites
 - théorème de — 34
- point
 - adhérent 7
 - frontière 7
 - intérieur 7
- points
 - connectés 16
- Poisson
 - noyau de — 194
- polynôme
 - de Laguerre 199
 - de Legendre 195, 196
 - d'Hermite 241
 - trigonométrique 182
- précompact 11
- produit
 - de composition 73
 - de convolution 73
 - scalaire 62
- propriété
 - d'intersection finie 12
- Pythagore
 - théorème de — 167
- Rayon
 - d'une boule 4, 18, 18
 - d'une semi-boule 25
 - d'une sphère 4
- recouvrement 12
 - dénombrable 12
 - fini 12
 - ouvert 12
 - localement fini 108
 - (plus ou moins) fin 108
- régularisation 100
- Riemann
 - théorème de — -Lebesgue 113
 - théorèmes de localisation de — 135
- Rodrigues
 - formules de — 196, 199, 202
- Semi-boule 25
- semi-norme 17
 - d'une semi-boule 25
- série 19
 - associée 19
 - convergente
 - absolument 19
 - commutativement 20
 - sommable 21, 22
- sommation par paquets
 - théorème de 22
- somme
 - m -ème – partielle 19
 - d'une série 21, 22
- sous-espace
 - métrique 8
- sphère 4
- Stone
 - théorème de — -Weierstrass 44, 45, 100
- support
 - pp d'une fonction 84
- suite
 - convergente 10
 - de Cauchy 10, 68
 - orthonormée
 - dans L^2 168
 - totale de Fourier 173
 - totale dans L^2 169
- Tendre vers 10
- terme
 - m -ème – d'une série 19
- théorème

- d'approximation
 - deuxième 99
 - premier — 70
 - trigonométrique 46
- d'Arzela-Ascoli 41
- de léthargie de Bernstein 48
- Bochner 123
- de Borel 91
- de Carleson 175
- de dérivation des séries 53
- de Dini 36, 190
- de Dirichlet-Jordan 190
- de Fourier 118, 126, 155
- de la moyenne 133
- de léthargie 58
- de localisation de Riemann 135
- de Parseval 120, 126, 158
- de partition de l'unité 105
- de passage des douanes 15
- de permutation des limites 34
- Pythagore 167
- de régularisation
 - d'un ensemble 100
- de Riemann-Lebesgue 137
- de sommation par paquets 22
- de Stone-Weierstrass 44, 45, 100
- de transfert 118
- du passage des douanes 18
- fondamental
 - pour \mathcal{F} 112
- totalité
 - critère de — 171
- transfert
 - théorème de — 118
- transformation
 - de Fourier dans L^1
 - en cosinus 124
 - en sinus 124
 - négative 111
 - positive 111
 - de Fourier dans L^2
 - négative 154
 - positive 154
 - de Laplace 137, 165
 - unilatérale 146
- triplet (p, q, r) 78
- Unité de convolution
 - approchée 93
 - universelle approchée 98
- Voisinage 5
- Weierstrass
 - théorème de Stone- — 44, 45, 100

Table des matières

I	ESPACES C_p	1
1	Espaces métriques	3
1.1	Définitions générales	3
1.2	Topologie d'un espace métrique	5
1.3	Parties bornées	6
1.4	Distance de deux parties	6
1.5	Intérieur, adhérence et frontière d'une partie	7
1.6	Densité et séparabilité	7
1.7	Sous-espaces	8
1.8	Applications continues	9
1.9	Convergence de suites	10
1.10	Précompacts, compacts, extractables	11
1.11	Espaces connexes	14
2	Espaces de Banach (éléments)	17
2.1	Généralités	17
2.2	Séries	19
2.3	Opérateurs linéaires continus	23
2.4	Espaces de Fréchet (définition)	24
3	Espaces du type C_p	27
3.1	Convergence ponctuelle	27
3.2	Convergence uniforme	30
3.3	Permutation de limites	34
3.4	Convergence uniforme et continuité	35
3.5	Espaces $C_0(K)$, $C_0(F)$ et $C_0(\Omega)$	37
3.6	Théorème d'Arzela-Ascoli	38
3.7	Théorème de Stone-Weierstrass	42
3.8	Convergence uniforme et espaces C_p	50
3.9	Espaces $C_p(\Omega)$	53

II	ESPACES L^p	55
4	Espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$	57
4.1	Les espaces vectoriels $L^{1,2,\infty}(E)$	57
4.2	Les espaces normés $L^{1,2,\infty}(E)$	61
4.3	Les espaces métriques $L^{1,2,\infty}(E)$	65
4.4	Les espaces de Banach $L^{1,2,\infty}(E)$	66
4.5	Premier théorème d'approximation	70
5	Produit de convolution	73
5.1	Définition et généralités	73
5.2	Propriétés générales	74
5.3	Cas fondamentaux	78
5.3.1	Le cas $L^1 \star L^1$	78
5.3.2	Le cas $L^1 \star L^2$	80
5.3.3	Le cas $L^1 \star L^\infty$	81
5.3.4	Le cas $L^2 \star L^2$	82
5.4	Support presque partout	84
5.4.1	Définition et généralités	84
5.4.2	Combinaison linéaire de parties de \mathbb{R}^n	84
5.4.3	Support pp d'un produit de convolution	85
5.5	Nouveaux cas d'existence	86
5.5.1	Espaces fonctionnels $L_{\text{comp}}^{1,2,\infty}(\Omega)$ et $L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega)$	86
5.5.2	Nouveaux produits de convolution	87
5.6	Espaces $D_L(\Omega)$	89
5.7	Théorème de Borel	91
5.8	Unité approchée de convolution	93
5.9	Unité universelle approchée de convolution	98
5.10	Premières conséquences	99
5.10.1	Deuxième théorème d'approximation	99
5.10.2	Régularisation d'un ensemble	99
5.10.3	Théorème de Stone-Weierstrass dans $C_L(\Omega)$	100
5.10.4	Approximation dans $L^{1,2}(\Omega)$	101
5.11	Critères d'annulation presque partout	102
5.12	Extension du produit de convolution	103
5.13	Partitions D_∞ de l'unité	104
6	Transformation de Fourier dans L^1	111
6.1	Définition et généralités	111
6.2	Propriétés fondamentales	112
6.3	Propriétés liées à la dérivabilité	114
6.4	Propriétés d'intégrabilité	115
6.5	Propriétés remarquables	117

6.6	Formule de Bochner	122
6.7	Transformations de Fourier en cosinus ou en sinus	124
6.8	Exemples remarquables	127
6.9	Intégrales trigonométriques	128
6.10	Localisation de Riemann	133
7	Transformation de Laplace	137
7.1	Définition et généralités	137
7.2	Propriétés générales	139
7.3	Compléments sur \mathbb{R}^n	140
7.3.1	Enveloppe convexe d'un nombre fini de points	140
7.3.2	Deux propriétés de l'exponentielle	142
7.3.3	Compacts enveloppés dans Γ_F	142
7.4	Propriétés de la fonction $\mathcal{L}_p F$	143
7.5	Transformation de Laplace unilatérale	146
7.6	Exemples	148
7.7	Applications	151
8	Transformation de Fourier dans L^2	153
8.1	Définition et généralités	153
8.2	Propriétés fondamentales	155
8.3	Propriétés particulières	158
8.4	Exemple remarquable	164
9	Transformation de Laplace dans L^2	165
9.1	Définition	165
10	Séries de Fourier dans $L^2(E)$	167
10.1	Suites orthogonales dans $L^2(E)$	167
10.2	Suites orthonormées dans $L^2(E)$	168
10.3	Suites orthonormées totales dans L^2	169
10.4	Convergence pp des séries de Fourier	171
10.5	Suite trigonométrique de Fourier	173
10.6	Séries trigonométriques de Fourier	174
10.6.1	Cas des éléments de $D_L(I^\circ)$	178
10.6.2	Cas des fonctions périodiques	178
10.7	Séries trigonométriques et $L^2(]a, b[)$	179
10.7.1	Forme réelle du développement	179
10.7.2	Forme réelle des formules de Parseval	180
10.7.3	Cas $b - a = 2\pi$ et $r = 0$	181
10.8	Convergence ponctuelle des séries de Fourier	181
10.8.1	Polynômes trigonométriques dans \mathbb{R}	182
10.8.2	Résultats généraux et exemples	184

10.8.3	Intégrales de Dirichlet	187
10.8.4	Retour aux séries de Fourier	189
10.9	Convergence à la Cesaro	191
11	Suites orthonormées totales dans L^2	195
11.1	Polynômes de Legendre	195
11.2	Fonctions de Laguerre	197
11.3	Fonctions d'Hermite	199