

UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Introduction au
CALCUL INTEGRAL

Notes du cours destiné aux premiers bacheliers
en sciences mathématiques ou en sciences physiques

Jean SCHMETS

Année académique 2004–2005

Introduction

Ce livre présente la deuxième partie des notes du cours d'analyse mathématique que j'enseigne aux étudiants premiers bacheliers en sciences mathématiques ou en sciences physiques.

En le rédigeant, j'ai suivi la tradition instaurée il y a plusieurs années par H. G. Garnir, qui consiste à voir le calcul intégral en première année et la théorie de la mesure plus tard.

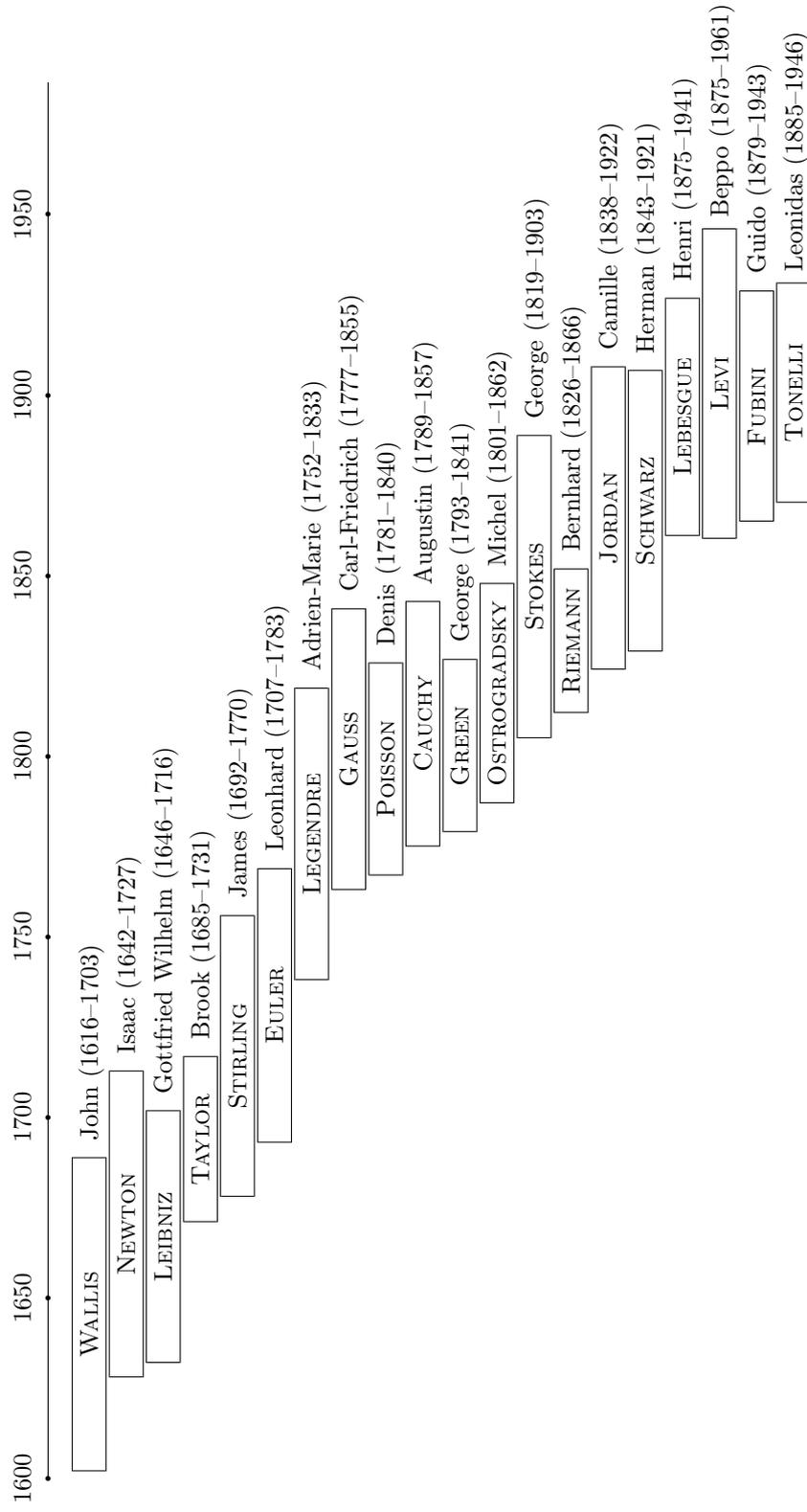
Cela signifie qu'en première candidature, on développe la puissante théorie du calcul intégral à partir d'un minimum de résultats admis sans preuve (une dizaine tout au plus). Cette manière de procéder relève à la fois d'un objectif pédagogique et d'un objectif d'efficacité. En effet, elle permet d'une part de posséder très tôt un outil complet et particulièrement utile en vue des applications. D'autre part, elle met en évidence pour les mathématiciens l'importance des résultats admis dont le cadre naturel est la théorie de l'intégration par rapport à une mesure à valeurs complexes, matière abstraite a priori qui trouve sa place naturellement en licence en sciences mathématiques.

A un étudiant qui souhaite pouvoir consulter les preuves omises dans cet exposé, je conseille les notes du cours de la théorie de la mesure destinées aux étudiants de la licence en sciences mathématiques et les références qui y sont indiquées.

J'accorde une grande importance aux exercices. On en trouvera déjà de nombreux exemples dans ces notes; on en trouvera bien davantage dans le **Cahier d'Exercices** que mes collaborateurs ont rédigé.

J. Schmets

Quelques repères chronologiques de mathématiciens cités



Chapitre 1

Intégration des fonctions étagées

1.1 Fonctions étagées

Définitions. Un *semi-intervalle* dans \mathbb{R}^n est un semi-intervalle borné de \mathbb{R}^n . Il s'écrit donc

$$I =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$$

avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_j < b_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

La *longueur* du j -ème côté de ce semi-intervalle I est le nombre strictement positif $b_j - a_j$.

Remarques. 1) Un *semi-intervalle* dans \mathbb{R}^n n'est jamais vide. De fait, le point $b = (b_1, \dots, b_n)$ est un élément de I .

2) Une *intersection finie* de *semi-intervalles* dans \mathbb{R}^n est égale à \emptyset ou à un *semi-intervalle* dans \mathbb{R}^n . Il suffit bien sûr d'établir cette propriété pour l'intersection de deux *semi-intervalles* $\prod_{j=1}^n]a_j, b_j]$ et $\prod_{j=1}^n]c_j, d_j]$ dans \mathbb{R}^n . Comme on a

$$\left(\prod_{j=1}^n]a_j, b_j] \right) \cap \left(\prod_{j=1}^n]c_j, d_j] \right) = \prod_{j=1}^n (]a_j, b_j] \cap]c_j, d_j]),$$

il suffit de prouver que l'intersection de deux *semi-intervalles* $]a, b]$ et $]c, d]$ dans \mathbb{R} est égale à \emptyset ou à un *semi-intervalle* dans \mathbb{R} . D'où la conclusion car on a évidemment

$$]a, b] \cap]c, d] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sup\{a, c\} \geq \inf\{b, d\} \\]\sup\{a, c\}, \inf\{b, d\}] & \text{sinon} \end{cases}.$$

3) Pour tout *semi-intervalle* $I =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$ dans \mathbb{R}^n , tout $j \leq n$ et tout $c_j \in]a_j, b_j]$, les ensembles

$$]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_j, c_j] \times \cdots \times]a_n, b_n]$$

et

$$]a_1, b_1] \times \cdots \times]c_j, b_j] \times \cdots \times]a_n, b_n]$$

constituent évidemment une partition de I en deux semi-intervalles dans \mathbb{R}^n . $*$ \rightarrow Inversement, on peut établir que toute partition de I en deux semi-intervalles dans \mathbb{R}^n a nécessairement cette forme. $\leftarrow *$

Rappelons la notion de réseau fini de \mathbb{R}^n .

Soient J_1, \dots, J_n des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1 et soient $r_{j,k}$, pour j, k entiers tels que $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k < J_j$, des nombres réels tels que

$$\begin{cases} -\infty < r_{1,1} < \dots < r_{1,J_1-1} < +\infty \\ \dots \\ -\infty < r_{n,1} < \dots < r_{n,J_n-1} < +\infty \end{cases}$$

Posons $r_{1,0} = -\infty, r_{1,J_1} = +\infty, \dots, r_{n,0} = -\infty, r_{n,J_n} = +\infty$. On vérifie de suite que les semi-intervalles $I_1 \times \dots \times I_n$ de \mathbb{R}^n tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, l'origine et l'extrémité de I_j soient deux symboles consécutifs pris parmi les $r_{j,0}, \dots, r_{j,J_j}$ constituent une partition de \mathbb{R}^n . Une partition de ce type est appelée *réseau fini* de \mathbb{R}^n et ses éléments *mailles du réseau*.

Proposition 1.1.1 *Si I_1, \dots, I_N sont des semi-intervalles dans \mathbb{R}^n en nombre fini, il existe un réseau fini \mathcal{R} de \mathbb{R}^n tel que chacun de ces semi-intervalles I_j se partitionne en un nombre fini d'éléments J de \mathcal{R} , à savoir les $J \in \mathcal{R}$ inclus dans I_j .*

Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, on a donc

$$I_j = \bigcup_{R \in \mathcal{R}, R \subset I_j} R \quad \text{et} \quad \chi_{I_j} = \sum_{R \in \mathcal{R}, R \subset I_j} \chi_R.$$

Preuve. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, les k -èmes coordonnées des sommets de I_1, \dots, I_N sont en nombre fini; on peut donc les ordonner par valeurs strictement croissantes et obtenir par exemple

$$-\infty < r_{k,1} < \dots < r_{k,J_k-1} < +\infty. \quad (*)$$

Ces relations (*) pour $k = 1, \dots, n$ déterminent un réseau fini de \mathbb{R}^n et on vérifie aisément que, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, les mailles de ce réseau incluses dans I_j constituent une partition finie de I_j en semi-intervalles. ■

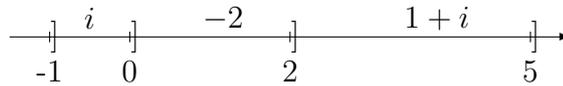
Définition. Une *fonction étagée* dans \mathbb{R}^n —on dit aussi une *fonction étagée* si aucune confusion sur n n'est possible—est une combinaison linéaire de fonctions

caractéristiques de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n . Une telle fonction s'écrit donc sous la forme

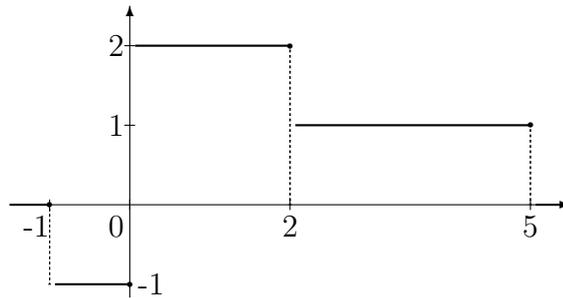
$$\alpha = \sum_{k=1}^K c_k \chi_{I_k}$$

où K est un élément de \mathbb{N}_0 , les c_k des nombres complexes et les I_k des semi-intervalles dans \mathbb{R}^n .

Remarque. Dans \mathbb{R} , la “représentation cotée” des fonctions étagées ne pose aucun problème. Si la fonction étagée est réelle, on peut même en donner le graphique. Dans \mathbb{R}^2 , la “représentation cotée” est aisée mais le graphique des fonctions étagées réelles pose déjà des problèmes de réalisation.



Représentation cotée de $i\chi_{[-1,0]} - 2\chi_{[0,2]} + (1+i)\chi_{[2,5]}$



Graphique de $-\chi_{[-1,0]} + 2\chi_{[0,2]} + \chi_{[2,5]}$

Quelques propriétés des fonctions étagées s'établissent aisément grâce au résultat suivant.

Proposition 1.1.2 *Une fonction définie sur \mathbb{R}^n est étagée dans \mathbb{R}^n si et seulement si elle est égale à une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n qui sont deux à deux disjoints.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $\alpha = \sum_{k=1}^K c_k \chi_{I_k}$ une fonction étagée dans \mathbb{R}^n . Les semi-intervalles I_1, \dots, I_K étant en nombre fini, on peut leur appliquer la proposition précédente. Cela étant, pour tout $k \leq K$, il vient

$$\chi_{I_k} = \sum_{J \in \mathcal{R}, J \subset I_k} \chi_J.$$

En remplaçant alors dans l'écriture de α chaque χ_{I_k} par cette valeur, on obtient

$$\alpha = \sum_{J \in \mathcal{R}} c'_J \chi_J \quad \text{avec} \quad c'_J = \sum_{I_k \supset J} c_k.$$

où les c'_J sont des nombres complexes et où les $J \in \mathcal{R}$ sont des semi-intervalles dans \mathbb{R}^n , deux à deux disjoints.

La condition est évidemment suffisante. ■

Remarque. Ce résultat montre bien que l'écriture d'une fonction étagée comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n , n'est pas unique.

Proposition 1.1.3 a) *Toute combinaison linéaire de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n est une fonction étagée dans \mathbb{R}^n .*

b) *Les fonctions α et $\bar{\alpha}$ sont simultanément étagées dans \mathbb{R}^n .*

En particulier, α est une fonction étagée dans \mathbb{R}^n si et seulement si les fonctions

$$\Re \alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \Im \alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

sont étagées dans \mathbb{R}^n .

c) *Si α est une fonction étagée dans \mathbb{R}^n , $|\alpha|$ est étagé dans \mathbb{R}^n .*

En particulier,

(i) *une fonction réelle α est étagée dans \mathbb{R}^n si et seulement si les fonctions*

$$\alpha_+ = \frac{|\alpha| + \alpha}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_- = \frac{|\alpha| - \alpha}{2}$$

sont étagées dans \mathbb{R}^n .

(ii) *si $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sont des fonctions étagées dans \mathbb{R}^n à valeurs réelles, alors*

$$\sup\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \quad \text{et} \quad \inf\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$$

sont aussi des fonctions étagées dans \mathbb{R}^n .

d) *Tout produit fini de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n est étagé dans \mathbb{R}^n .*

Preuve. a) résulte aussitôt de la définition des fonctions étagées.

b) Il suffit de noter qu'on a $\bar{\alpha} = \alpha$ d'une part et

$$\overline{\sum_{k=1}^K c_k \chi_{I_k}} = \sum_{k=1}^K \bar{c}_k \chi_{I_k}$$

d'autre part. Le cas particulier est immédiat.

c) De fait, si α s'écrit $\alpha = \sum_{k=1}^K c_k \chi_{I_k}$ où les I_k sont deux à deux disjoints, il vient bien sûr $|\alpha| = \sum_{k=1}^K |c_k| \chi_{I_k}$. Le cas particulier est immédiat.

d) On se ramène de suite au cas du produit de deux fonctions étagées dans \mathbb{R}^n . Or, si I et J sont deux semi-intervalles dans \mathbb{R}^n , on a $\chi_I \chi_J = \chi_{I \cap J}$ où $I \cap J$ est égal à \emptyset ou à un semi-intervalle dans \mathbb{R}^n . ■

1.2 Intégration des fonctions étagées

Définition. La *mesure* du semi-intervalle $I =]a_1, b_1] \times \dots \times]a_n, b_n]$ dans \mathbb{R}^n est le nombre $\text{mes}(I)$ défini par

$$\text{mes}(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j);$$

c'est donc un nombre strictement positif.

On vérifie aisément que si \mathcal{R} est une partition finie du semi-intervalle I dans \mathbb{R}^n en semi-intervalles, alors on a

$$\text{mes}(I) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{mes}(R).$$

Proposition 1.2.1 Si les fonctions étagées $\sum_{k=1}^K c_k \chi_{I_k}$ et $\sum_{k=1}^{K'} c'_k \chi_{I'_k}$ dans \mathbb{R}^n sont égales, on a

$$\sum_{k=1}^K c_k \text{mes}(I_k) = \sum_{k=1}^{K'} c'_k \text{mes}(I'_k).$$

Preuve. On sait qu'il existe un réseau fini \mathcal{R} de \mathbb{R}^n tel que chacun des semi-intervalles I_1, \dots, I_K et $I'_1, \dots, I'_{K'}$ se partitionne en les éléments J de \mathcal{R} qu'il contient. Une vérification directe donne alors

$$\sum_{k=1}^K c_k \chi_{I_k} = \sum_{J \in \mathcal{R}} d_J \chi_J = \sum_{k=1}^{K'} c'_k \chi_{I'_k}$$

où, pour tout $J \in \mathcal{R}$, on a

$$d_J = \sum_{I_k \supset J} c_k = \sum_{I'_k \supset J} c'_k.$$

De plus, un calcul élémentaire prouve de suite les égalités

$$\text{mes}(I_k) = \sum_{J \in \mathcal{R}, J \subset I_k} \text{mes}(J), \quad \forall k \leq K,$$

et

$$\text{mes}(I'_k) = \sum_{J \in \mathcal{R}, J \subset I'_k} \text{mes}(J), \quad \forall k \leq K'.$$

Dès lors, il vient successivement

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K c_k \operatorname{mes}(I_k) &= \sum_{k=1}^K c_k \sum_{J \in \mathcal{R}, J \subset I_k} \operatorname{mes}(J) \\
&= \sum_{J \in \mathcal{R}} d_J \operatorname{mes}(J) \\
&= \sum_{k=1}^{K'} c'_k \sum_{J \in \mathcal{R}, J \subset I'_k} \operatorname{mes}(J) = \sum_{k=1}^{K'} c'_k \operatorname{mes}(I'_k).
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Nous pouvons donc introduire la définition suivante.

Définition. L'intégrale $I(\alpha)$ de la fonction étagée $\alpha = \sum_{j=1}^J c_j \chi_{I_j}$ est le nombre $I(\alpha)$ défini par

$$I(\alpha) = \sum_{j=1}^J c_j \operatorname{mes}(I_j).$$

Cette définition a un sens car la proposition précédente affirme que le nombre $\sum_{j=1}^J c_j \operatorname{mes}(I_j)$ ne dépend pas de la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^J c_j \chi_{I_j}$ choisie pour représenter la fonction étagée α .

Passons aux propriétés de l'intégrale des fonctions étagées.

Proposition 1.2.2 a) *L'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions étagées est égale à la combinaison linéaire correspondante des intégrales de ces fonctions étagées: on a*

$$I\left(\sum_{k=1}^K d_k \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^K d_k I(\alpha_k).$$

b) *Pour toute fonction étagée α , on a*

$$I(\overline{\alpha}) = \overline{I(\alpha)} \quad \text{donc} \quad I(\Re \alpha) = \Re I(\alpha) \quad \text{et} \quad I(\Im \alpha) = \Im I(\alpha).$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction étagée et réelle est un nombre réel.

c) *Pour toute fonction étagée α , on a*

$$|I(\alpha)| \leq I(|\alpha|).$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction étagée et à valeurs positives ou nulles est un nombre supérieur ou égal à 0.

d) *Si les fonctions étagées α et β sont réelles et telles que $\alpha \leq \beta$, on a l'inégalité $I(\alpha) \leq I(\beta)$.*

e) *Si α est une fonction étagée, $I(|\alpha|) = 0$ a lieu si et seulement si on a $\alpha = 0$.*

Preuve. a) et b) sont immédiats.

c) La fonction α peut en effet s'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^J c_j \chi_{I_j}$ où les I_j sont deux à deux disjoints, ce qui donne $|\alpha| = \sum_{j=1}^J |c_j| \chi_{I_j}$. Dans ce cas, il vient successivement

$$|\mathbf{I}(\alpha)| = \left| \sum_{j=1}^J c_j \text{mes}(I_j) \right| \leq \sum_{j=1}^J |c_j| \text{mes}(I_j) = \mathbf{I}(|\alpha|).$$

d) est une conséquence directe de a) et c).

e) est immédiat. ■

Une dernière propriété de l'intégrale des fonctions étagées nécessite quelques notations.

Notations. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient n' , n'' des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $n' + n'' = n$. Soit enfin

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \nu_1 & \cdots & \nu_n \end{pmatrix}$$

une permutation. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous posons

$$x' = (x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_{n'}}) \text{ et } x'' = (x_{\nu_{n'+1}}, \dots, x_{\nu_n});$$

il s'agit de points de $\mathbb{R}^{n'}$ et $\mathbb{R}^{n''}$ respectivement. Enfin, si α est une fonction étagée dans \mathbb{R}^n (resp. $\mathbb{R}^{n'}$; $\mathbb{R}^{n''}$), nous notons $\mathbf{I}(\alpha)$ (resp. $\mathbf{I}_{x'}(\alpha)$; $\mathbf{I}_{x''}(\alpha)$) son intégrale.

Théorème 1.2.3 (Fubini) *Utilisons les notations précédentes.*

Pour toute fonction étagée α dans \mathbb{R}^n ,

a) *pour tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, $\alpha(x', x'')$ est une fonction étagée dans $\mathbb{R}^{n'}$,*

b) $\mathbf{I}_{x'}(\alpha(x', x''))$ *est une fonction étagée dans $\mathbb{R}^{n''}$,*

c) $\mathbf{I}(\alpha) = \mathbf{I}_{x''}(\mathbf{I}_{x'}(\alpha(x', x'')))$.

Preuve. Soit $\alpha = \sum_{j=1}^J c_j \chi_{I_j}$ une fonction étagée dans \mathbb{R}^n . Pour tout $j \leq J$, si I_j s'écrit

$$I_j =]a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \times \cdots \times]a_n^{(j)}, b_n^{(j)}],$$

les ensembles

$$I'_j =]a_{\nu_1}^{(j)}, b_{\nu_1}^{(j)}] \times \cdots \times]a_{\nu_{n'}}^{(j)}, b_{\nu_{n'}}^{(j)}] \text{ et } I''_j =]a_{\nu_{n'+1}}^{(j)}, b_{\nu_{n'+1}}^{(j)}] \times \cdots \times]a_{\nu_n}^{(j)}, b_{\nu_n}^{(j)}]$$

sont respectivement des semi-intervalles dans $\mathbb{R}^{n'}$ et $\mathbb{R}^{n''}$ tels que

$$\chi_{I_j}(x) = \chi_{I'_j}(x') \cdot \chi_{I''_j}(x''), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Cela étant, pour tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, il vient

$$\alpha(x', x'') = \sum_{j=1}^J c_j \chi_{I''_j}(x'') \chi_{I'_j}(x')$$

où $c_j \chi_{I''_j}(x'')$ est un nombre complexe pour tout $j \leq J$. Il s'ensuit que, pour tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, $\alpha(x', x'')$ est une fonction étagée dans $\mathbb{R}^{n'}$.

b) Pour tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, on obtient par conséquent

$$I_{x'}(\alpha(x', x'')) = \sum_{j=1}^J c_j \chi_{I''_j}(x'') \text{mes}(I'_j) = \sum_{j=1}^J c_j \text{mes}(I'_j) \cdot \chi_{I''_j}(x'')$$

ce qui montre clairement que la fonction $I_{x'}(\alpha(x', x''))$ est étagée dans $\mathbb{R}^{n''}$.

c) Enfin, l'intégrale de $I_{x'}(\alpha(x', x''))$ est évidemment égale à

$$I_{x''}(I_{x'}(\alpha(x', x''))) = \sum_{j=1}^J c_j \text{mes}(I'_j) \cdot \text{mes}(I''_j)$$

et, pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tout $j \leq J$, on a évidemment

$$\text{mes}(I'_j) \cdot \text{mes}(I''_j) = \text{mes}(I_j). \blacksquare$$

Exemple. Prenons $n = 2$, $n' = n'' = 1$ et

$$\alpha(x, y) = \chi_{]1,2] \times]1,2]}(x, y) - \chi_{]1,2] \times]2,4]}(x, y) + i \chi_{]2,3] \times]1,2]}(x, y) - i \chi_{]2,3] \times]2,4]}(x, y).$$

D'une part, on a bien sûr

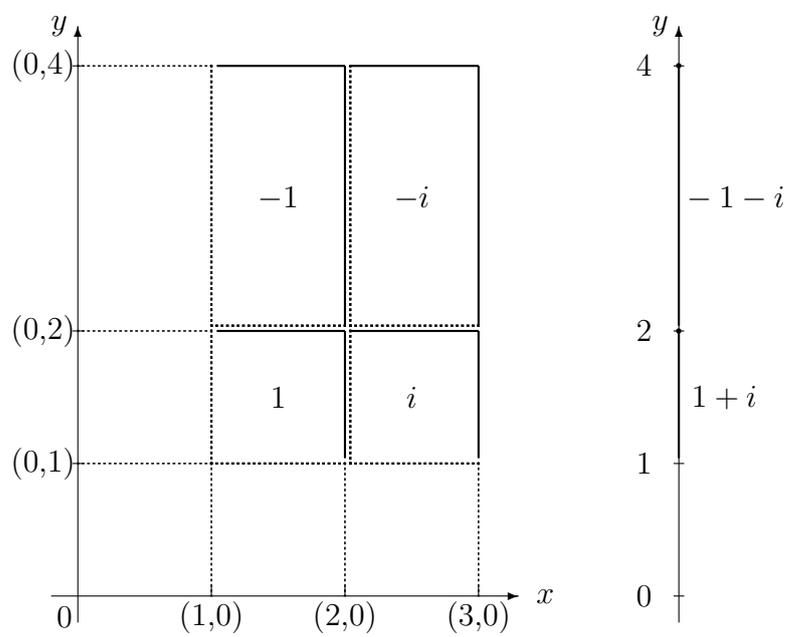
$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \text{mes}(]1, 2] \times]1, 2]) - \text{mes}(]1, 2] \times]2, 4]) \\ &\quad + i \text{mes}(]2, 3] \times]1, 2]) - i \text{mes}(]2, 3] \times]2, 4]) \\ &= 1 - 2 + i - 2i = -1 - i. \end{aligned}$$

D'autre part, il vient successivement

$$I_x(\alpha(x, y)) = (1 + i) \chi_{]1,2]}(y) - (1 + i) \chi_{]2,4]}(y)$$

puis

$$I_y(I_x(\alpha(x, y))) = 1 + i - (1 + i) \cdot 2 = -1 - i. \square$$



Représentations cotées de α et de $I_x(\alpha(x, y))$

Chapitre 2

Théorèmes fondamentaux du calcul intégral

2.1 Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble est *dénombrable* s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

De la sorte, *tout ensemble fini est dénombrable*. Cependant il existe des ensembles dénombrables qui ne sont pas finis, à savoir \mathbb{N} lui-même par exemple.

Définition. Par extension, on dit qu'une union $\cup_{j \in J} A_j$ d'ensembles est une *union dénombrable* si J est un ensemble dénombrable (ce qui ne signifie pas que l'ensemble $\cup_{j \in J} A_j$ soit dénombrable!).

Les propriétés élémentaires des ensembles dénombrables sont aisées à établir et nous suffiront pour la suite.

Proposition 2.1.1 *Toute partie d'un ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable.■*

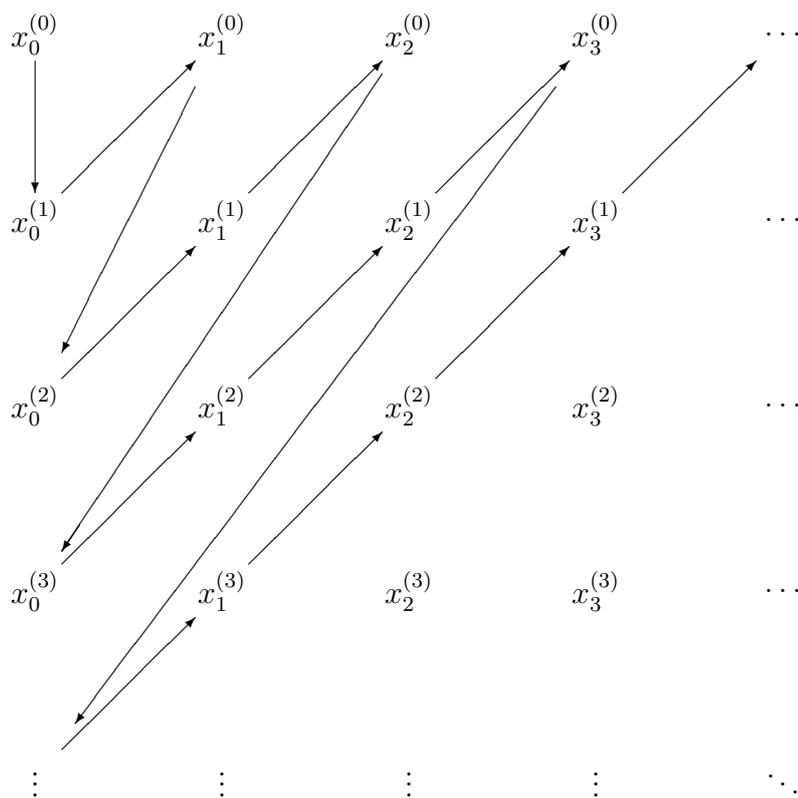
Proposition 2.1.2 *Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

Preuve. Nous allons établir le cas le plus défavorable.

Soit $(A_m = \{x_k^{(m)} : k \in \mathbb{N}\})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables deux à deux disjoints. Alors $A = \cup_{m=0}^{\infty} A_m$ est dénombrable car on vérifie aisément que

$$f: A \rightarrow \mathbb{N}; \quad x_k^{(m)} \mapsto \frac{1}{2}(k+m)(k+m+1) + k$$

est une bijection (appelée *numérotation diagonale*). La bijection inverse f^{-1} s'interprète comme étant "la loi qui, à $l \in \mathbb{N}$, associe l'élément $x_k^{(m)}$ précédé de l flèches dans le tableau suivant".



2.2 Ensembles négligeables

Définition. Une partie N de \mathbb{R}^n est *négligeable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n dont l'union contient N et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à ε .

Exemple. *Tout point de \mathbb{R}^n est négligeable.* (Il s'agit d'un abus de langage signifiant que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x\}$ est négligeable). De fait, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $I =]x_1 - 1/m, x_1] \times \cdots \times]x_n - 1/m, x_n]$ est un semi-intervalle dans \mathbb{R}^n , qui contient x et tel que $\text{mes}(I) = m^{-n}$. \square

Proposition 2.2.1 *Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable. ■*

Proposition 2.2.2 a) *Toute union finie d'ensembles négligeables est négligeable.*

b) Plus généralement, toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Preuve. a) Soient N_1, \dots, N_J des ensembles négligeables en nombre fini et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \leq J$, ε/J est un nombre strictement positif: il existe donc un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n dont l'union contient N_j et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à ε/J . Comme toute union finie d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, tous ces semi-intervalles dans \mathbb{R}^n sont en nombre fini ou peuvent être présentés comme étant les éléments d'une seule suite. La conclusion est alors immédiate: nous avons obtenu un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n dont l'union contient $N_1 \cup \dots \cup N_J$ et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à ε .

b) La preuve de b) est un raffinement de celle de a).

Vu a), il suffit d'établir le cas de l'union d'une suite $(N_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de parties négligeables de \mathbb{R}^n . Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $2^{-m}\varepsilon$ est un nombre strictement positif: il existe donc un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans \mathbb{R}^n dont l'union contient N_m et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à $2^{-m}\varepsilon$. On continue alors comme dans la preuve de a), en invoquant le fait que toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable. ■

Théorème 2.2.3 Si ω est un ouvert de \mathbb{R}^J avec $J \in \{1, \dots, n-1\}$ et si les fonctions f_1, \dots, f_n sont réelles et appartiennent à $\mathcal{C}_1(\omega)$, alors l'ensemble $\{(f_1(x), \dots, f_n(x)) : x \in \omega\}$ est une partie négligeable de \mathbb{R}^n .

(Résultat admis n. 1) ■

Corollaire 2.2.4 a) Dans \mathbb{R}^2 , toute droite est négligeable.

b) Dans \mathbb{R}^3 , tout plan est négligeable.

c) Plus généralement, dans $\mathbb{R}^{n \geq 2}$, tout hyperplan est négligeable.

Dès lors, la frontière d'un intervalle est toujours un ensemble négligeable.

Preuve. Il suffit d'établir c). Or, dans $\mathbb{R}^{n \geq 2}$, un hyperplan s'écrit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = r\}$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls et où $r \in \mathbb{R}$. Si, par exemple, on a $a_n \neq 0$, on obtient

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{r - a_1x_1 - \dots - a_{n-1}x_{n-1}}{a_n}) : x \in \mathbb{R}^{n-1} \right\},$$

ce qui suffit. ■

Exercice. Etablir que les ensembles

$$\{(x, \sin(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

sont des parties négligeables de \mathbb{R}^2 . \square

Remarque. Il existe des parties de \mathbb{R}^n qui ne sont pas négligeables. Ainsi, on peut établir que les semi-intervalles dans \mathbb{R}^n ne sont jamais négligeables. Par conséquent, dans \mathbb{R}^n , une boule n'est jamais négligeable et, plus généralement, les parties de \mathbb{R}^n dont l'intérieur n'est pas vide ne sont pas négligeables. Nous allons admettre ce résultat qui est aussi une conséquence directe du résultat admis n. 5.

Théorème 2.2.5 *Toute partie de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide est non négligeable.*
(Résultat admis n. 2) ■

2.3 Presque partout sur $A \subset \mathbb{R}^n$

Définition. Les locutions “presque partout sur $A \subset \mathbb{R}^n$ ” et “pour presque tout point de $A \subset \mathbb{R}^n$ ” sont équivalentes et signifient “sauf sur une partie négligeable de A ”. On écrit pp sur A et même pp tout simplement si A est égal à \mathbb{R}^n .

Ces locutions sont très utiles en théorie de l'intégration et sont notamment utilisées dans les contextes suivants.

a) Une fonction est *définie pp sur $A \subset \mathbb{R}^n$* si l'ensemble des points de A où elle n'est pas définie est négligeable.

Ainsi $1/x$ est une fonction définie pp sur \mathbb{R} .

Proposition 2.3.1 *Toute opération algébrique effectuée sur des fonctions définies pp sur $A \subset \mathbb{R}^n$ détermine une fonction définie pp sur A pour autant que l'ensemble des zéros appartenant à A des éventuels dénominateurs soit négligeable.*

Preuve. De fait, les seuls points de A où l'opération algébrique n'est pas définie sont les points où l'une au moins des fonctions n'est pas définie ou où au moins un des dénominateurs s'annule. Il suffit alors de rappeler que toute union finie d'ensembles négligeables est négligeable. ■

b) Deux fonctions définies pp sur $A \subset \mathbb{R}^n$ sont *égales pp sur A* si l'ensemble des points de A où elles ne sont pas égales est négligeable.

Comme toute union finie d'ensembles négligeables est négligeable, des fonctions f et g définies pp sur $A \subset \mathbb{R}^n$ sont donc égales pp sur A si et seulement si

$$\{x \in A : f \text{ et } g \text{ sont définis en } x \text{ et } f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable.

Proposition 2.3.2 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Si $f, g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ sont égaux pp sur Ω , alors on a $f = g$ sur Ω .

Preuve. Soit x_0 un point de Ω . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ suffisamment grand, la boule $\{x : |x - x_0| \leq 1/m\}$ est incluse dans Ω alors qu'aucune boule de \mathbb{R}^n n'est négligeable. Il existe donc une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans Ω convergeant vers x_0 telle que $f(x_m) = g(x_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On tire de suite $f(x_0) = g(x_0)$, vu la continuité de f et de g sur Ω . ■

Remarque. On sait que la frontière de tout intervalle est négligeable. De là, si I est un semi-intervalle dans \mathbb{R}^n , les fonctions χ_I, χ_{I^-} et χ_{I° sont égales pp sur \mathbb{R}^n .

2.4 Convergences ponctuelle et pp

Définitions. Soient A une partie de \mathbb{R}^n , f une fonction définie sur A et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions définies sur A . Alors, la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur A vers f si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $f(x)$. On dit alors que f est la *limite ponctuelle* de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur A et on écrit

$$f_m \rightarrow f \text{ sur } A \text{ ou } f_m \xrightarrow{A} f.$$

Vu le critère de Cauchy, une telle fonction f existe si et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy car alors la fonction f est la loi qui, à tout $x \in A$, associe la limite de la suite $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$.

Définitions. Si A est une partie de \mathbb{R}^n , si f est une fonction définie pp sur A et si $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions définies pp sur A , alors la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur A vers f s'il existe une partie négligeable N de A telle que, pour tout $x \in A \setminus N$, les fonctions f_m et f soient définies en x et telles que $f_m(x) \rightarrow f(x)$. On dit aussi que f est la *limite pp sur A* de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$. On écrit

$$f_m \rightarrow f \text{ pp sur } A.$$

Définition. Une fonction définie pp sur \mathbb{R}^n est *mesurable* si elle est la limite pp sur \mathbb{R}^n d'une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n .

En fait, toutes les fonctions qu'on rencontre dans les applications de l'analyse mathématique sont mesurables. Aussi, afin d'alléger fortement cette introduction au calcul intégral tout en ne diminuant pas son champ d'application, nous allons admettre l'hypothèse de travail suivante.

Hypothèse de travail. Nous admettons que toutes les fonctions définies pp sur \mathbb{R}^n sont mesurables.

Définition. Une partie de \mathbb{R}^n est *mesurable* si sa fonction caractéristique est mesurable.

Il s'ensuit que nous admettons que toute partie de \mathbb{R}^n est mesurable.

2.5 Fonctions intégrables et leur intégrale

Remarque. Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n . Il existe donc, par définition, une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n qui converge pp vers f . On pourrait alors être tenté de définir l'intégrale de f comme étant la limite éventuelle de la suite $(I(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$. Cette position très tentante soulève malheureusement des objections.

a) Il existe effectivement des suites $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui convergent pp sur \mathbb{R}^n et telles que la suite $(I(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ ne converge pas vers une limite finie. Par exemple, la suite $(\alpha_m = \chi_{]-m, m]})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur \mathbb{R} vers $\chi_{\mathbb{R}}$ et est bien sûr telle que $I(\alpha_m) = 2m \rightarrow +\infty$.

On pourrait aisément lever cette objection en définissant comme intégrables les fonctions mesurables f pour lesquelles il existe une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées qui converge pp vers f et telle que la suite $(I(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge, en définissant l'intégrale de f comme étant la limite de cette suite $I(\alpha_m)$. Mais alors, on rencontre l'objection suivante.

b) Il existe aussi des suites $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n qui convergent ponctuellement sur \mathbb{R}^n vers 0 et telles que la suite $(I(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers 1. Dans \mathbb{R} , il en est ainsi pour les suites $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ où

$$\alpha_m = m \chi_{]0, 1/m]}, \quad \frac{1}{m} \chi_{]0, m]} \quad \text{ou} \quad \chi_{]m, m+1]}.$$

Cette objection est beaucoup plus grave: si la suite $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées converge pp vers f et si la suite $(I(\beta_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers c , on vérifie de suite que la suite $(c' \alpha_m + \beta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées converge aussi pp vers f et que la suite $(I(c' \alpha_m + \beta_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge aussi, mais cette fois vers $c + c'$. Cela entraînerait que l'intégrale de f ne serait pas un nombre lié à f uniquement!

On est donc contraint d'imposer des restrictions supplémentaires.

Définition. Une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$p, q \geq M \Rightarrow I(|\alpha_p - \alpha_q|) \leq \varepsilon.$$

Voici deux propriétés fondamentales des suites de Cauchy de fonctions étagées.

Proposition 2.5.1 *Si $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de Cauchy de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , la suite numérique $(I(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge.*

Preuve. Cela résulte aussitôt de la majoration

$$|\mathbf{I}(\alpha) - \mathbf{I}(\beta)| = |\mathbf{I}(\alpha - \beta)| \leq \mathbf{I}(|\alpha - \beta|),$$

valable pour toutes fonctions étagées α, β dans \mathbb{R}^n . ■

Proposition 2.5.2 *Si la suite de fonctions étagées $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy et converge pp vers 0, la suite numérique $(\mathbf{I}(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers 0.*

(Résultat admis n. 3) ■

Cela étant, on peut introduire les définitions suivantes.

Définitions. Une fonction f définie pp sur \mathbb{R}^n est *intégrable* s'il existe une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers f . De plus, *l'intégrale de f* est la limite de la suite $(\mathbf{I}(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ et est notée

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

En effet, nous savons d'une part que la suite $(\mathbf{I}(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge. D'autre part, si $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est également une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers f , alors les limites des suites $(\mathbf{I}(\alpha_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(\mathbf{I}(\beta_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont égales puisque $(\alpha_m - \beta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui converge pp vers 0 et qui est de Cauchy, vu l'inégalité immédiate

$$\mathbf{I}(|(\alpha_p - \beta_p) - (\alpha_q - \beta_q)|) \leq \mathbf{I}(|\alpha_p - \alpha_q|) + \mathbf{I}(|\beta_p - \beta_q|),$$

valable pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Remarques. a) Dans la notation $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, x joue un rôle purement fictif: il est appelé *variable d'intégration* et peut en fait être remplacé par tout autre symbole.

b) Si deux fonctions sont définies et égales pp sur \mathbb{R}^n , elles sont simultanément intégrables et de même intégrale.

Exemple. *Toute fonction α étagée dans \mathbb{R}^n est intégrable et*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx = \mathbf{I}(\alpha).$$

Il suffit de remarquer que la suite $(\alpha_m = \alpha)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n converge pp vers α et est de Cauchy. □

A part cet exemple fondamental, il est plutôt malaisé de recourir à la définition pour contrôler si une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n est intégrable. On recourt plutôt à des critères d'intégrabilité dont voici le plus important.

Critère 2.5.3 Toute fonction mesurable et de module majoré pp par une fonction intégrable est intégrable.

(Résultat admis n. 4) ■

Corollaire 2.5.4 a) Toute fonction mesurable et de module intégrable est intégrable.

b) Toute fonction f définie sur \mathbb{R}^n , continue sur un compact K de \mathbb{R}^n et identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n \setminus K$ est intégrable.

Très souvent on énonce ce résultat sous la forme imagée suivante: toute fonction continue sur un compact y est intégrable.

Preuve. a) est immédiat.

b) De fait, la fonction f est mesurable sur \mathbb{R}^n et bornée sur K . De plus, il existe un semi-intervalle I dans \mathbb{R}^n contenant K . Au total, il existe une constante $C > 0$ telle que $|f| \leq C\chi_I$, ce qui suffit. ■

Notation. L'ensemble des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^n est noté

$$L^1(\mathbb{R}^n).$$

Définitions. Une partie A de \mathbb{R}^n est *intégrable* si sa fonction caractéristique est intégrable et sa *mesure*, notée $\text{mes}(A)$, est alors égale à l'intégrale de sa fonction caractéristique. On a donc

$$\text{mes}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx$$

pour toute partie intégrable A de \mathbb{R}^n .

Exemples. a) Tout semi-intervalle dans \mathbb{R}^n est intégrable et sa mesure coïncide avec la mesure déjà introduite.

b) Plus généralement, tout intervalle borné I est intégrable et on a

$$\text{mes}(I) = \text{mes}(I^-) = \text{mes}(I^\circ).$$

c) Tout ouvert borné et tout compact de \mathbb{R}^n sont intégrables. □

2.6 Propriétés fondamentales

Théorème 2.6.1 a) *Toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est intégrable et son intégrale est égale à la combinaison linéaire correspondante des intégrales de ces fonctions.*

Analytiquement: si on a $J \in \mathbb{N}_0$; $f_1, \dots, f_J \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $c_1, \dots, c_J \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{j=1}^J c_j f_j$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^J c_j f_j dx = \sum_{j=1}^J c_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j dx.$$

b) *Pour toute fonction intégrable f sur \mathbb{R}^n , la fonction \bar{f} est intégrable sur \mathbb{R}^n et*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f dx}.$$

En particulier,

i) *l'intégrale d'une fonction intégrable et réelle pp sur \mathbb{R}^n est un nombre réel.*

ii) *si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n , les fonctions $\Re f$ et $\Im f$ sont intégrables sur \mathbb{R}^n et*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Re \\ \Im \end{array} \right\} \int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} \Re \\ \Im \end{array} \right\} f dx.$$

c) *Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n , alors $|f|$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n telle que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx.$$

En particulier,

i) *l'intégrale d'une fonction intégrable et positive pp sur \mathbb{R}^n est un nombre supérieur ou égal à 0.*

ii) *si f est une fonction intégrable et réelle pp sur \mathbb{R}^n , les fonctions f_+ et f_- sont intégrables sur \mathbb{R}^n .*

iii) *pour tout ensemble intégrable A , on a $\text{mes}(A) \geq 0$.*

d) *Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n , l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = 0$$

a lieu si et seulement si f est égal à 0 pp sur \mathbb{R}^n .

Preuve. a) Si, pour $j \leq J$, $(\alpha_{j,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers f_j , on vérifie de suite que

$(\sum_{j=1}^J c_j \alpha_{j,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers $\sum_{j=1}^J c_j f_j$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer qu'on a successivement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^J c_j f_j dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} I \left(\sum_{j=1}^J c_j \alpha_{j,m} \right) \\ &= \sum_{j=1}^J c_j \lim_{m \rightarrow \infty} I(\alpha_{j,m}) = \sum_{j=1}^J c_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j dx. \end{aligned}$$

b) Si $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers f , on vérifie de suite que $(\overline{\alpha_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers \overline{f} . Pour conclure, il suffit alors de remarquer qu'on a successivement

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} I(\overline{\alpha_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{I(\alpha_m)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f dx}.$$

Les cas particuliers sont immédiats.

c) Si $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers f , on vérifie de suite que $(|\alpha_m|)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions étagées dans \mathbb{R}^n , qui est de Cauchy et qui converge pp vers $|f|$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer qu'on a successivement

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right| = \left| \lim_m I(\alpha_m) \right| \leq \lim_m I(|\alpha_m|) = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx.$$

Les cas particuliers sont immédiats.

d) **(Résultat admis n. 5)**■

Remarques. a) En général, le produit de deux fonctions intégrables sur \mathbb{R}^n n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^n —nous en verrons des exemples dans la suite.

b) On ne sait pas établir que si f est une fonction définie pp sur \mathbb{R}^n et de module intégrable, alors f est intégrable.

2.7 Théorèmes fondamentaux de la théorie de l'intégration

La remarque du début du paragraphe 2.5 établit clairement que

a) si une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions intégrables converge pp vers f , alors f n'est

pas nécessairement intégrable.

b) si une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions intégrables converge pp vers une fonction intégrable f , alors on peut ne pas avoir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_m dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

En effet, c'est le cas même si les f_m sont des fonctions étagées.

Les deux théorèmes suivants, dus respectivement à B. Levi et H. Lebesgue, donnent des cas dans lesquels cette égalité a lieu.

Théorème 2.7.1 (convergence monotone) *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions intégrables et réelles pp est croissante pp (resp. décroissante pp) et si la suite numérique $(\int_{\mathbb{R}^n} f_m dx)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est majorée (resp. minorée), alors*

- a) *la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp vers f (**critère de convergence**),*
- b) *cette limite f est une fonction intégrable (**critère d'intégrabilité**),*
- c) *on a $\int_{\mathbb{R}^n} |f_m - f| dx \rightarrow 0$ donc, en particulier, $\int_{\mathbb{R}^n} f_m dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx$. (**critère de passage à la limite sous le signe d'intégration**).*

(Résultat admis n. 6)■

Théorème 2.7.2 (convergence majorée) *Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions mesurables converge pp vers f et s'il existe une fonction intégrable F telle que $|f_m| \leq F$ pp pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, alors*

- a) *f est intégrable (**critère d'intégrabilité**),*
- b) *on a $\int_{\mathbb{R}^n} |f_m - f| dx \rightarrow 0$ donc, en particulier, $\int_{\mathbb{R}^n} f_m dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx$. (**critère de passage à la limite sous le signe d'intégration**).*

(Résultat admis n. 7)■

Dans les deux énoncés qui suivent, nous allons utiliser les notations introduites avant le théorème de Fubini pour les fonctions étagées, en remplaçant bien sûr $I(\alpha)$, $I_{x'}(\alpha)$ et $I_{x''}(\alpha)$ respectivement par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha dx, \quad \int_{\mathbb{R}^{n'}} \alpha dx' \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{n''}} \alpha dx''.$$

Théorème 2.7.3 (Fubini) *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,*

- a) *pour presque tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, $f(x', x'')$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$,*
- b) *$\int_{\mathbb{R}^{n'}} f dx'$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$,*
- c) *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^{n''}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n'}} f dx' \right) dx''.$$

(Résultat admis n. 8)■

L'hypothèse " $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ " du théorème de Fubini est généralement vérifiée au moyen du résultat suivant.

Théorème 2.7.4 (Tonelli) *Si la fonction f est mesurable sur \mathbb{R}^n , si $|f|$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ pour presque tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$ et si $\int_{\mathbb{R}^{n'}} |f| dx'$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$, alors f est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n .*

(Résultat admis n. 9)■

Corollaire 2.7.5 *Si f' est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ et si f'' est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$, alors la fonction f définie pp sur \mathbb{R}^n par $f(x) = f'(x') f''(x'')$ est intégrable sur \mathbb{R}^n .■*

2.8 Fonctions intégrables sur un ensemble

Définitions. En calcul intégral, on rencontre très souvent la situation suivante. On a une fonction f définie pp sur une partie mesurable E de \mathbb{R}^n et un ensemble mesurable A de \mathbb{R}^n , inclus dans E . On note alors $f\chi_A$ la fonction définie pp sur \mathbb{R}^n par

$$(f\chi_A)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Cela étant, f est une *fonction intégrable sur A* si $f\chi_A$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et on pose

$$\int_A f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A dx.$$

L'ensemble des fonctions intégrables sur A est noté $L^1(A)$.

Le nombre $\int_A f dx$ est appelé *intégrale de f sur A* . De plus, dans cette notation,

- a) f porte le nom d'*intégrand*,
- b) A porte le nom d'*ensemble d'intégration*,
- c) x porte le nom de *variable d'intégration* et joue un rôle fictif; il peut être remplacé par tout autre symbole pour autant qu'on évite toute confusion.

Parfois on met en évidence le fait qu'il s'agit d'une intégrale sur \mathbb{R}^n en écrivant

$$\int \dots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

au lieu de $\int_A f dx$ et on dit que l'intégrale est *n -uple* (*simple* si $n = 1$; *double* si $n = 2$; *triple* si $n = 3$; ...). De plus, si A est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n qui vérifient la propriété P , on écrit parfois

$$\int_P f dx \text{ ou } \int \dots \int_P f dx_1 \dots dx_n$$

au lieu de $\int_A f dx$.

L'ensemble $L^1(A)$ apparaît donc comme étant une partie de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour connaître les propriétés de ses éléments, il suffit de recourir à celles des éléments de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en tenant compte du fait que les éléments de $L^1(A)$ sont des fonctions nulles pp sur $\mathbb{R}^n \setminus A$. On obtient ainsi de suite les résultats suivants.

Théorème 2.8.1 *Soit A une partie mesurable de \mathbb{R}^n .*

a) *Toute combinaison linéaire $\sum_{j=1}^J c_j f_j$ de fonctions intégrables sur A est intégrable sur A et*

$$\int_A \sum_{j=1}^J c_j f_j dx = \sum_{j=1}^J c_j \int_A f_j dx.$$

b) *Si f est une fonction intégrable sur A , alors \bar{f} est intégrable sur A et*

$$\int_A \bar{f} dx = \overline{\int_A f dx}.$$

c) *Si f est une fonction intégrable sur A , alors $|f|$ est intégrable sur A et*

$$\left| \int_A f dx \right| \leq \int_A |f| dx. \blacksquare$$

Les théorèmes de la convergence monotone et de la convergence majorée prennent bien sûr la forme suivante.

Théorème 2.8.2 *Si $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions intégrables et réelles pp sur A , si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est croissante pp (resp. décroissante pp) sur A et si la suite numérique $(\int_A f_m dx)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est majorée (resp. minorée), alors*

a) *la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur A vers f ,*

b) *cette limite f est une fonction intégrable sur A ,*

c) *$\int_A |f_m - f| dx \rightarrow 0$ donc, en particulier, $\int_A f_m dx \rightarrow \int_A f dx$. \blacksquare*

Théorème 2.8.3 *Si $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions mesurables sur A , si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pp sur A vers f et s'il existe une fonction F intégrable sur A telle que $|f_m| \leq F$ pp sur A pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, alors*

a) *f est intégrable sur A ,*

b) *$\int_A |f_m - f| dx \rightarrow 0$ donc, en particulier, $\int_A f_m dx \rightarrow \int_A f dx$. \blacksquare*

Nous verrons au chapitre 4 comment s'interprètent les théorèmes de Fubini et de Tonelli dans ce contexte.

Proposition 2.8.4 Soit A une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

Si $\{A_1, \dots, A_J\}$ est une partition finie de A en ensembles mesurables et si f est une fonction définie pp sur A et intégrable sur chacun des A_1, \dots, A_J , alors f est intégrable sur A et

$$\int_A f \, dx = \sum_{j=1}^J \int_{A_j} f \, dx.$$

Preuve. Comme on a $f\chi_A = \sum_{j=1}^J f\chi_{A_j}$ pp sur A ; il suffit d'appliquer la propriété relative aux combinaisons linéaires de fonctions intégrables. ■

2.9 Intégration sur un intervalle de \mathbb{R}

Le cas particulier des fonctions intégrables sur un intervalle de \mathbb{R} amène quelques considérations spéciales.

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert borné de \mathbb{R} (on a donc $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$). Si f est une fonction définie pp sur $]a, b[$, nous savons bien que f est aussi défini pp sur $[a, b]$, $]a, b]$ et $[a, b]$. De plus, on vérifie de suite que f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement s'il est intégrable sur l'un quelconque des intervalles $[a, b]$, $]a, b]$ ou $[a, b]$ et, par conséquent, sur tous, et que les intégrales de f sur ces différents intervalles sont égales. Dans ces conditions, il vient

$$L^1(]a, b[) = L^1([a, b]) = L^1(]a, b]) = L^1([a, b])$$

et si f est une fonction intégrable sur ces intervalles, on adopte la notation unique

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

pour désigner son intégrale sur ces intervalles.

Ces considérations s'étendent immédiatement au cas des intervalles non bornés de \mathbb{R} et on trouvera donc des notations telles que

$$\begin{aligned} L^1(]a, +\infty[) &\text{ et } \int_a^{+\infty} f(x) \, dx, \\ L^1(]-\infty, b]) &\text{ et } \int_{-\infty}^b f(x) \, dx, \\ L^1(]-\infty, +\infty[) = L^1(\mathbb{R}) &\text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Convention. Pour des commodités d'écriture qui apparaîtront clairement plus tard, nous allons adopter la convention suivante. Pour $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ et pour $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ tels que $a < b$ si a et b sont deux nombres réels, nous convenons de poser

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

si f est intégrable sur $]a, b[$.

Mentionnons cependant déjà les résultats suivants.

Proposition 2.9.1 *Si a_1, \dots, a_J sont des nombres réels ou un des symboles $-\infty$ ou $+\infty$ avec $J \in \mathbb{N}_0$ et si, pour $j = 1, \dots, J-1$, la fonction f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités a_j et a_{j+1} , alors f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités a_1 et a_J et*

$$\int_{a_1}^{a_J} f dx = \sum_{j=1}^{J-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f dx.$$

Preuve. Il suffit bien sûr de le prouver pour $J = 3$.

Or, si on désigne par $I_{j,k}$ le semi-intervalle dont a_j et a_k sont les extrémités, la convention que nous venons d'énoncer permet d'établir que

$$\int_{a_j}^{a_k} g dx = \int_{I_{j,k}} \text{sign}(a_k - a_j) \cdot g dx, \quad \forall g \in L^1(I_{j,k}).$$

Il suffit alors pour conclure de noter que

$$\text{sign}(a_3 - a_1) \cdot f \chi_{I_{1,3}} = \text{sign}(a_2 - a_1) \cdot f \chi_{I_{1,2}} + \text{sign}(a_3 - a_2) \cdot f \chi_{I_{2,3}}. \blacksquare$$

2.10 Interprétation de Cauchy-Riemann

Le résultat suivant donne l'interprétation de Cauchy-Riemann de l'intégrale.

Théorème 2.10.1 *Soit A une partie intégrable de \mathbb{R}^n et soit, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\{A_{m,k} : k \leq K(m)\}$ une partition dénombrable (cela entraîne $K(m) \in \mathbb{N}_0$ ou $K(m) = \infty$) de A en parties mesurables telles que $\text{diam}(A_{m,k}) \leq \varepsilon_m$ pour tous m, k avec $\varepsilon_m \rightarrow 0$. De plus, pour tous m, k ainsi retenus, soit $x_{m,k}$ un point de $A_{m,k}$ (ou même de $A \cap (A_{m,k})^-$).*

Cela étant, toute fonction f continue et bornée sur A est intégrable sur A et

$$\int_A f dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{m,k}) \text{mes}(A_{m,k}).$$

Preuve. La fonction f étant continue sur A , $f\chi_A$ est bien sûr mesurable. De plus, la fonction f étant bornée sur A , il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in A$. Au total, on a $|f\chi_A| \leq C\chi_A$ et ainsi f est intégrable sur A .

Cela étant, établissons tout d'abord que le théorème de la convergence majorée s'applique à la suite

$$\left(f_m(x) = \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{m,k}) \chi_{A_{m,k}}(x) \right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

On vérifie de suite que ces f_m sont des fonctions mesurables (c'est-à-dire que ces f_m sont des fonctions définies pp sur \mathbb{R}^n , vu notre position vis-à-vis de la mesurabilité). De plus, la suite f_m converge vers f sur A : pour tout $x \in A$ et tout m , il existe un entier $k \leq K(m)$ et un seul tel que $x \in A_{m,k}$, ce qui nous permet de l'écrire $k(m, x)$. Au total, il vient

$$f_m(x) = f(x_{m,k(m,x)}), \quad \forall x \in A,$$

avec $|x - x_{m,k(m,x)}| \leq \text{diam}(A_{m,k(m,x)}) \leq \varepsilon_m$. Cela suffit, vu la continuité de f sur A . Enfin, $C\chi_A$ est une fonction intégrable sur A telle que $|f_m| \leq C\chi_A$ pp sur A .

Vu le théorème de la convergence majorée, nous avons donc

$$\int_A f_m dx \rightarrow \int_A f dx$$

et tout revient à calculer $\int_A f_m dx$.

Si $K(m)$ est un entier, on remarque que f_m est une combinaison linéaire de fonctions intégrables donc que

$$\int_A f_m dx = \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{m,k}) \text{mes}(A_{m,k}).$$

Si $K(m)$ est égal à ∞ , établissons que le théorème de la convergence majorée s'applique à la suite

$$\left(g_K(x) = \sum_{k=1}^K f(x_{m,k}) \chi_{A_{m,k}}(x) \right)_{K \in \mathbb{N}_0}.$$

Ces g_K sont bien sûr des fonctions mesurables. On vérifie de suite que la suite g_K converge pp sur A vers f_m . Enfin on a évidemment $|g_K| \leq C\chi_A$ pp sur A . Dès lors, il vient

$$\sum_{k=1}^K f(x_{m,k}) \text{mes}(A_{m,k}) = \int_A g_K dx \rightarrow \int_A f_m dx,$$

donc

$$\int_A f_m dx = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{m,k}) \text{mes}(A_{m,k}).$$

D'où la conclusion. ■

Remarque. Il convient de remarquer qu'une preuve analogue établit aussitôt le résultat suivant. Soit f une fonction positive (resp. négative), continue et intégrable sur la partie mesurable et bornée A de \mathbb{R}^n . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit $\{A_{m,k} : k \leq K(m)\}$ une partition dénombrable de A en parties mesurables telles que $\text{diam}(A_{m,k}) \leq \varepsilon_m$ pour tous m, k avec $\varepsilon_m \rightarrow 0$ et soit $r_{m,k}$ la borne inférieure (resp. supérieure) de $\{f(x) : x \in A_{m,k}\}$. Alors, on a

$$\int_A f dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K(m)} r_{m,k} \text{mes}(A_{m,k}).$$

De plus, si on convient de poser $r_{m,k} \text{mes}(A_{m,k}) = 0$ si $r_{m,k}$ est égal à 0, on peut même supprimer l'hypothèse que A soit borné dans ce dernier énoncé.

Exemple. Le cas particulier d'une fonction continue sur un intervalle compact de \mathbb{R} est fort important en pratique et montre clairement comment on peut appliquer ce résultat.

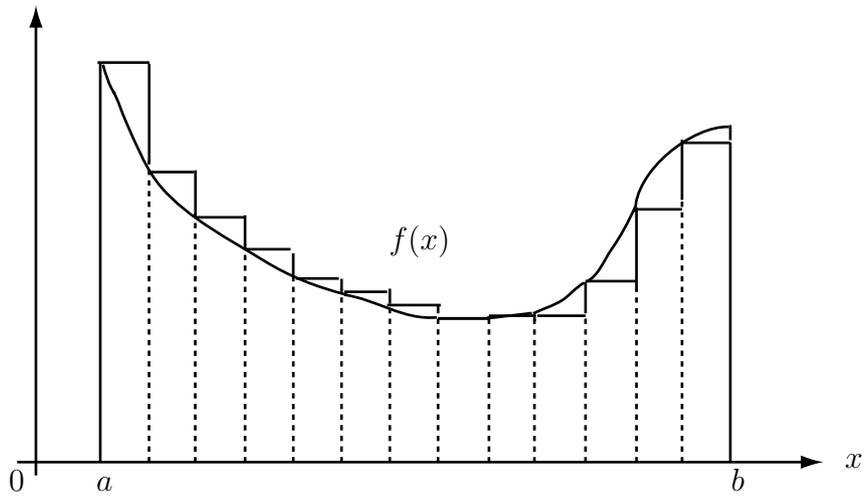
Soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, partitionnons le semi-intervalle $]a, b]$ en m semi-intervalles de mêmes mesures, égales par conséquent à $(b - a)/m$; cela se fait tout simplement au moyen des semi-intervalles $]a_{m,k}, a_{m,k+1}]$ avec $k = 1, \dots, m$, où on pose

$$a_{m,k} = a + (k - 1)(b - a)/m, \quad \forall k \in \{1, \dots, m + 1\}.$$

Dans chaque intervalle $[a_{m,k}, a_{m,k+1}]$, choisissons un point $x_{m,k}$ (le plus souvent, on prend $x_{m,k} = a_{m,k}, a_{m,k+1}$ ou $(a_{m,k} + a_{m,k+1})/2$). L'interprétation de Cauchy-Riemann affirme alors que, pour tout $f \in \mathcal{C}_0([a, b])$,

$$\frac{b - a}{m} \sum_{k=1}^m f(x_{m,k}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

* \rightarrow On approche $\int_a^b f dx$ par des sommes d'aires de rectangles qui ont tous la même largeur et de hauteur déterminée par f . \leftarrow *□



Chapitre 3

Intégration sur un intervalle de \mathbb{R}

3.1 Intégrales fléchées

Proposition 3.1.1 *Pour tout $f \in L^1(]a, b[)$, on a*

$$\int_a^b f dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow a^+ \\ \beta \rightarrow b^-}} \int_\alpha^\beta f dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f dx.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, pour toutes suites $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(b_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $]a, b[$ qui convergent respectivement vers a^+ et b^- , le théorème de la convergence majorée s'applique de la manière suivante à la suite $(f_m = f \chi_{]a_m, b_m[})_{m \in \mathbb{N}_0}$, définie pour m suffisamment grand.

Les fonctions f_m sont mesurables. La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge évidemment pp sur $]a, b[$ vers f et on a bien sûr $|f_m| \leq |f|$ pp sur A . Dès lors, il vient

$$\int_{a_m}^{b_m} f dx = \int_a^b f_m dx \rightarrow \int_a^b f dx. \blacksquare$$

Notations. Nous verrons plus loin que la réciproque de cette propriété est fautive. En fait, pour tout intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} , il existe une fonction f intégrable sur

$$] \alpha, \beta[\quad | \quad] \alpha, b[\quad | \quad] a, \beta[$$

pour tous α, β tels que $a < \alpha < \beta < b$ et telle que

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow a^+ \\ \beta \rightarrow b^-}} \int_\alpha^\beta f dx \quad | \quad \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f dx \quad | \quad \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f dx$$

existe et soit fini sans que f soit intégrable sur $]a, b[$.

Dans ce cas, **cette limite est notée**

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f dx \quad | \quad \int_{\rightarrow a}^b f dx \quad | \quad \int_a^{\rightarrow b} f dx$$

et on ne peut pas lui appliquer les résultats du calcul intégral sans justification supplémentaire.

En fait, les intégrales fléchées ne peuvent être considérées que comme étant des limites et, pour les utiliser, il faut recourir systématiquement à leur définition.

3.2 Théorème d'existence d'une primitive

La théorie de l'intégration permet de donner une démonstration simple du résultat suivant, que nous avons admis auparavant.

Théorème 3.2.1 (existence d'une primitive) *Toute fonction continue sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} y est primitivable.*

Plus précisément: si f est une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} et si x_0 est un point de $]a, b[$, alors $\int_{x_0}^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $]a, b[$.

Preuve. Pour tout $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$, l'intervalle fermé d'extrémités x_0 et x est compact et f y est continu, donc intégrable. L'intégrale proposée a par conséquent un sens pour tout $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$ et vaut bien sûr 0 en $x = x_0$.

Pour conclure, il suffit alors de prouver que

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}_0} \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Or, pour tout $x \in]a, b[$ et tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suffisamment petit, on a

$$\frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt.$$

Cela étant, pour tout $x \in]a, b[$ et tout $\varepsilon > 0$, la continuité de f sur $]a, b[$ procure $\eta > 0$ tel que

$$|x - y| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, il vient

$$|h| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \varepsilon$$

comme on le vérifie de suite en considérant séparément les cas $h > 0$ et $h < 0$ et en appliquant les formules

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b g \, dx \leq \int_a^b h \, dx$$

valables pour tous $f, g, h \in L^1(]a, b[)$ tels que $g \leq h$ pp sur $]a, b[$. ■

Ce résultat a des conséquences très importantes pour le calcul intégral. Il permet notamment d'établir le résultat suivant, que nous développons au paragraphe 3.4

Théorème 3.2.2 *Si f est une fonction continue et intégrable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} , alors toute primitive F de f sur $]a, b[$ admet des limites finies en a^+ et en b^- et*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Preuve. Soit x_0 un point de $]a, b[$. Il existe alors une constante C telle que

$$F(x) = C + \int_{x_0}^x f(t) \, dt, \quad \forall x \in]a, b[.$$

Dès lors, comme f est intégrable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$, la Proposition 3.1.1 donne de suite

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} F(\alpha) = C - \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^{x_0} f(x) \, dx = C - \int_a^{x_0} f(x) \, dx$$

et

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} F(\beta) = C + \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_{x_0}^{\beta} f(x) \, dx = C + \int_{x_0}^b f(x) \, dx.$$

D'où la conclusion. ■

Définition. On réfère à ce résultat en parlant du calcul de l'intégrale d'une fonction continue et intégrable sur $]a, b[$ par la *méthode de la variation d'une primitive*.

Remarque. Pour appliquer cette méthode de calcul d'une intégrale, nous devons vérifier que

- a) f est continu sur $]a, b[$. Nous avons déjà de nombreux critères permettant de vérifier cette condition.
- b) f est intégrable sur $]a, b[$. La vérification de cette condition fait l'objet du paragraphe suivant.

3.3 Critères d'intégrabilité

Voici le résultat qui conditionne la recherche de l'intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} .

Proposition 3.3.1 *Si f est une fonction continue sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$ et s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$ et que $f\chi_{]a, \alpha[}$ et $f\chi_{] \beta, b[}$ soient intégrables, alors f est intégrable sur $]a, b[$.*

Preuve. C'est immédiat car on a

$$f\chi_{]a, b[} = f\chi_{]a, \alpha[} + f\chi_{[\alpha, \beta]} + f\chi_{] \beta, b[}$$

avec $f\chi_{[\alpha, \beta]}$ intégrable car il s'agit d'une fonction continue sur un compact. ■

Définitions. Une fonction f définie pp sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est *intégrable en a^+* s'il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]a, \alpha[$. De même, f est *intégrable en b^-* s'il existe $\beta \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $] \beta, b[$.

De la sorte, l'intégrabilité de $f \in \mathcal{C}_0(]a, b[)$ sur $]a, b[$ est ramenée à son intégrabilité en a^+ et en b^- .

Critère 3.3.2 (théorique) *Si f est une fonction mesurable, réelle et de signe constant sur $]a, b[$ et si on a*

$$f \in L^1(] \alpha, b[), \quad \forall \alpha \in]a, b[, \quad \Bigg| \quad f \in L^1(]a, \beta[), \quad \forall \beta \in]a, b[,$$

alors f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si il existe une suite

$$(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \text{ dans }]a, b[, \quad a_m \downarrow a, \quad \Bigg| \quad (b_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \text{ dans }]a, b[, \quad b_m \uparrow b,$$

telle que la suite d'éléments général

$$\int_{a_m}^b f \, dx \quad \Bigg| \quad \int_a^{b_m} f \, dx$$

converge vers une limite finie.

Preuve. Etablissons le résultat relatif à l'intégrabilité en b^- ; celle en a^+ s'établit de même.

La nécessité de la condition résulte aussitôt de la Proposition 3.1.1.

La suffisance de la condition résulte d'une application du théorème de la convergence monotone à la suite $(f_m = f\chi_{]a, b_m[})_{m \in \mathbb{N}_0}$. Pour tout m , f_m est une fonction intégrable sur $]a, b[$. De plus, la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est croissante pp vers $f\chi_{]a, b[}$ si f est positif et décroissante pp vers $f\chi_{]a, b[}$ si f est négatif. Enfin, la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_m \, dx)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge donc est bornée. Vu le théorème de la convergence monotone, la limite $f\chi_{]a, b[}$ de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est intégrable sur \mathbb{R} , ce qui suffit. ■

Ce critère permet d'établir l'intégrabilité de certaines fonctions usuelles, considérées comme étant des exemples fondamentaux de fonctions intégrables.

Exemple. Si r et θ sont des nombres réels, les fonctions

$$\frac{1}{(x-r)^\theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(r-x)^\theta}$$

sont respectivement intégrables en r^+ et en r^- si et seulement si $\theta < 1$.

De fait, la fonction $(x-r)^{-\theta}$ (resp. $(r-x)^{-\theta}$) est positive et continue sur $]r, r+1]$ (resp. $[r-1, r[$) et une de ses primitives sur l'intervalle ouvert correspondant, à savoir

$$\frac{(x-r)^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \left(\text{resp.} \quad -\frac{(r-x)^{1-\theta}}{1-\theta} \right) \quad \text{si } \theta \neq 1$$

et

$$\ln(x-r) \quad \left(\text{resp.} \quad -\ln(r-x) \right) \quad \text{si } \theta = 1$$

admet une limite finie en r^+ (resp. en r^-) si et seulement si $\theta < 1$. \square

Exemple. Si Θ est un nombre réel, les fonctions

$$\frac{1}{x^\Theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|x|^\Theta}$$

sont respectivement intégrables en $+\infty$ et en $-\infty$ si et seulement si $\Theta > 1$.

De fait, la fonction $x^{-\Theta}$ (resp. $|x|^{-\Theta}$) est positive et continue sur $[1, +\infty[$ (resp. $] -\infty, -1]$) et une de ses primitives sur l'intervalle ouvert correspondant, à savoir

$$\frac{x^{1-\Theta}}{1-\Theta} \quad \left(\text{resp.} \quad -\frac{|x|^{1-\Theta}}{1-\Theta} \right) \quad \text{si } \Theta \neq 1$$

et

$$\ln(x) \quad \left(\text{resp.} \quad -\ln(|x|) \right) \quad \text{si } \Theta = 1$$

admet une limite finie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si et seulement si $\Theta > 1$. \square

Critère 3.3.3 (pratique) Une fonction $f \in \mathcal{C}_0(]a, b[)$ est

intégrable en a^+

|

intégrable en b^-

si l'une des conditions suivantes est réalisée:

1) a appartient à \mathbb{R} et f a une limite finie en a^+ ,

2) a appartient à \mathbb{R} et il existe $\theta < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^\theta |f(x)|$$

existe et est fini,

3) on a $a = -\infty$ et il existe $\Theta > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\Theta |f(x)|$$

existe et est fini,

4) il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que f garde un signe constant sur $]a, \alpha[$ et qu'une primitive de f a une limite finie en a^+ .

1') b appartient à \mathbb{R} et f a une limite finie en b^- ,

2') b appartient à \mathbb{R} et il existe $\theta < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^\theta |f(x)|$$

existe et est fini,

3') on a $b = +\infty$ et il existe $\Theta > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|^\Theta |f(x)|$$

existe et est fini,

4') il existe $\beta \in]a, b[$ tel que f garde un signe constant sur $] \beta, b[$ et qu'une primitive de f a une limite finie en b^- .

Preuve. Considérons le cas de l'intégrabilité en b^- ; le cas de l'intégrabilité en a^+ s'établit de même.

1') Il existe alors $\beta \in]a, b[$ et $C > 0$ tels que la fonction mesurable $f \chi_{] \beta, b[}$ ait son module majoré pp par la fonction intégrable $C \chi_{] \beta, b[}$.

2') Il existe alors $\beta \in]a, b[$ et $C > 0$ tels que la fonction mesurable $f \chi_{] \beta, b[}$ ait son module majoré pp par la fonction intégrable $C(b - x)^{-\theta} \chi_{] \beta, b[}$.

3') Il existe alors $\beta \in]a, +\infty[$ et $C > 0$ tels que la fonction mesurable $f \chi_{] \beta, +\infty[}$ ait son module majoré pp par $C x^{-\Theta} \chi_{] \beta, +\infty[}$.

4') est une conséquence directe du critère théorique d'intégrabilité établi au début de ce paragraphe. ■

Exemples. a) La fonction $\ln(1+x)$ est intégrable sur $]0, 1[$. De fait, elle admet un prolongement continu sur le compact $[0, 1]$.

b) La fonction $\ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1[$. De fait, elle est continue sur $]0, 1[$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$.

c) Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$, la fonction $(x - a)^{-1/2}(b - x)^{-1/2}$ est intégrable sur $]a, b[$. De fait, cette fonction est continue sur $]a, b[$ et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x - a)^{1/2}}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{(b - x)^{1/2}}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} = \frac{1}{\sqrt{b - a}}.$$

d) La fonction $\ln(x)/(x^2 + 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, d'une part, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} = 0$$

car toute puissance positive de x l'emporte sur $\ln(x)$ en 0^+ : elle est donc intégrable en 0^+ . D'autre part, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

car toute puissance négative de x l'emporte sur $\ln(x)$ en $+\infty$: elle est donc aussi intégrable en $+\infty$.

e) *La fonction $1/(x \ln^2(x))$ est intégrable en $+\infty$.* De fait, elle est à valeurs positives et continue sur $[2, +\infty[$ et une de ses primitives, à savoir $-1/(\ln(x))$, admet 0 comme limite en $+\infty$. \square

Remarque. Si la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle $]a, b[$, on ne peut évidemment pas appliquer les résultats précédents sans courir de grands risques.

Ainsi la fonction x^{-2} est bien sûr continue et positive sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et est par conséquent intégrable en $(-1)^+$ et en 1^- . De plus, $-1/x$ est une primitive de x^{-2} sur l'ensemble $] - 1, 0[\cup]0, 1[$. Cependant on ne peut en conclure que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \quad \text{“=”} \quad - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2 \quad (*)$$

car $1/x$ n'est pas continu sur $] - 1, 1[$. En fait, x^{-2} n'est intégrable ni en 0^+ ni en 0^- . De toute façon, le résultat (*) est absurde car l'intégrale d'une fonction intégrable et positive est un nombre positif. \square

Cependant il peut se faire qu'il existe des nombres réels a_1, \dots, a_{J-1} en nombre fini vérifiant $a < a_1 < \dots < a_{J-1} < b$ et tels que la fonction f appartienne à $\mathcal{C}_0(]a, a_1[\cup \dots \cup]a_{J-1}, b])$. Cela étant, si f est intégrable sur chacun de ces intervalles $]a, a_1[$, \dots , $]a_{J-1}, b[$ (et ici on peut appliquer les critères vus), on obtient que $f \chi_{]a, b[}$ est égal pp à $f \chi_{]a, a_1[} + \dots + f \chi_{]a_{J-1}, b[}$ donc est intégrable sur $]a, b[$.

Exemple. *La fonction $\ln(x)/(x^2 - 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.* Cette fonction est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Elle est intégrable en 0^+ car on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0.$$

Elle est intégrable en 1^- et en 1^+ car elle admet une limite en 1 comme on le vérifie de suite en recourant au théorème de l'Hospital. Enfin elle est intégrable en $+\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0. \square$$

Remarque. Bien sûr, une fonction $f \in \mathcal{C}_0(]a, b[)$ n'est pas intégrable sur $]a, b[$ si elle ne vérifie pas une propriété que son intégrabilité sur $]a, b[$ entraînerait. Ainsi

a) $f \in \mathcal{C}_0(]a, b[)$ n'est pas intégrable sur $]a, b[$ s'il existe une primitive de f sur $]a, b[$ qui n'admet pas une limite finie en a^+ ou en b^- . Par exemple, $1/(x \ln(x))$ n'est pas intégrable sur $]2, +\infty[$ car cette fonction continue sur $]2, +\infty[$ a une de ses primitives sur $]2, +\infty[$, à savoir $\ln(\ln(x))$, qui n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

b) f n'est pas intégrable sur $]a, b[$ si $|f|$ majore pp sur $]a, b[$ une fonction positive et non intégrable sur $]a, b[$. Par exemple, $f \in \mathcal{C}_0(]a, b[)$ n'est pas intégrable sur $]a, b[$ dans les cas suivants:

- i) $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)f(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir ∞).
- ii) $b \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)f(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir ∞).
- iii) $a = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|f(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir ∞).
- iv) $b = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir ∞).

On en déduit de suite que $1/\sin(x)$ n'est pas intégrable sur $]0, \pi[$. \square

Corollaire 3.3.4 *Si f est intégrable en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et admet une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$), cette limite est égale à 0.*

Preuve. Si cette limite est égale à $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ou à ∞ , il existe $r, N > 0$ tels que

$$|f(x)| \geq r \chi_{]N, +\infty[} \quad (\text{resp. } r \chi_{]-\infty, -N[})$$

alors que cette fonction $r \chi_{]N, +\infty[}$ (resp. $r \chi_{]-\infty, -N[}$) n'est pas intégrable. \blacksquare

3.4 Calcul des intégrales sur un intervalle de \mathbb{R}

Dans ce paragraphe, nous étudions les conséquences du Théorème 3.2.2 vis-à-vis du calcul des intégrales sur un intervalle de \mathbb{R} . Rappelons son énoncé.

Théorème 3.4.1 *Si f est une fonction continue et intégrable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} , alors toute primitive F de f sur $]a, b[$ admet des limites finies en a^+ et en b^- et*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x). \blacksquare$$

En soi, ce résultat constitue un puissant moyen de calcul d'intégrales.

Exercice. *Calculer*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{(1 + 1/m) \dots (1 + m/m)}.$$

Suggestion. On a évidemment

$$\ln(\sqrt[m]{(1 + 1/m) \dots (1 + m/m)}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln(1 + k/m).$$

Dès lors, comme la fonction $\ln(1 + x)$ est continue sur le compact $[0, 1]$, il vient de suite

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln(1 + k/m) \rightarrow \int_0^1 \ln(1 + x) dx = \ln(4/e),$$

en recourant à l'exemple qui a suivi l'interprétation de Cauchy-Riemann du calcul intégral. Il suffit de dire que $[0, 1]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\{](k-1)/m, k/m] : k = 1, \dots, m \}$$

est une partition de $]0, 1]$ en semi-intervalles. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $k \leq m$, k/m appartient à $](k-1)/m, k/m]$. Il vient donc

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln(1 + k/m) = \sum_{k=1}^m [\ln(1 + x)]_{x=k/m} \cdot \text{mes}(](k-1)/m, k/m])$$

ce qui suffit. Dès lors, vu la continuité de e^x sur \mathbb{R} , la limite à calculer existe et vaut $4/e$. \square

Exercice. Calculer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m!}{m^m} \right)^{1/m}.$$

Suggestion. Ici on a

$$\ln \left(\frac{m!}{m^m} \right)^{1/m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln \left(\frac{k}{m} \right).$$

La fonction $\ln(x)$ est négative, continue et intégrable sur le semi-intervalle $]0, 1]$, comme on le vérifie aisément. Dès lors, vu l'énoncé qui figure dans la remarque suivant l'interprétation de Cauchy-Riemann, il vient

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln \left(\frac{k}{m} \right) \rightarrow \int_0^1 \ln(x) dx = -1.$$

Dès lors, la limite à calculer existe et vaut $1/e$. \square

Remarque. Nous allons voir maintenant comment certaines techniques de calcul d'une primitive de $f \in \mathcal{C}_0(]a, b])$ s'adaptent au calcul intégral. \square

3.4.1 Intégration par parties.

Théorème 3.4.2 (intégration par parties) *Si les fonctions f et g appartiennent à $\mathcal{C}_1(]a, b[)$ et si deux des assertions suivantes sont vérifiées:*

- a) $f Dg$ admet une intégrale fléchée sur $]a, b[$,
 - b) $g Df$ admet une intégrale fléchée sur $]a, b[$,
 - c) fg admet une limite finie en a^+ et en b^- ,
- alors la troisième assertion est vérifiée et

$$fg|_a^b = \int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f Dg dx + \int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} g Df dx,$$

où on a posé

$$fg|_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x).$$

Preuve. Bien sûr, on a $D(fg) = f Dg + g Df$ sur $]a, b[$ et les fonctions $D(fg)$, $f Dg$ et $g Df$ sont continues sur $]a, b[$. Dès lors, pour tous nombres α, β tels que $a < \alpha < \beta < b$, il vient

$$f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} D(fg) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f Dg dx + \int_{\alpha}^{\beta} g Df dx.$$

La conclusion s'ensuit aussitôt. ■

Remarque. Insistons sur le fait que ce résultat n'entraîne pas que si les fonctions $f, g \in \mathcal{C}_1(]a, b[)$ sont telles que $f Dg \in L^1(]a, b[)$ et $fg|_a^b$ fini, alors $g Df$ appartient à $L^1(]a, b[)$.

Voici une conséquence théorique intéressante de ce résultat.

Théorème 3.4.3 (Formule de Taylor dans \mathbb{R}) *Si la fonction f appartient à $\mathcal{C}_p([a, b])$, alors*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)[Df]_a + \dots + \frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!} [D^{p-1}f]_a \\ &\quad + (b-a)^p \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} [D^p f]_{a+t(b-a)} dt. \end{aligned}$$

Preuve. Pour $p = 1$, la formule est une conséquence directe du théorème rappelé au début de ce paragraphe car

$$(b-a) \cdot [Df]_{a+t(b-a)} = D_t f(a+t(b-a))$$

est une fonction continue sur le compact $[0, 1]$.

Cela étant, procédons par récurrence. Si la formule est vérifiée pour $l - 1 < p$, établissons qu'elle est aussi vérifiée pour l . A cet effet, il suffit de noter qu'on a successivement

$$\begin{aligned} & (b-a)^{l-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{l-2}}{(l-2)!} [D^{l-1}f]_{a+t(b-a)} dt \\ \stackrel{(*)}{=} & - (b-a)^{l-1} \int_0^1 D \frac{(1-t)^{l-1}}{(l-1)!} \cdot [D^{l-1}f]_{a+t(b-a)} dt \\ \stackrel{(**)}{=} & \frac{(b-a)^{l-1}}{(l-1)!} [D^{l-1}f]_a + (b-a)^l \int_0^1 \frac{(1-t)^{l-1}}{(l-1)!} [D^l f]_{a+t(b-a)} dt \end{aligned}$$

(en (*), on a remplacé

$$\frac{(1-t)^{l-2}}{(l-2)!} \text{ par } -D \frac{(1-t)^{l-1}}{(l-1)!}$$

et, en (**), on a intégré par parties). ■

De la même manière, on établit le résultat suivant.

Théorème 3.4.4 (formule de Taylor) *Si la fonction f appartient à $\mathcal{C}_p(\Omega)$, alors, pour tous $x, x+h \in \Omega$ tels que le segment $\{x+th : t \in [0, 1]\}$ soit inclus dans Ω , il vient*

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k_1=1}^n h_{k_1} [D_{k_1} f]_x + \dots \\ &+ \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_{p-1}=1}^n h_{k_1} \dots h_{k_{p-1}} [D_{k_1} \dots D_{k_{p-1}} f]_x \\ &+ \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_p=1}^n h_{k_1} \dots h_{k_p} \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} [D_{k_1} \dots D_{k_p} f]_{x+th} dt. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarques. a) Il convient d'insister sur le fait que les formules intégrales limitées de Taylor que nous venons d'établir sont valables pour une fonction à valeurs complexes.

b) Le dernier terme de la formule intégrale limitée de Taylor dans \mathbb{R} est aussi égal à

$$\int_a^b \frac{(b-x)^{p-1}}{(p-1)!} [D^p f]_x dx. \square$$

Exercice. *Etablir que, pour tout $a > 0$, $\ln(1+a^2/x^2)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer son intégrale par parties.*

Suggestion. Cette fonction est évidemment continue sur $]0, +\infty[$. De plus, des applications directes du théorème de l'Hospital établissent que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(1 + a^2/x^2) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(1 + a^2/x^2) = a^2.$$

La fonction considérée est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

La primitivation par parties nous amène à considérer les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(1 + a^2/x^2)$ sur $]0, +\infty[$. Il s'agit bien sûr d'éléments de $\mathcal{C}_1(]0, +\infty[)$. De plus, des applications directes du théorème de l'Hospital donnent

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(1 + a^2/x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln(1 + a^2/x^2) = 0.$$

Enfin on vérifie aisément que

$$f(x) \cdot [Dg]_x = -\frac{2a^2}{x^2 + a^2}$$

est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$. Au total, il vient donc

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 + a^2/x^2) dx = fg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{x^2 + a^2} dx = 2a \operatorname{arctg}(x/a)|_0^{+\infty} = a\pi. \square$$

Remarque. Dans l'exercice précédent, on pouvait aussi établir l'intégrabilité de la fonction $\ln(1 + a^2/x^2)$ sur $]0, +\infty[$ de la manière suivante. Après avoir vérifié que

$$fg|_0^{+\infty} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{a^2 + x^2} dx$$

ont un sens, on obtient que

$$\int_{\rightarrow 0}^{\rightarrow +\infty} \ln(1 + a^2/x^2) dx$$

a un sens par le théorème d'intégration par parties. Pour obtenir l'intégrabilité de $\ln(1 + a^2/x^2)$ sur $]0, +\infty[$, il suffit alors de remarquer que cette fonction est réelle et garde un signe constant sur $]0, +\infty[$. \square

3.4.2 Intégration par changement de variable

Théorème 3.4.5 (changement de variable) *Si $x'(x)$ est un changement de variable régulier d'ordre $p \geq 1$ entre les intervalles ouverts I et I' de \mathbb{R} , il vient*

$$f(x) \in L^1(I) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x(x')) D_{x'}x(x') \in L^1(I'),$$

auquel cas il vient

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(x(x')) D_{x'}x(x') dx'$$

si I s'écrit $]a, b[$ et si on pose $a' = \lim_{x \rightarrow a^+} x'(x)$ et $b' = \lim_{x \rightarrow b^-} x'(x)$.

Preuve. **Cas** $f \in \mathcal{C}_0(I)$. Comme $x'(x)$ est un changement de variable régulier d'ordre $p \geq 1$ entre I et I' , les fonctions $D_{x'}x(x')$ et $[D_x x'(x)]_{x(x')}$ sont réelles et continues sur I' et on a

$$D_{x'}x(x') \cdot [D_x x'(x)]_{x(x')} = 1, \quad \forall x' \in I'.$$

Vu le théorème des valeurs intermédiaires, $D_{x'}x(x')$ est donc une fonction à valeurs strictement positives ou une fonction à valeurs strictement négatives sur I' .

La condition est nécessaire. Supposons tout d'abord qu'en outre f soit une fonction positive sur I ; f est donc une fonction positive, continue et intégrable sur $I =]a, b]$. Dès lors, si F est une primitive de f sur $]a, b]$, il vient

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

De plus, $f(x(x')) \cdot D_{x'}x(x')$ est une fonction continue sur I' qui garde un signe constant sur I' : elle est donc intégrable sur I' si et seulement si une de ses primitives admet des limites finies aux extrémités de I' . Or, vu le théorème de dérivation des fonctions de fonction, on vérifie de suite que $F(x(x'))$ en est une primitive sur I' . La conclusion est alors immédiate à partir du théorème réglant la variation des fonctions réelles et strictement croissantes (resp. décroissantes).

Passons au cas $f \in \mathcal{C}_0(]a, b]) \cap L^1(]a, b])$. On sait que

$$f = (\Re f)_+ - (\Re f)_- + i(\Im f)_+ - i(\Im f)_-$$

présente f sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions positives, continues et intégrables sur $]a, b]$. On peut donc appliquer le résultat acquis à chacune de ces fonctions, ce qui suffit, comme on le vérifie de suite.

La condition est suffisante. De fait, $f(x(x')) \cdot D_{x'}x(x')$ est une fonction continue sur I' . Si, de plus, elle est intégrable sur I' , on peut lui appliquer le résultat obtenu dans la preuve de la nécessité de la condition et obtenir que

$$[f(x(x')) D_{x'}x(x')]_{x'(x)} D_x x'(x) = f(x)$$

est intégrable sur I .

D'où la conclusion.

Cas général. (Résultat admis n. 10)■

Exercice. Etant donné $a > 0$, pour toute fonction intégrable et

- 1) antisymétrique f sur $] - a, a[$, on a $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$,
- 2) symétrique f sur $] - a, a[$, on a $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Suggestion. 1) D'une part, f est bien sûr intégrable sur $] - a, 0[$ et sur $]0, a[$ et

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

D'autre part, $x(x') = -x'$ est un changement de variable régulier d'ordre infini entre $] - a, 0[$ et $]0, a[$: dès lors, $-f(-x')$ est intégrable sur $]0, a[$ et

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-x) dx = - \int_0^a f(x) dx.$$

D'où la conclusion.

2) se traite de même. \square

Exercice. Etant donné $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, calculer

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

au moyen du changement de variable $x = a \cos^2(t) + b \sin^2(t)$.

Suggestion. D'une part, nous avons déjà vérifié que l'intégrand est une fonction intégrable sur $]a, b[$. D'autre part, la fonction réelle $x(t) = a \cos^2(t) + b \sin^2(t)$ appartient à $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ et est telle que

$$D_t x(t) = (b-a) \sin(2t) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Dès lors, $D_t x(t)$ est une fonction positive sur $]0, \pi/2[$ et $x(t)$ est par conséquent un changement de variable régulier d'ordre infini entre $]a, b[$ et $]0, \pi/2[$. Au total, il vient

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(b-a) \sin(2t)}{\sqrt{(b-a)^2 \sin^2(t) \cos^2(t)}} dt = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi. \square$$

Remarque. Le théorème d'intégration par changement de variable est aussi un critère d'intégrabilité. Dans l'exercice précédent, on pouvait donc également procéder de la manière suivante: établir d'abord que $x(t)$ est un changement de variable régulier d'ordre infini entre $]a, b[$ et $]0, \pi/2[$ puis remarquer que la fonction $f(x(t)) D_t x(t) = 2\chi_{]0, \pi/2[}$ est intégrable sur \mathbb{R} . On obtient alors d'une part l'intégrabilité de $f(x)$ sur $]a, b[$ et d'autre part la valeur de son intégrale.

Exercice. Etablir que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} \ln(ab).$$

Suggestion. On vérifie de suite que l'intégrand est continu et intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour calculer l'intégrale proposée, effectuons tout d'abord le changement de variable linéaire $x = by$. On obtient de suite

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ab) + \ln(y)}{y^2 + 1} dy.$$

La fonction $\ln(y)/(1 + y^2)$ étant intégrable sur $]0, +\infty[$ (nous l'avons déjà établi), il s'ensuit par linéarité que $\ln(ab)/(1 + y^2)$ est aussi intégrable sur $]0, +\infty[$ (on peut aussi le vérifier directement). Au total, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\ln(ab)}{b} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} + \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{y^2 + 1} dy.$$

La première intégrale du second membre se calcule aisément par variation de la primitive: elle vaut $(\pi \ln(ab))/(2b)$. La seconde intégrale vaut 0: en effet, $y = 1/t$ est un changement de variable régulier d'ordre infini entre $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$, qui donne aussitôt

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{y^2 + 1} dy = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln(t)}{1 + 1/t^2} \cdot \frac{-1}{t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt. \square$$

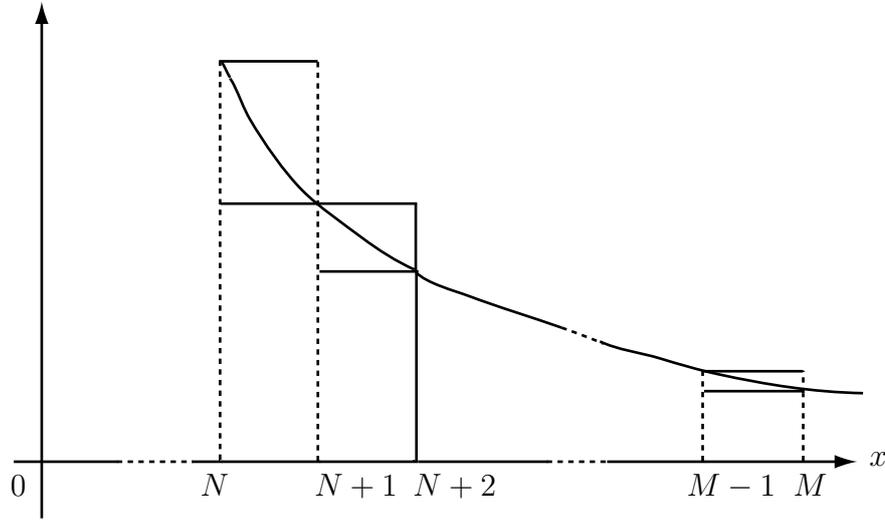
3.5 Séries numériques absolument convergentes

Voici une caractérisation des séries numériques $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ absolument convergentes pour autant que la suite $|c_m|$ décroisse vers 0. * \rightarrow Etant donné une suite c_m de \mathbb{C} telle que $|c_m| \downarrow 0$, il est en effet toujours possible de trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_0([1, +\infty[)$ telle que $f(m) = c_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $|f(x)| \downarrow 0$ si $x \rightarrow +\infty$. Il suffit de poser

$$f(x) = (|c_m| + (|c_{m+1}| - |c_m|)(x - m)) e^{i(\arg(c_m) + (\arg(c_{m+1}) - \arg(c_m))(x - m))}$$

sur $[m, m + 1]$ quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$. \leftarrow *

Critère 3.5.1 (convergence absolue de séries) Si on a $N \in \mathbb{N}_0$ et si la fonction f est définie et mesurable sur $[N, +\infty[$ et telle que $|f(x)| \downarrow 0$ sur $[N, +\infty[$, alors la série numérique $\sum_{m=N}^{\infty} f(m)$ converge absolument si et seulement si f est intégrable en $+\infty$.



Preuve. Pour tout entier $M' \geq N$, on a bien sûr

$$|f(M' + 1)| \leq |f(x)| \leq |f(M')|, \quad \forall x \in]M', M' + 1],$$

donc en intégrant sur $]M', M' + 1]$,

$$|f(M' + 1)| \leq \int_{M'}^{M'+1} |f(x)| dx \leq |f(M')|.$$

Par conséquent, pour tout entier $M > N$, il vient

$$\sum_{m=N+1}^M |f(m)| \leq \int_N^M |f(x)| dx \leq \sum_{m=N}^{M-1} |f(m)|.$$

La condition est nécessaire. De fait, $|f(x)|$ est une fonction mesurable, positive pp, intégrable sur $[N, M]$ pour tout entier $M \geq N$ et la suite $\int_N^M |f(x)| dx$ converge car elle est croissante et majorée par $\sum_{m=N}^{\infty} |f(m)|$.

La condition est suffisante. De fait, $\sum_{m=M}^{\infty} |f(m)|$ est une série numérique à termes positifs dont toutes les sommes partielles sont majorées par $\int_N^{+\infty} |f(x)| dx$. ■

Exemple. Si $c \in \mathbb{C}$ vérifie $|c| < 1$, la série géométrique $\sum_{m=0}^{+\infty} c^m$ converge absolument. De fait, la fonction $|c|^x$ appartient à $\mathcal{C}_{\infty}(]0, +\infty[)$, décroît strictement vers 0 si $x \rightarrow +\infty$ et est intégrable en $+\infty$ car une de ses primitives, à savoir, $|c|^x / \ln(|c|)$ admet une limite finie en $+\infty$. □

Exemple. Pour $\alpha > 0$, la série de Riemann $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^{\alpha}$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$. De fait, la fonction $x^{-\alpha}$ appartient à $\mathcal{C}_{\infty}(]1, +\infty[)$, décroît strictement vers 0 si $x \rightarrow +\infty$ et est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. □

Exercice. *Etablir que la série*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \ln(m)} \quad \left(\text{resp. } \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \ln^2(m)} \right)$$

diverge (resp. converge).

Suggestion. De fait, la fonction $1/(x \ln(x))$ (resp. $1/(x \ln^2(x))$) appartient à $\mathcal{C}_{\infty}(]1, +\infty[)$, décroît strictement vers 0 si $x \rightarrow +\infty$ et n'est pas intégrable (resp. et est intégrable) en $+\infty$ comme nous l'avons vu auparavant. \square

Chapitre 4

Intégration sur une partie de \mathbb{R}^n

4.1 Réduction d'une intégrale

4.1.1 Calcul d'une intégrale par réduction

Etant donné une partie mesurable A de \mathbb{R}^n avec $n > 1$ et une fonction intégrable f sur A , le théorème de Fubini permet de calculer $\int_A f dx$ au moyen d'intégrales sur des parties mesurables de $\mathbb{R}^{n'}$ avec $n' < n$ et même sur des parties mesurables de \mathbb{R} . Soient en effet $n', n'' \in \mathbb{N}_0$ tels que $n' + n'' = n$ et soit

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \nu_1 & \dots & \nu_n \end{pmatrix}$$

une permutation. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, posons

$$x' = (x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_{n'}}) \text{ et } x'' = (x_{\nu_{n'+1}}, \dots, x_{\nu_n}).$$

Nous savons alors par le théorème de Fubini que

- $f(x', x'') \chi_A(x', x'')$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ pour presque tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$,
- $\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x'') \chi_A(x', x'') dx'$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$,
- $\int_A f dx = \int_{\mathbb{R}^{n''}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x'') \chi_A(x', x'') dx' \right) dx''$.

Définitions. Utilisons les notations introduites ci-dessus.

- La *projection de A sur $\mathbb{R}^{n''}$* est l'ensemble

$$A_{x''} = \left\{ x'' \in \mathbb{R}^{n''} : \exists x' \in \mathbb{R}^{n'} \text{ tel que } (x', x'') \in A \right\}.$$

- Etant donné $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, la *section de A en x''* est l'ensemble

$$A_{x'}(x'') = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{n'} : (x', x'') \in A \right\}.$$

Ces définitions conduisent à l'analyse suivante du théorème de Fubini.

Fixons un point x''_0 de $\mathbb{R}^{n''}$. Remarquons que x''_0 appartient à la projection de A sur $\mathbb{R}^{n''}$ si et seulement si la section de A en x''_0 n'est pas vide. De plus, la fonction $\chi_A(x', x''_0)$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{n'}$, qui ne prend que les valeurs 0 ou 1. C'est donc la fonction caractéristique d'une partie de $\mathbb{R}^{n'}$ et on a tôt fait de vérifier qu'il s'agit de la fonction caractéristique de $A_{x'}(x''_0)$. Dès lors, il vient

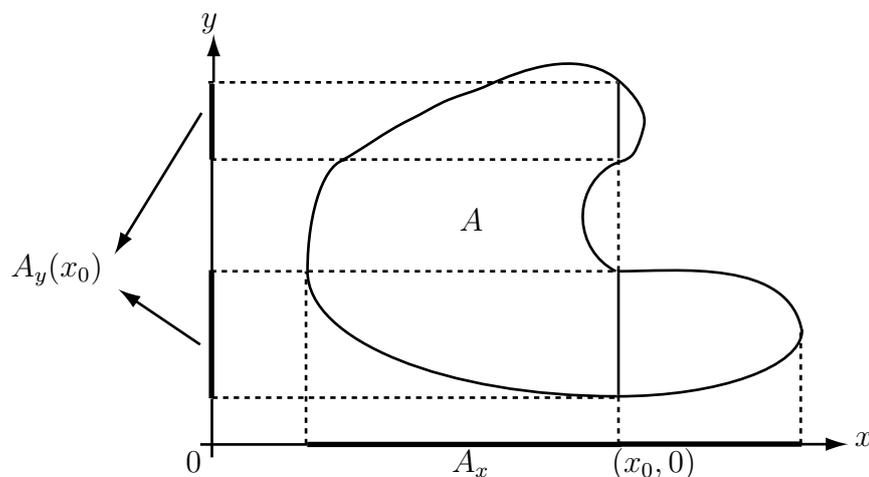
$$\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x''_0) \chi_A(x', x''_0) dx' = \int_{A_{x'}(x''_0)} f(x', x''_0) dx'$$

pour presque tout $x''_0 \in \mathbb{R}^{n''}$.

Comme $A_{x'}(x'')$ est égal à \emptyset si et seulement si x'' n'appartient pas à $A_{x''}$, on obtient de suite

$$\int_A f dx = \int_{A_{x''}} \left(\int_{A_{x'}(x'')} f(x', x'') dx' \right) dx''$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On dit qu'on a réduit $\int_A f dx$.



Remarque. Si on a $n' > 1$ ou $n'' > 1$, on peut appliquer la construction précédente à l'intégrale correspondante jusqu'à ne plus avoir que des intégrales sur des parties de \mathbb{R} . Ceci montre l'intérêt de cette construction: on essaye de se ramener à des intégrales sur des intervalles de \mathbb{R} , c'est-à-dire à des intégrales que nous avons appris à calculer. Si on a $n = 2$ et $n' = n'' = 1$, la démarche est particulièrement claire.

4.1.2 Intégrabilité par réduction

Soit f une fonction définie pp sur une partie mesurable E de \mathbb{R}^n et soit A une partie mesurable de \mathbb{R}^n telle que $A \subset E$.

Supposons la fonction $f \chi_A$ mesurable et déterminons, au moyen du théorème de Tonelli, si elle est intégrable.

Pour cela, on doit vérifier que

a) $|f(x', x'')| \chi_A(x', x'')$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ pour presque tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$. Or, pour $x''_0 \in \mathbb{R}^{n''}$ fixé, cette fonction est égale pp à $|f(x', x''_0)| \chi_{A_{x', (x''_0)}}(x')$. De plus, pour $x''_0 \notin A_{x''}$, $|f(x', x''_0)| \chi_{A_{x', (x''_0)}}(x')$ est égal à 0. Au total, il suffit de vérifier que, pour presque tout $x'' \in A_{x''}$, $|f(x', x'')|$ est intégrable sur $A_{x', (x'')}$.

b) $\int_{\mathbb{R}^{n'}} |f(x', x'')| \chi_A(x', x'') dx'$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$. Vu ce qui précède, cette fonction est égale pp à

$$\int_{A_{x', (x'')}} |f(x', x'')| dx'$$

et il suffit donc de vérifier que cette fonction est intégrable sur $A_{x''}$.

Remarque. Dans la vérification de l'intégrabilité de f sur $A \subset \mathbb{R}^n$ au moyen du théorème de Tonelli, il convient de bien remarquer que les intégrales successives portent sur des fonctions positives, ce qui permet d'appliquer un maximum de critères d'intégrabilité.

4.2 Interprétation de l'intégrale d'une fonction réelle

Proposition 4.2.1 (Interprétation) *Soit f une fonction réelle et intégrable sur l'ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors les parties*

$$A_+ = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, 0 \leq t \leq f_+(x) \}$$

et

$$A_- = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, -f_-(x) \leq t \leq 0 \}$$

de \mathbb{R}^{n+1} sont intégrables et on a

$$\int_A f dx = \text{mes}(A_+) - \text{mes}(A_-).$$

Preuve. Prouvons que χ_{A_+} et χ_{A_-} sont des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^{n+1} . De fait, χ_{A_+} est une fonction positive, la projection de A_+ sur \mathbb{R}^n est évidemment égale à A et, pour presque tout $x \in A$, la section de A_+ en x est égale à $[0, f_+(x)]$, donc est intégrable. Par conséquent, pour presque tout $x \in A$, il vient

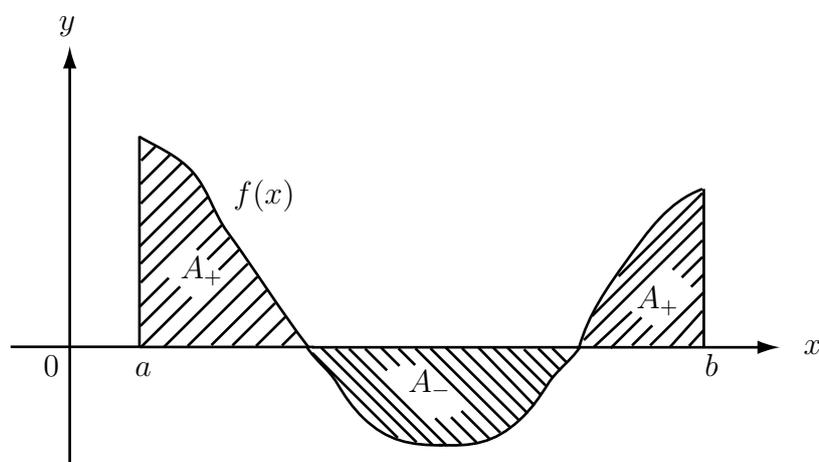
$$\int_{A_{+, t(x)}} \chi_{A_+}(x, t) dt = f_+(x).$$

Dès lors, A_+ est une partie intégrable de \mathbb{R}^{n+1} car f_+ est intégrable sur A . De même, on prouve que A_- est une partie intégrable de \mathbb{R}^{n+1} .

D'où la conclusion car on a évidemment

$$\text{mes}(A_+) - \text{mes}(A_-) = \int_A (f_+(x) - f_-(x)) dx = \int_A f dx. \blacksquare$$

Remarque. Le cas où f est une fonction réelle et intégrable sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est particulièrement suggestif.



4.3 Exemples de réduction d'une intégrale

Une difficulté inhérente à la réduction de l'intégrale $\int_A f dx$ afin d'en vérifier le sens ou de la calculer, consiste à déterminer les ensembles $A_{x''}$ et $A_{x'}(x'')$ pour presque tout $x'' \in A_{x''}$.

Une première méthode, appelée *méthode analytique*, est valable pour tout entier $n \geq 2$. Elle consiste à déterminer $A_{x''}$ et $A_{x'}(x'')$ à partir des inégalités qui définissent A .

Une deuxième méthode, appelée *méthode géométrique*, est valable pour $n = 2$ et dans une certaine mesure pour $n = 3$. Elle consiste à représenter géométriquement A et à en déduire sa projection sur $\mathbb{R}^{n''}$ et ses sections en $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$.

Nous allons illustrer ces méthodes par quelques exemples.

4.3.1 Exemples dans \mathbb{R}^2

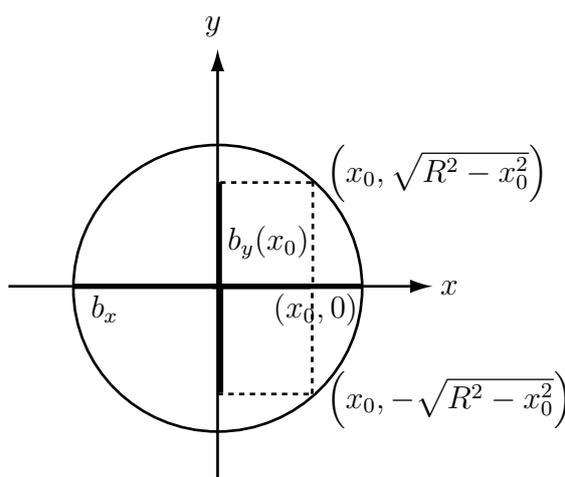
Exemple. Calculer la mesure de la boule $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \mathbb{R}^2\}$.

Cette boule b est compacte donc intégrable.

a) *Méthode géométrique.* On commence par représenter la boule b dans le plan.

On choisit l'ordre d'intégration qui convient le mieux (dans le cas que nous étudions, cet ordre n'a pas d'importance). On lit alors les renseignements sur le dessin. Ici on a évidemment

$$b_x = [-R, R] \text{ et } b_y(x) = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}], \quad \forall x \in b_x.$$



b) *Méthode analytique.* Déterminons tout d'abord

$$b_x = \{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq R^2 \}.$$

Comme on a $y^2 \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on obtient de suite $b_x = [-R, R]$. Cela étant, pour tout $x \in b_x$, il vient

$$b_y(x) = \{ y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq R^2 \} = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}].$$

Dans les deux cas, il vient

$$\begin{aligned} \text{mes}(b) &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2(\varphi) d\varphi = R^2 \left[\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi R^2; \end{aligned}$$

en (*), nous avons effectué le changement de variable $x = R \sin(\varphi)$ régulier d'ordre infini entre $] -R, R[$ et $] -\pi/2, \pi/2[$. \square

Remarque. On pouvait aussi ne pas vérifier directement que b est intégrable et l'obtenir en appliquant le théorème de Tonelli.

Exemple. Etablir que $\iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-y(1+x^2)} dx dy$ a un sens et calculer sa valeur.

L'intégrand $e^{-y(1+x^2)}$ est une fonction continue et positive sur l'ouvert non borné $A =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ de \mathbb{R}^2 .

Recourons au critère de Tonelli pour vérifier que l'intégrale proposée a un sens (c'est d'ailleurs le seul critère vu jusqu'à présent que nous pouvons appliquer). On vérifie aisément, par voie géométrique ou par voie analytique, qu'on a successivement $A_x =]0, +\infty[$ et $A_y(x) =]0, +\infty[$ pour tout $x \in A_x$.

Cela étant, pour tout $x \in A_x$, $e^{-y(x^2+1)}$ est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est continue et positive sur cet intervalle et une de ses primitives, à savoir $-e^{-y(1+x^2)}/(1+x^2)$ admet des limites finies en $+\infty$ et en 0^+ . On a même

$$\int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy = \left[-\frac{e^{-y(1+x^2)}}{1+x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, on vérifie de suite que $1/(1+x^2)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on obtient même que l'intégrale proposée vaut

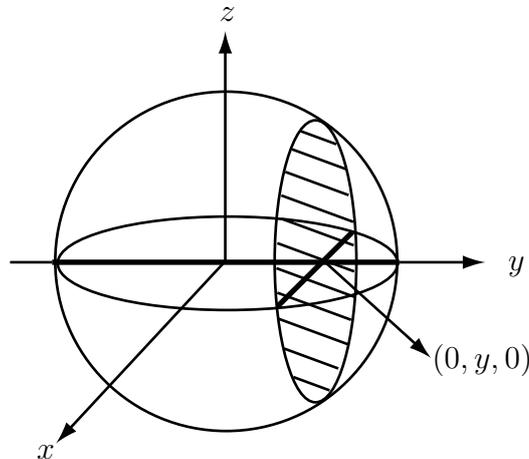
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x)|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \square$$

4.3.2 Exemple dans \mathbb{R}^3

Exemple. Calculer la mesure de $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Cette boule b est compacte donc intégrable.

a) *Méthode géométrique.* (Dans \mathbb{R}^3 , cette méthode est valable pour les ensembles simples.) La projection de b sur l'axe des y est bien sûr égale à $[-R, R]$. De plus, pour $y_0 \in [-R, R]$ fixé, il est clair que la section de b par le plan d'équation $y = y_0$ est égale à $\{(x, z) : x^2 + y_0^2 + z^2 \leq R^2\}$.



b) *Méthode analytique.* On a

$$b_y = \{ y : \exists x, z \in \mathbb{R} \text{ tels que } y^2 \leq R^2 - x^2 - z^2 \}.$$

Comme on a $x^2 \geq 0$ et $z^2 \geq 0$ pour tous $x, z \in \mathbb{R}$, il vient de suite $b_y = [-R, R]$. Pour $y_0 \in b_y$ fixé, on a

$$b_{(x,z)}(y_0) = \{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq R^2 - y_0^2 \}.$$

Dès lors, $b_{(x,z)}(y_0)$ est la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon $(R^2 - y_0^2)^{1/2}$ dans \mathbb{R}^2 pour tout $y_0 \in]-R_0, R_0[$ donc pour presque tout $y_0 \in [-R_0, R_0]$.

Cela étant, il vient

$$\text{mes}(b) = \int_{-R}^R \left(\int_{b_{(x,z)}(y)} dx dz \right) dy = \int_{-R}^R \pi(R^2 - y^2) dy = \frac{4}{3}\pi R^3. \square$$

Remarques. a) Il convient de noter que la difficulté de la réduction dépend bien sûr de l'ensemble A considéré, mais aussi de l'ordre des variables choisi.

b) La voie la plus directe est bien souvent un mélange des méthodes géométrique et analytique.

4.4 Permutation de l'ordre d'intégration

Bien souvent, en pratique, on est amené à calculer une intégrale déjà mise sous une forme réduite à laquelle les méthodes de calcul vues auparavant ne s'appliquent pas. On peut alors effectuer une *permutation de l'ordre d'intégration*, c'est-à-dire exprimer l'intégrale considérée sous une autre forme réduite.

Proposition 4.4.1 (intégration par parties, généralisation) Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} et x_0 est un point de $]a, b[$.

Si on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(x) dx$$

pour tout $x \in]a, b[$, alors il vient

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

Preuve. Comme $f(t)g(x)$ est une fonction intégrable sur $]a, b[\times]a, b[$ et comme $F(x_0) = 0$, il vient successivement

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)g(x) dx &= - \int_a^{x_0} \left(\int_x^{x_0} f(t) dt \right) g(x) dx + \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x f(t) dt \right) g(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} - \int_a^{x_0} f(t) \left(\int_a^t g(x) dx \right) dt + \int_{x_0}^b f(t) \left(\int_t^b g(x) dx \right) dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t) (G(a) - G(t)) dt + \int_{x_0}^b f(t) (G(b) - G(t)) dt \\ &= -F(a)G(a) - \left(\int_a^{x_0} + \int_{x_0}^b \right) f(t)G(t) dt + F(b)G(b) \end{aligned}$$

(en (*), on a permuté l'ordre des intégrations). ■

Exercice. Etablir que, pour tout $x > 0$, la fonction e^{-y}/y est intégrable sur $]x, +\infty[$ et que la fonction $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y}/y dy$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Obtenir la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) dx.$$

Suggestion. La fonction e^{-y}/y est continue sur $]0, +\infty[$ (donc admet une limite finie en tout $x > 0$) et on a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 \frac{e^{-y}}{y} = 0.$$

Au total, pour tout $x > 0$, on a $e^{-y}/y \in L^1(]x, +\infty[)$.

Pour obtenir l'intégrabilité de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$, on peut démontrer qu'il s'agit d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ à laquelle les critères d'intégrabilité en θ et Θ s'appliquent mais cela est fort long. La méthode suivante est bien plus courte et plus élégante.

La fonction e^{-y}/y est continue et positive sur $A = \{(x, y) : 0 < x \leq y\}$. Pour tout $y > 0$, e^{-y}/y est intégrable par rapport à x sur $]0, y]$ (c'est même une fonction étagée) et on a

$$\int_0^y \frac{e^{-y}}{y} dx = e^{-y}.$$

De plus, e^{-y} est intégrable (par rapport à y) sur $]0, +\infty[$, comme on le vérifie directement. Dès lors, par le théorème de Tonelli, e^{-y}/y est intégrable sur A . Vu le théorème de Fubini, en effectuant la réduction dans l'autre ordre,

a) pour presque tout $x \in]0, +\infty[$, e^{-y}/y est intégrable sur $]x, +\infty[$ (mais nous l'avons déjà établi),

b) $\int_x^{+\infty} e^{-y}/y dy$ est intégrable sur $]0, +\infty[$,

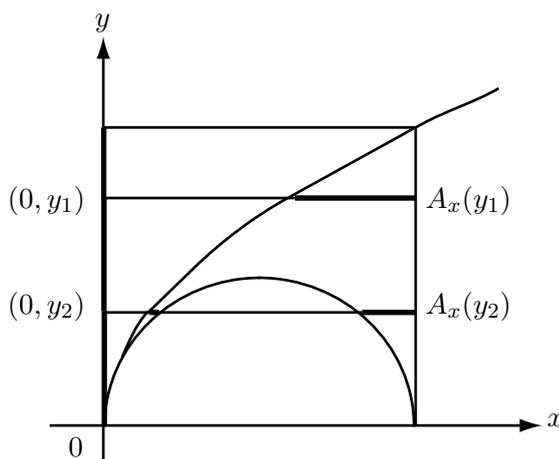
c) l'intégrale proposée est égale à $\int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1$. □

Exercice. Si on a $R > 0$, permuter l'ordre d'intégration dans

$$\int_0^{2R} dx \int_{\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx}} f(x, y) dy.$$

Suggestion. a) *Méthode géométrique.* On a en fait réduit l'intégrale de f sur $A \subset \mathbb{R}^2$, où la projection de A sur l'axe des x est égale à $]0, 2R[$ et où, pour tout $x \in]0, 2R[$, la section de A en x est égale à $]\sqrt{2Rx-x^2}, \sqrt{2Rx}[$. Or $\{(x, \sqrt{2Rx-x^2}) : x \in]0, 2R[\}$ est une partie de la circonférence d'équation $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, c'est-à-dire de la circonférence de centre $(R, 0)$ et de rayon R . De même, $\{(x, \sqrt{2Rx}) : x \in]0, 2R[\}$ est une partie de la parabole d'équation $2Rx = y^2$.

De la représentation graphique de A qui s'ensuit, on déduit directement que A_y est égal à $]0, 2R[$ et que $A_x(y)$ est égal à l'union de $]y^2/(2R), R - \sqrt{R^2 - y^2}[$ et de $]R + \sqrt{R^2 - y^2}, 2R[$ si on a $0 < y < R$ et à $]y^2/(2R), 2R[$ si on a $R \leq y < 2R$.



b) *Méthode analytique.* Bien sûr, on peut écrire

$$A_y = \bigcup_{0 \leq x \leq 2R} [\sqrt{2Rx-x^2}, \sqrt{2Rx}].$$

Une étude simple des fonctions $\sqrt{2Rx-x^2}$ et $\sqrt{2Rx}$ procure alors $A_y = [0, 2R]$. Déterminons $A_x(y)$. En fait, $y \in]0, 2R[$ étant fixé, nous devons résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} 0 < x < 2R \\ \sqrt{2Rx-x^2} < y < \sqrt{2Rx} \end{cases}$$

par rapport à x . Or, vu la règle régissant le signe d'un trinôme du second degré, l'inégalité $x^2 - 2Rx + y^2 > 0$ a lieu pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $R < y < 2R$ et pour tout $x \in]-\infty, R - \sqrt{R^2 - y^2}[\cup]R + \sqrt{R^2 - y^2}, +\infty[$ si $0 < y < R$. Cela étant, d'une part, pour $y \in]0, R[$ fixé,

nous devons résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} 0 < x < 2R \\ x < R - \sqrt{R^2 - y^2} \text{ ou } x > R + \sqrt{R^2 - y^2} \\ \frac{y^2}{2R} < x; \end{cases}$$

on trouve donc

$$A_x(y) =]y^2/(2R), R - \sqrt{R^2 - y^2}[\cup]R + \sqrt{R^2 - y^2}, 2R[\text{ pour } 0 < y < R.$$

D'autre part, pour $y \in]R, 2R[$ fixé, nous devons résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} 0 < x < 2R \\ \frac{y^2}{2R} < x; \end{cases}$$

on trouve donc

$$A_x(y) =]y^2/(2R), 2R[\text{ pour } R < y < 2R.$$

Au total, l'intégrale proposée devient

$$\begin{aligned} & \int_0^R dy \int_{y^2/(2R)}^{R - \sqrt{R^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_0^R dy \int_{R + \sqrt{R^2 - y^2}}^{2R} f(x, y) dx \\ & + \int_R^{2R} dy \int_{y^2/(2R)}^{2R} f(x, y) dx. \square \end{aligned}$$

Remarque. Dans le calcul de $\int_A f dx$ par réduction ou par permutation de l'ordre d'intégration, il est essentiel que f soit intégrable sur A et pas seulement que f soit intégrable sur $A_y(x)$ pour presque tout $x \in A_x$ et que $\int_{A_y(x)} f dy$ soit intégrable sur A_x (sauf si f est une fonction positive, auquel cas f est intégrable sur A , par application du théorème de Tonelli).

Voici un exemple probant. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a évidemment

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = D_x \frac{-x}{x^2 + y^2} = D_y \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On vérifie de suite que, pour tout $y \in]0, 1[$, la fonction $f(x, y)$ est intégrable (par rapport à x) sur $]0, 1[$; on a donc

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

Comme la fonction $-1/(1 + y^2)$ est intégrable sur $]0, 1[$, on obtient

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4}. \quad (*)$$

De même, on vérifie de suite que, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x, y)$ est intégrable (par rapport à y) sur $]0, 1[$; on a donc

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Comme $1/(1 + x^2)$ est intégrable sur $]0, 1[$, il vient

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}. \quad (**)$$

Il n'y a pas d'erreur dans ce qui précède. Ce qui se passe, c'est que $f(x, y)$ n'est pas intégrable sur $A =]0, 1[\times]0, 1[$ et que, par conséquent, on ne peut pas réduire $\iint_A f dx dy$. En effet, si f est intégrable sur A , $|f|$ l'est également et on peut réduire $\iint_A |f| dx dy$. Or, pour tout $x \in]0, 1[$, on justifie de suite les calculs suivants:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x, y)| dy &= \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \int_x^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \\ &= \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^x - \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_x^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

mais ce résultat n'est pas une fonction intégrable sur $]0, 1[$.

4.5 Changement de variable

Théorème 4.5.1 (changement de variable) *Si $x(x')$ est un changement de variable régulier d'ordre $p \geq 1$ entre les ouverts Ω et Ω' de \mathbb{R}^n , alors on a*

$$f(x) \in L^1(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad f(x(x')) \left| \det \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| \in L^1(\Omega')$$

auquel cas

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega'} f(x(x')) \left| \det \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| dx'.$$

(Résultat admis n. 10bis, cas \mathbb{R}^n) ■

Remarque. Si n est égal à 1, on obtient comme cas particulier le théorème correspondant du paragraphe 3.4.2. Reprenons les notations de ce résultat. Seuls les deux cas suivants peuvent se présenter:

a) on a $D_x x'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. La fonction $x'(x)$ est donc strictement croissante. Par conséquent, il vient $I' =]a', b'[$ et

$$\int_{I'} f(x(x')) |D_{x'} x(x')| dx' = \int_{a'}^{b'} f(x(x')) D_{x'} x(x') dx'.$$

b) on a $D_x x'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$. La fonction $x'(x)$ est donc strictement décroissante. Par conséquent, il vient $I' =]b', a'[$ et

$$\int_{I'} f(x(x')) |D_{x'} x(x')| dx' = - \int_{b'}^{a'} f(x(x')) D_{x'} x(x') dx'.$$

D'où la conclusion. \square

Donnons quelques exemples d'application de ce résultat.

4.5.1 Changement de variable linéaire

Si A est une matrice réelle et non singulière de dimension $n \times n$ et si a est un point de \mathbb{R}^n , nous savons que $x = Ax' + a$ est un changement de variable régulier d'ordre infini entre \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^n . Par conséquent, il vient

$$f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow |\det(A)| f(Ax' + a) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

auquel cas

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = |\det(A)| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax' + a) dx'.$$

Il s'ensuit que, pour toute partie intégrable E de \mathbb{R}^n , l'ensemble $AE + a = \{Ax + a : x \in E\}$ est intégrable et

$$\begin{aligned} \text{mes}(AE + a) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{AE+a}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{AE+a}(Ax' + a) |\det(A)| dx' \\ &= |\det(A)| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x') dx' = |\det(A)| \text{mes}(E). \end{aligned}$$

En particulier,

- a) dans \mathbb{R}^n , les translations préservent l'intégrabilité et la mesure des ensembles,
- b) dans \mathbb{R}^n , les rotations préservent l'intégrabilité et la mesure des ensembles.

4.5.2 Passage aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2

Le passage aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2 est donné par le changement de variable

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

régulier d'ordre infini entre

$$\Omega_a = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (r \cos(a), r \sin(a)) : r \geq 0 \} \quad \text{et} \quad \Omega'_a =]0, +\infty[\times]a, a + 2\pi[,$$

a étant un nombre réel quelconque. Comme une demi-droite est une partie négligeable de \mathbb{R}^2 , Ω_a est égal pp à \mathbb{R}^2 et le théorème de changement de variable prend la forme spécifique suivante: *on a*

$$f(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in L^1(]0, +\infty[\times]a, a + 2\pi[)$$

auquel cas

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dr \int_a^{a+2\pi} r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta.$$

En effet, le module du jacobien est donné par

$$\left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r.$$

4.5.3 Passage aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^3

Le passage aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^3 est donné par le changement de variable

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

régulier d'ordre infini entre

$$\Omega_a = \mathbb{R}^3 \setminus \{ (r \cos(a), r \sin(a), z) : r \geq 0, z \in \mathbb{R} \}$$

et

$$\Omega'_a =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]a, a + 2\pi[,$$

a étant un nombre réel quelconque. Comme un demi-plan est une partie négligeable de \mathbb{R}^3 , Ω_a est égal pp à \mathbb{R}^3 et le théorème de changement de variable prend la forme spécifique suivante:

$$f(x, y, z) \in L^1(\mathbb{R}^3)$$

\Downarrow

$$r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) \in L^1(\Omega'_a)$$

auquel cas

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \\ \int_0^{+\infty} dr \int_0^\pi d\theta \int_a^{a+2\pi} r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) d\varphi. \end{aligned}$$

4.5.4 Exemples dans \mathbb{R}^2

Exemple. Calculer la mesure du disque $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ en passant aux coordonnées polaires.

Prenons, par exemple, $a = 0$ (c'est la position choisie le plus souvent). Le disque est alors égal pp à

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

et on voit de suite qu'en passant aux coordonnées polaires, cet ensemble devient $]0, R[\times]0, 2\pi[$. La mesure du disque est par conséquent égale à

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\theta = \pi R^2.$$

Pour justifier ces calculs, on peut soit, a priori, dire que le disque est compact donc intégrable, soit remarquer que r est une fonction positive sur $]0, R[\times]0, 2\pi[$, qui vérifie les conditions du théorème de Tonelli. \square

Exemple. Pour tous $a, b > 0$, calculer la mesure de l'ellipse

$$E = \{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}.$$

Par le changement de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

cette ellipse devient $E' = \{(x', y') : x'^2 + y'^2 \leq 1\}$, c'est-à-dire le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. De là, E' est intégrable et nous obtenons

$$\text{mes}(E) = \iint_{x'^2 + y'^2 \leq 1} ab dx' dy' = \pi ab. \square$$

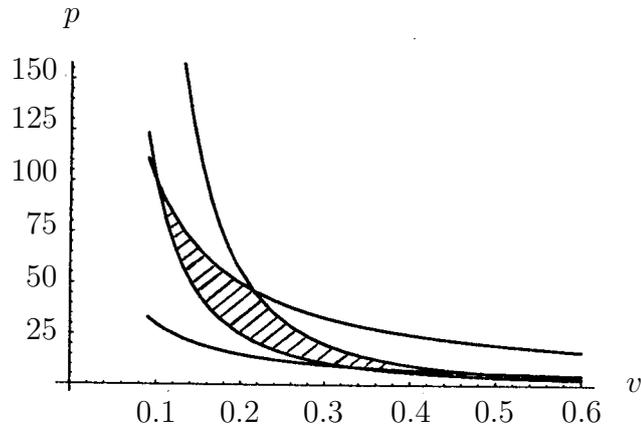
Remarque. On peut aussi considérer le changement de variable

$$\begin{cases} x = (r/a) \cos(\theta) \\ y = (r/b) \sin(\theta) \end{cases}$$

qui combine le changement de variable linéaire et le passage aux coordonnées polaires. \square

Exemple. Si on a $\gamma > 1$, $0 < c_1 < c_2$ et $0 < C_1 < C_2$, calculer la mesure de

$$A = \{(v, p) : c_1 \leq pv \leq c_2, C_1 \leq pv^\gamma \leq C_2\}.$$



On vérifie d'abord que

$$\begin{cases} pv = x \\ pv^\gamma = y \end{cases}$$

est un changement de variable régulier d'ordre infini entre $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et lui-même, qui s'inverse en

$$\begin{cases} v = (y/x)^{1/(\gamma-1)} \\ p = x^{\gamma/(\gamma-1)} y^{-1/(\gamma-1)} \end{cases}$$

et qui transforme A en $[c_1, c_2] \times [C_1, C_2]$. De plus, on a

$$\left| \det \left(\frac{\partial(p, v)}{\partial(x, y)} \right) \right| = \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(p, v)} \right)_{(p(x,y), v(x,y))} \right|^{-1} = \frac{1}{(\gamma-1)y}$$

et

$$\int_{c_1}^{c_2} dx \int_{C_1}^{C_2} \frac{dy}{(\gamma-1)y} = \frac{c_2 - c_1}{\gamma-1} \ln(C_2/C_1),$$

ce qui permet d'affirmer que A est intégrable et que sa mesure est égale à ce nombre. \square

Théorème 4.5.2 (Poisson) *Pour tout $a > 0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Preuve. On vérifie de suite que e^{-ax^2} est une fonction continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$. De là, au moyen du théorème de Tonelli, on déduit que la fonction $e^{-ax^2} e^{-ay^2} = e^{-a(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Pour calculer son intégrale, on peut passer aux coordonnées polaires; il vient successivement

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \iint_{]0, +\infty[\times]0, +\infty[} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} r e^{-ar^2} d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-ar^2}}{2a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

4.5.5 Exemples dans \mathbb{R}^3

Exemple. *Calculer la mesure de la boule*

$$b = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}.$$

Passons aux coordonnées polaires en prenant $a = 0$ (c'est la position choisie le plus souvent). La boule b est égale pp à

$$\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \} \setminus \{ (x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R} \}$$

et on vérifie de suite qu'en passant aux coordonnées polaires, cet ensemble se transforme en $]0, R[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. La mesure de la boule est donc égale à

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(Justification: b est un compact ou appliquer le théorème de Tonelli.) □

Exemple. *Pour $a, b, c > 0$, calculer la mesure de l'ellipsoïde*

$$E = \{ (x, y, z) : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1 \}.$$

Le changement de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

transforme E en la boule $\{ (x', y', z') : x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1 \}$. Il s'ensuit que E est intégrable et que

$$\text{mes}(E) = \frac{4}{3}\pi abc. \square$$

Exercice. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\{(x,y):0 < x, x^2 < y\}} e^{-\frac{x^4+y^2}{x^2}} dx dy$$

au moyen du changement de variable

$$\begin{cases} x & = & \rho \cos(\omega) \\ y & = & \rho^2 \sin(\omega) \cos(\omega). \end{cases}$$

Suggestion. Bien sûr, on a $x(\rho, \omega), y(\rho, \omega) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^2)$ mais, comme l'ensemble d'intégration est inclus dans $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on peut se contenter de considérer ces fonctions comme appartenant à $\mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[\times]0, \pi/2[)$.

Comme on a $x^4 + y^2 = \rho^4 \cos^2(\omega) = x^2 \rho^2$, il vient $\rho(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}/x$ et de $y/x^2 = \operatorname{tg}(\omega)$, on tire $\omega(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x^2)$ avec $\rho(x, y), \omega(x, y) \in \mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[\times]0, +\infty[)$. On vérifie alors directement qu'il s'agit bien d'un changement de variable régulier d'ordre infini entre les ouverts $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $I' =]0, +\infty[\times]0, \pi/2[$.

A l'ouvert d'intégration $\{(x, y) : 0 < x, x^2 < y\}$ correspond donc l'ouvert

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(\rho, \omega) \in I' : 0 < \rho \cos(\omega), \rho^2 \cos^2(\omega) < \rho^2 \sin(\omega) \cos(\omega)\} \\ &= \{(\rho, \omega) \in I' : \cos(\omega) < \sin(\omega)\} =]0, +\infty[\times \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \omega)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\rho \sin(\omega) \\ 2\rho \sin(\omega) \cos(\omega) & \rho^2(\cos^2(\omega) - \sin^2(\omega)) \end{pmatrix}$$

donc le module du jacobien est égal à $\rho^2 \cos(\omega)$.

Cela étant, l'intégrale proposée a un sens si et seulement si on a

$$\rho^2 e^{-\rho^2} \cos(\omega) \in L^1(]0, +\infty[\times]\pi/4, \pi/2[).$$

Or la fonction $\rho^2 e^{-\rho^2} \cos(\omega)$ est intégrable et à valeurs positives sur $] \pi/4, \pi/2[$ pour tout $\rho > 0$ et on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 e^{-\rho^2} \cos(\omega) d\omega = (1 - \sqrt{2}/2) \rho^2 e^{-\rho^2}.$$

Comme cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$, le théorème de Tonelli combiné au théorème de changement de variable assurent un sens à l'intégrale proposée. De plus, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_{\{(x, y) : 0 < x, x^2 < y\}} e^{-\frac{x^4 + y^2}{x^2}} dx dy &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^\infty \rho^2 e^{-\rho^2} d\rho \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^\infty \rho D e^{-\rho^2} dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

en recourant à l'intégrale de Poisson. \square

Chapitre 5

Dérivation des intégrales paramétriques

5.1 Théorème fondamental

Le résultat suivant, connu sous le nom de théorème de dérivation des intégrales paramétriques et dont la preuve sort du cadre de ce cours, a une grande importance dans les applications.

Théorème 5.1.1 *Si A est une partie mesurable de \mathbb{R}^n , si Λ est un ouvert de \mathbb{R}^l et si les conditions suivantes sont vérifiées:*

- a) *pour presque tout $x \in A$, $f_\lambda(x)$ appartient à $\mathcal{C}_1(\Lambda)$,*
- b) *pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda(x)$ appartient à $L^1(A)$,*
- c) *pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe $F_K \in L^1(A)$ tel que*

$$|D_{\lambda_k} f_\lambda(x)| \leq F_K(x) \quad \text{pp sur } A$$

pour tout $k \in \{1, \dots, l\}$ et tout $\lambda \in K$, alors $\int_A f_\lambda(x) dx$ appartient à $\mathcal{C}_1(\Lambda)$ et on a

$$D_{\lambda_k} \int_A f_\lambda dx = \int_A D_{\lambda_k} f_\lambda(x) dx$$

pour tout $k \in \{1, \dots, l\}$.

(Résultat admis n. 11)■

Exercice. *Etablir que, pour tous $a, b > 0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b/a).$$

Suggestion. Fixons $b > 0$ et établissons d'abord que l'intégrale proposée appartient à $\mathcal{C}_1(]0, +\infty[)$. De fait, on a successivement:
 $A =]0, +\infty[$ est une partie mesurable de \mathbb{R} ,
 $\Lambda =]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} ,
pour tout $x > 0$, $f_a(x) = (e^{-ax} - e^{-bx})/x$ appartient à $\mathcal{C}_\infty(\Lambda)$,
pour tout $a > 0$, $f_a(x)$ est une fonction intégrable sur A ,
pour tout compact $K \subset]0, +\infty[$, il existe $a_0 > 0$ (à savoir $a_0 = \inf \{x : x \in K\}$, par exemple) tel que $K \subset [a_0, +\infty[$, donc tel que

$$|D_a f_a(x)| = e^{-ax} \leq e^{-a_0 x} \in L^1(A), \quad \forall a \in K.$$

Dès lors, pour tout $b > 0$ fixé, l'intégrale proposée appartient à $\mathcal{C}_1(]0, +\infty[)$ et

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}.$$

Cela étant, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = -\ln(a) + C$$

et tout revient à déterminer C . Or, pour $a = b$, le premier membre est égal à 0. D'où la conclusion. \square

Exercice. *Etablir que, pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}.$$

Suggestion. Fixons $a > 0$ et vérifions les conditions de dérivabilité de cette intégrale par rapport à b sur \mathbb{R} :

$A =]0, +\infty[$ est une partie mesurable de \mathbb{R} ,

$\Lambda = \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R} ,

pour tout $x > 0$, $f_b(x) = e^{-ax^2} \cos(bx)$ appartient à $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$,

pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f_b(x)$ est une fonction intégrable sur A ,

pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a

$$|D_b f_b(x)| \leq x e^{-ax^2} \in L^1(A).$$

Dès lors, l'intégrale proposée appartient à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ et on a

$$D_b \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin(bx) dx.$$

On évalue cette dérivée en recourant à une intégration par parties: il vient

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin(bx) dx &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \sin(bx) D_x e^{-ax^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2a} \sin(bx) e^{-ax^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour $a > 0$ fixé, la fonction

$$F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx$$

appartient à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ et vérifie l'équation différentielle à second membre linéaire

$$2aD_b F(b) + bF(b) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Il existe donc $C(a) \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = C(a)e^{-b^2/(4a)}$. Pour déterminer $C(a)$, on remarque que, pour $b = 0$, l'intégrale proposée est l'intégrale de Poisson. \square

Exercice. *Etablir que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}_0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{|b|} \ln(|a| + |b|).$$

Suggestion. Il suffit bien sûr de calculer cette intégrale pour $a \geq 0$ et $b > 0$.

Pour $a = 0$, nous en avons déjà obtenu la valeur, à savoir $\frac{\pi}{b} \ln(b)$ (cf. p. 42).

Fixons $b > 0$ et vérifions les conditions de dérivabilité de cette intégrale par rapport à a sur $]0, +\infty[$:

$A =]0, +\infty[$ est une partie mesurable de \mathbb{R} ,

$\Lambda =]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} ,

pour tout $x > 0$, $f_a(x) = (\ln(a^2 + x^2))/(x^2 + b^2)$ appartient à $\mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[)$,

pour tout $a > 0$, $f_a(x)$ est une fonction intégrable sur A ,

pour tout compact K de A , il existe $a_0, a_1 > 0$ tels que $K \subset [a_0, a_1]$, donc tels que

$$|D_a f_a(x)| \leq \frac{2a_1}{(a_0^2 + x^2)(x^2 + b^2)} \in L^1(A).$$

Il s'ensuit que l'intégrale proposée appartient à $\mathcal{C}_1(]0, +\infty[)$ et que

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{x^2 + b^2} dx = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Pour $a \neq b$, il vient ensuite

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{x^2 + b^2} dx = \frac{2a}{b^2 - a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right) dx = \frac{\pi}{b(a+b)}.$$

Vu la continuité de cette dérivée sur $]0, +\infty[$, on a donc

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b(a+b)}, \quad \forall a \in]0, +\infty[.$$

Par conséquent, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln(a+b) + C(b)$$

et tout revient à déterminer $C(b)$. Cela peut se faire en appliquant le théorème de la convergence monotone à la suite $(f_{1/m})_{m \in \mathbb{N}_0}$. Il s'agit en effet d'une suite décroissante de fonctions réelles et intégrables sur $]0, +\infty[$, telle que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1/m^2)}{x^2 + b^2} dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2 + b^2} dx, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

On en déduit que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi}{b} \ln(1/m + b) + C(b) = \frac{\pi}{b} \ln(b),$$

c'est-à-dire que $C(b) = 0$. \square

Exercice. *Etablir que, pour tout $a > 0$ et tout $b \geq 0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + b/x^2)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Suggestion. Pour $b = 0$, il s'agit de l'intégrale de Poisson.

Considérons à présent que b varie dans $]0, +\infty[$.

Dans ce cas, pour tout $a > 0$,

$A =]0, +\infty[$ est une partie mesurable de \mathbb{R} ,

$\Lambda =]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} ,

pour tout $x > 0$, $f_b(x) = e^{-(ax^2 + b/x^2)}$ appartient à $\mathcal{C}_\infty(\Lambda)$,

pour tout $b > 0$, $f_b(x)$ est une fonction intégrable sur A ,

pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe $b_0, b_1 > 0$ tels que $K \subset [b_0, b_1]$, donc tels que

$$|D_b f_b(x)| \leq \frac{e^{-(ax^2 + b_0/x^2)}}{x^2} \in L^1(A).$$

Dès lors, l'intégrale proposée appartient à $\mathcal{C}_1(\Lambda)$ et on a

$$D_b \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + b/x^2)} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(ax^2 + b/x^2)}}{x^2} dx.$$

On évalue cette dérivée en effectuant le changement de variable $\sqrt{b}/x = \sqrt{a}y$, régulier d'ordre infini entre $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$; il vient de suite

$$- \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(ax^2 + b/x^2)}}{x^2} dx = - \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^{+\infty} e^{-(ay^2 + b/y^2)} dy.$$

Il s'ensuit que, pour $a > 0$ fixé, la fonction

$$F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + b/x^2)} dx$$

appartient à $\mathcal{C}_1(]0, +\infty[)$ et vérifie l'équation différentielle à second membre linéaire

$$D_b F(b) = - \sqrt{\frac{a}{b}} F(b) \quad \text{sur }]0, +\infty[:$$

il existe donc $C(a) \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = C(a) e^{-2\sqrt{ab}}$.

On obtient ainsi

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+b/x^2)} dx = C(a) e^{-2\sqrt{ab}}$$

et tout revient à déterminer $C(a)$. Cela peut se faire en appliquant le théorème de la convergence majorée à la suite $(f_{1/m})_{m \in \mathbb{N}_0}$: il s'agit d'une suite de fonctions mesurables et majorées par $e^{-ax^2} \in L^1(]0, +\infty[)$ sur $]0, +\infty[$ et cette suite converge pp sur $]0, +\infty[$ vers e^{-ax^2} . Au total, il vient

$$C(a) e^{-2\sqrt{a/m}} \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

ce qui suffit. \square

5.2 Cas où l'ensemble d'intégration varie

Dans les applications, on est amené à calculer des dérivées du type

$$D_t \int_{A(t)} f_t(x) dx,$$

où $A(t)$ est une partie mesurable de \mathbb{R}^n . Voyons comment procéder en considérant le cas particulier où $A(t)$ est un intervalle ouvert $]a(t), b(t)[$ de \mathbb{R} .

5.3 Cas où l'ensemble d'intégration varie

Dans les applications, on est amené à calculer des dérivées du type

$$D_t \int_{A(t)} f_t(x) dx,$$

où $A(t)$ est une partie mesurable de \mathbb{R}^n . Voyons comment procéder en considérant le cas particulier où $A(t)$ est un intervalle ouvert $]a(t), b(t)[$ de \mathbb{R} .

5.3.1 Méthode du “gel”

La méthode du “gel” consiste, pour tout t considéré, à effectuer le changement de variable linéaire $x = a(t) + (b(t) - a(t))y$. L'intégrale devient alors

$$(b(t) - a(t)) \int_0^1 f_t(a(t) + (b(t) - a(t))y) dy.$$

Cela étant, il suffit de vérifier si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont dérivables et si le théorème de dérivation des intégrales paramétriques s'applique.

5.3.2 Méthode par les fonctions composées

Supposons les conditions suivantes réalisées:

- (a) t varie dans l'intervalle ouvert Λ de \mathbb{R} ,
- (b) les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ appartiennent à $\mathcal{C}_1(\Lambda)$ et sont réelles,
- (c) il existe un intervalle ouvert $]A, B[$ (borné ou non) de \mathbb{R} tel qu'on ait $a(t), b(t) \in]A, B[$ pour tout $t \in \Lambda$ et $f_t(x) \in \mathcal{C}_0(]A, B[\times\Lambda)$,
- (d) pour tous $a, b \in]A, B[$, la fonction $\int_a^b f_t(x) dx$ est dérivable sur Λ et cette dérivée considérée comme fonction de a, b et t est continue sur $]A, B[\times]A, B[\times\Lambda$.

Dans ce cas, pour tous $a, b \in]A, B[$ et $t \in \Lambda$, posons

$$F(a, b, t) = \int_a^b f_t(x) dx.$$

Cette position a un sens vu que, pour tout $t \in \Lambda$, $f_t(x)$ est continu et par conséquent intégrable sur l'intervalle compact d'extrémités a et b . Dès lors, F est une fonction définie sur $]A, B[\times]A, B[\times\Lambda$. Mais on a bien plus: en fait, F est continûment dérivable sur cet ouvert car on a notamment

$$[D_a F]_{(a,b,t)} = -f_t(a) \quad \text{et} \quad [D_b F]_{(a,b,t)} = f_t(b)$$

vu le théorème d'existence d'une primitive pour les fonctions continues.

Dans ces conditions, vu le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x) dx = F(a(t), b(t), t)$$

appartient à $\mathcal{C}_1(\Lambda)$ et on a

$$\begin{aligned} D_t \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x) dx &= D_t F(a(t), b(t), t) \\ &= -f_t(a(t)) D_t a(t) + f_t(b(t)) D_t b(t) + \left[D_t \int_a^b f_t(x) dx \right]_{(a(t), b(t), t)}. \end{aligned}$$

Si, en outre, on a pu établir que

$$D_t \int_a^b f_t(x) dx = \int_a^b D_t f_t(x) dx, \quad \forall a, b \in]A, B[,$$

le résultat précédent peut s'écrire

$$D_t \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x) dx = -f_t(a(t)) D_t a(t) + f_t(b(t)) D_t b(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} D_t f_t(x) dx.$$

Cette méthode peut aussi s'employer, tout en se simplifiant, si une des fonctions $a(t)$ ou $b(t)$ est constante. Traïtons un exemple.

Exercice. Calculer

$$I(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Suggestion. Comme, pour tout $t \geq 0$, on a tôt fait de vérifier que l'intégrand est intégrable sur le compact $[0, \tau]$ quel que soit $\tau \geq 0$, on peut poser

$$J(t, \tau) = \int_0^\tau \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx, \quad \forall t, \tau \in [0, +\infty[.$$

Posons $\Omega =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Cette fonction $J(t, \tau)$ appartient à $\mathcal{C}_1(\Omega)$ car on a successivement:

a) pour tout $t > 0$, $(\ln(1+tx))/(1+x^2)$ est continu sur $]0, +\infty[$. De là, $J(t, \tau)$ est dérivable par rapport à τ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$D_\tau J(t, \tau) = \frac{\ln(1+t\tau)}{1+\tau^2} \in \mathcal{C}_0(\Omega), \quad \forall t > 0.$$

b) pour tout $\tau > 0$ fixé, on vérifie de suite que le théorème de dérivation des intégrales paramétriques s'applique à $J(t, \tau)$. Il vient donc

$$D_t J(t, \tau) = \int_0^\tau \frac{x}{(1+x^2)(1+tx)} dx$$

et le théorème de la convergence majorée permet d'affirmer que cette dernière intégrale représente une fonction continue sur Ω .

Cela étant, il vient

$$D_t I(t) = D_t J(t, t) = \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \int_0^t \frac{x}{(1+x^2)(1+tx)} dx.$$

Or, par réduction de la fraction rationnelle, la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\frac{-t}{1+t^2} \frac{1}{1+tx} + \frac{1}{1+t^2} \frac{x+t}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{-1}{1+t^2} \ln(1+tx)|_0^t + \frac{t}{1+t^2} \operatorname{arctg}(x)|_0^t + \frac{1}{2(1+t^2)} \ln(1+x^2)|_0^t \\ &= \frac{-\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^2} \operatorname{arctg}(t). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$D_t I(t) = \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^2} \operatorname{arctg}(t).$$

Par conséquent, il vient

$$I(t) \simeq \int \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} dt + \int \operatorname{arctg}(t) D_t \left(\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right) dt \simeq \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t) \ln(1+t^2).$$

Or, par le théorème de la convergence monotone, on voit de suite que $I(t)$ tend vers 0 si $t \rightarrow 0^+$. De là, on tire

$$I(t) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t) \ln(1 + t^2), \quad \forall t \geq 0. \square$$

Chapitre 6

Intégrales remarquables

6.1 Intégrale de Poisson

Rappelons qu'au Théorème 4.5.2, nous avons obtenu la formule suivante connue sous le nom d'**Intégrale de Poisson**:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \forall a > 0.$$

De plus, au Paragraphe 5.1, nous en avons déduit les résultats suivants

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}, \quad \forall a > 0, b \in \mathbb{R},$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+b/x^2)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}, \quad \forall a > 0, b \geq 0.$$

6.2 La fonction “Gamma” : Γ

Remarque. Pour tout $n \in]0, +\infty[$, la fonction $e^{-x}x^{n-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. De fait, cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie d'une part

$$e^{-1}x^{n-1} \leq e^{-x}x^{n-1} \leq x^{n-1}, \quad \forall x \in]0, 1],$$

alors que la fonction x^{n-1} est intégrable en 0^+ si et seulement si $n > 0$, et d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} x^{n-1} = 0, \quad \forall n > 0. \square$$

Définition. La fonction “Gamma” Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad \forall n \in]0, +\infty[;$$

on dit aussi qu'il s'agit de la *première intégrale eulérienne*.

Cette fonction Γ jouit de nombreuses propriétés fort intéressantes.

Proposition 6.2.1 *Pour tout $n \in]0, +\infty[$, on a $\Gamma(n) > 0$.
On a notamment $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.*

Preuve. De fait, l'intégrand est une fonction strictement positive sur $]0, +\infty[$.
De plus, il vient successivement

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

et, en recourant au changement de variable $t = \sqrt{x}$ en (*),

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-1/2} dx \stackrel{(*)}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

Proposition 6.2.2 *La fonction Γ appartient à $\mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et tout $n \in]0, +\infty[$, on a*

$$D^k \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} (\ln(x))^k dx.$$

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème de dérivation des intégrales paramétriques car

- a) pour tout $x > 0$, on a $e^{-x} x^{n-1} \in \mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[)$,
b) pour tout compact K de $]0, +\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sup_{n \in K} |D_n^k(e^{-x} x^{n-1})| = \left(\sup_{n \in K} x^{n-1} \right) e^{-x} |\ln(x)|^k.$$

Or il existe $a \in]0, 1[$ et $b \in]1, +\infty[$ tels que $K \subset [a, b]$; il vient donc

$$\sup_{n \in K} x^{n-1} = x^{a-1} \chi_{]0, 1[} + x^{b-1} \chi_{[1, +\infty[}(x).$$

Pour conclure, il suffit alors de vérifier directement que la fonction

$$(x^{a-1} \chi_{]0, 1[}(x) + x^{b-1} \chi_{[1, +\infty[}(x)) e^{-x} |\ln(x)|^k$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. \blacksquare

Théorème 6.2.3 (propriété fondamentale) *On a*

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \forall n \in]0, +\infty[.$$

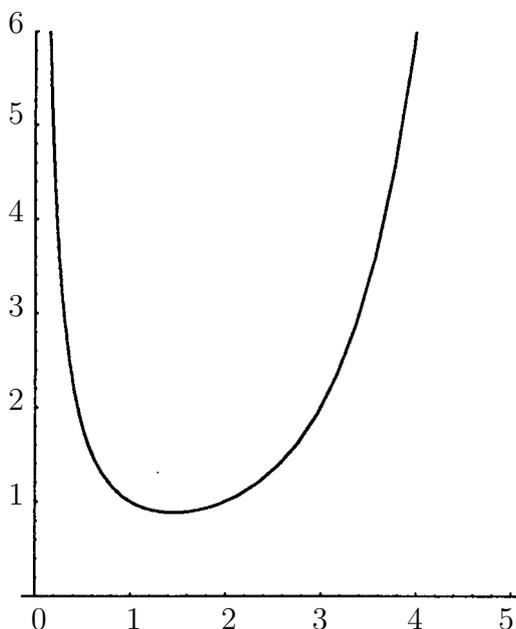
En particulier, pour tout entier $m \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$\Gamma(m+1) = m! \quad \text{et} \quad \Gamma(m+1/2) = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\pi}.$$

On dit que la fonction Γ interpole de manière \mathcal{C}_∞ les valeurs de $m!$

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème d'intégration par parties car il vient successivement

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = - \int_0^{+\infty} (De^{-x}) x^n dx \\ &= -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n\Gamma(n). \blacksquare\end{aligned}$$



Proposition 6.2.4 *On a*

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} n\Gamma(n) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow 0^+} \Gamma(n) = +\infty. \blacksquare$$

Théorème 6.2.5 (Formule de Stirling) *On a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi/n}} = 1$$

donc bien sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(n) = +\infty$ mais aussi, par exemple, les formules suivantes:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n^r \Gamma(n)} = 1, \quad \forall r > 0.$

$$\text{b) } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m+p)!}{m! m^p} = 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\text{c) Formule de Wallis: } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} \sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Preuve. Etablissons d'abord la formule de Stirling. Si nous effectuons le changement de variable linéaire $x = n + \sqrt{n}y$ dans le calcul de $\Gamma(n)$, il vient

$$\frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n})} dy.$$

La conclusion résulte alors du théorème de la convergence majorée:

a) pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, n > y^2} e^{-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n})} = e^{-y^2/2}$$

car la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} , car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, n > y^2} (-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty, n > y^2} \frac{-y/\sqrt{n} + \ln(1+y/\sqrt{n})}{1/n}$$

est égal à

$$y^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + \ln(1+t)}{t^2}$$

si on pose $t = y/\sqrt{n}$ et car on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{2t(1+t)} = -\frac{1}{2}$$

en recourant au théorème de l'Hospital,

b) de $\int t/(1+t) dt = t - \ln(1+t)$, on tire de suite

$$-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n}) = -n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t} dt$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n > 0$. Cela étant, il vient

$$n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t} dt \geq n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+y/\sqrt{n}} dt = \frac{y^2}{2(1+y/\sqrt{n})}$$

pour tout $y > 0$ et

$$n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t} dt \geq n \int_0^{y/\sqrt{n}} t dt = \frac{y^2}{2}$$

pour tout $y \in]-\sqrt{n}, 0[$. Cela étant, la majoration

$$e^{-\sqrt{ny} + n \ln(1+y/\sqrt{n})} \chi_{]-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \leq e^{-y^2/2} \chi_{]-\infty, 0[}(y) + e^{-y^2/(2+2y/\sqrt{n})} \chi_{]0, +\infty[}(y)$$

a lieu sur \mathbb{R} pour tout $n \geq 1$. Or cette dernière majorante est bien sûr une fonction intégrable sur \mathbb{R} .

Cela étant,

a) résulte aussitôt de

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n^r \Gamma(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n-r} (n+r)^{n+r} \sqrt{2\pi/(n+r)}}{n^r e^{-n} n^n \sqrt{2\pi/n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{r+n} \sqrt{\frac{n}{n+r}} e^{-r} = 1. \end{aligned}$$

b) est direct mais résulte aussi de

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(m+p+1)}{\Gamma(m+1)m^p} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)^p \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)m^p} = 1.$$

c) résulte aussitôt de

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} \sqrt{m} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2m+1) \sqrt{m}}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1)} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2m} (2m)^{2m} \sqrt{4\pi m} \sqrt{m}}{2^{2m} e^{-2m} m^{2m} 2\pi m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 6.2.6 (formule de Gauss) *Pour tous $n > 0$ et $m \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$m^{mn} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(n + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2} \sqrt{m} \Gamma(mn).$$

*En particulier, on a la **formule de duplication de Legendre**:*

$$\Gamma(n) \Gamma(n + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \Gamma(2n), \quad \forall n > 0.$$

Preuve. Posons

$$V(m, n) = m^{mn-1/2} \frac{\Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(n + \frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(mn)}.$$

On vérifie directement qu'on a alors $V(m, n + 1) = V(m, n)$ pour tous $n > 0$ et $m \in \mathbb{N}_0$, donc $V(m, n + p) = V(m, n)$ pour tous $n > 0$ et $m, p \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, $V(m, n)$ est successivement égal à

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} V(m, n + p) &= \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} \frac{m^{m(n+p)-1/2} \Gamma(n+p) \cdots \Gamma(n+p+(m-1)/m)}{\Gamma(m(n+p))} \\
&\stackrel{(*)}{=} \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} \frac{m^{m(n+p)-1/2} n^p \Gamma(n) \cdots n^{p+(m-1)/m} \Gamma(n)}{(mn)^{mp} \Gamma(mn)} \\
&= \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} m^{mn-1/2} n^{(m-1)/2} \frac{(\Gamma(n))^m}{\Gamma(mn)} \\
&\stackrel{(**)}{=} \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} m^{mn-1/2} \frac{n^{(m-1)/2} e^{-nm} n^{nm} (2\pi/n)^{m/2}}{e^{-mn} (mn)^{mn} \sqrt{2\pi/(mn)}} = (2\pi)^{(m-1)/2}
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure (en $(*)$), on utilise la première formule de la propriété précédente; en $(**)$, on utilise la formule de Stirling).

La formule de duplication de Legendre n'est quant à elle qu'une autre écriture de la formule de Gauss pour $m = 2$. ■

6.3 La fonction "Beta" : B

Remarque. Pour tout $(m, n) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ est une fonction intégrable sur $]0, 1[$. Cela résulte aussitôt des critères pratiques d'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle de \mathbb{R} .

Définition. La fonction "Beta" B est définie selon

$$B:]0, +\infty[\times]0, +\infty[; \quad (m, n) \mapsto \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

on dit aussi qu'il s'agit de la *deuxième intégrale eulérienne*.

Voici quelques propriétés marquantes de cette fonction.

Proposition 6.3.1 Pour tout $(m, n) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a

- a) $B(m, n) > 0$,
- b) $B(m, n) = B(n, m)$,
- c) $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

Preuve. a) est trivial.

b) De fait, le changement de variable linéaire $y = 1 - x$ donne aussitôt

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = - \int_1^0 (1-y)^{m-1}y^{n-1} dy.$$

c) Comme les fonctions $e^{-x}x^{m-1}$ et $e^{-y}y^{n-1}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$, la fonction $e^{-x-y}x^{m-1}y^{n-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et son intégrale vaut $\Gamma(m)\Gamma(n)$. On peut aussi évaluer cette intégrale en recourant au changement de variable

$$\begin{cases} x = \xi(1-\eta) \\ y = \xi\eta \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = y/(x+y) \end{cases}$$

régulier d'ordre infini entre $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[\times]0, 1[$. Il vient

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\xi^{m+n-1} d\xi \cdot \int_0^1 (1-\eta)^{m-1}\eta^{n-1} d\eta = \Gamma(m+n) \cdot B(m, n). \blacksquare$$

Remarque. La formule obtenue en c) permet d'avoir la valeur de $B(m, n)$ pour toutes les valeurs entières et demi-entières de m et n . Voici un autre cas où la valeur de $B(m, n)$ est connue.

Théorème 6.3.2 (formule d'Euler) *Pour tout $\theta \in]0, 1[$,*

$$B(\theta, 1-\theta) = \Gamma(\theta) \cdot \Gamma(1-\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\theta\pi)}.$$

Preuve. La première égalité résulte de la formule c) de la Proposition précédente car on a $\Gamma(1) = 1$.

Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit d'effectuer le changement de variable $x = y/(1+y)$ dans l'expression intégrale de $B(\theta, 1-\theta)$: il vient

$$\int_0^1 x^{\theta-1}(1-x)^{-\theta} dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\theta-1}}{(1+y)^{\theta-1}} \frac{1}{(1+y)^{-\theta}} \frac{dy}{(1+y)^2}.$$

Pour conclure, établissons la troisième égalité. On prouve d'abord que

$$e^{i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+e^{i\lambda x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x} dx, \quad \forall \lambda \in]-\pi, \pi[.$$

Comme $e^{i\lambda\theta}$ appartient à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ et comme

a) on a $x^{\theta-1}/(1+e^{i\lambda x}) \in \mathcal{C}_1(]-\pi, \pi[)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$,

b) on a $x^{\theta-1}/(1 + e^{i\lambda x}) \in L^1(]0, +\infty[)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

c) pour tout compact $K \subset]-\pi, \pi[$,

$$\sup_{\lambda \in K} \left| D_\lambda \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} \right| = \sup_{\lambda \in K} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1}$$

est majoré sur $]0, +\infty[$ par

$$\frac{x^\theta}{x^2 - 2x \cos(\varepsilon) + 1} \in L^1(]0, +\infty[)$$

si on choisit $\varepsilon \in]0, \pi[$ tel que $K \subset]-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon[$,

la fonction

$$e^{i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx \quad (*)$$

est continûment dérivable par rapport à λ sur $] -\pi, \pi[$ et de dérivée égale à

$$\begin{aligned} & e^{i\lambda\theta} \left(i\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx - ie^{i\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{(1 + e^{i\lambda x})^2} dx \right) \\ &= e^{i\lambda\theta} \left(i\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx + i \int_0^{+\infty} x^\theta D_x \frac{1}{1 + e^{i\lambda x}} dx \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire à 0 en intégrant par parties dans la toute dernière intégrale. Cette fonction (*) est donc constante sur $] -\pi, \pi[$ et l'égalité annoncée provient de sa valeur en 0.

Pour tout $\lambda \in]-\pi, \pi[$, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx = e^{-i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + x} dx$$

et par conséquent

$$\sin(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1} dx = \sin(\lambda\theta) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + x} dx$$

en égalant les parties imaginaires des deux membres de cette égalité.

Cela étant, pour conclure, il suffit de prouver que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pi^+} \sin(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1} dx = \pi.$$

Or, pour tout $\lambda \in]0, \pi[$,

$$\sin(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda) x^\theta}{(x + \cos(\lambda))^2 + \sin^2(\lambda)} dx$$

est égal à

$$\int_{\cot g(\lambda)}^{+\infty} (y \sin(\lambda) - \cos(\lambda))^\theta \frac{dy}{1+y^2}$$

en recourant au changement de variable linéaire $x = y \sin(\lambda) - \cos(\lambda)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de la convergence majorée car on a

$$|y \sin(\lambda) - \cos(\lambda)|^\theta \leq (|y| + 1)^\theta \text{ sur } \mathbb{R}$$

et car la fonction $(|y| + 1)^\theta / (1 + y^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} . ■

Proposition 6.3.3 *Pour tout $m \in]0, +\infty[$, on a*

$$B(m, m) = 2^{-2m+1} B(m, 1/2).$$

Preuve. De fait, on a successivement

$$B(m, m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(m)\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)\Gamma(m+1/2)2^{2m-1}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+1/2)} 2^{-2m+1}. \blacksquare$$

6.4 Autres intégrales eulériennes

L'évaluation de nombreuses intégrales se ramène aux fonctions Γ et B .

Proposition 6.4.1 a) *Pour tous $m > 0$, $n > -1$ et $a > 0$,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1+n}{m}\right) a^{-(n+1)/m}.$$

b) *Pour tous $m > -1$, $n > -1$, $p > 0$ et $a > 0$,*

$$\int_0^a x^m (a^p - x^p)^n dx = \frac{1}{p} B\left(n+1, \frac{m+1}{p}\right) a^{m+np-1}.$$

c) *Pour tous $m > -1$ et $n > -1$,*

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1).$$

d) *Pour tous $m > -1$, $n > -1$ et $c \notin [a, b]$,*

$$\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{|x-c|^{m+n+2}} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{|a-c|^{n+1} |b-c|^{m+1}} B(m+1, n+1).$$

e) Pour tous $m > -1$, $p > 0$, $n > (m + 1)/p$, $a > 0$ et $b > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(ax^p + b)^n} dx = \frac{b^{(m+1)/p-n}}{a^{(m+1)/p}} \cdot B\left(\frac{m+1}{p}, n - \frac{m+1}{p}\right).$$

f) Pour tous $m > -1$ et $n > -1$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(\theta) \cos^n(\theta) d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

g) Pour tous $m > -1$, $n > -1$, $a > 0$ et $b > 0$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m(\theta) \sin^n(\theta)}{(a \cos^2(\theta) + b \sin^2(\theta))^{(m+n+2)/2}} d\theta = \frac{B((m+1)/2, (n+1)/2)}{2a^{(m+1)/2} b^{(n+1)/2}}.$$

Preuve. Pour s'en assurer, il suffit d'effectuer le changement de variable:

a) $ax^m = y$,

b) $x^p = a^p y$,

c) $x = a + (b - a)y$,

d) $x = \frac{a(b - c) + c(a - b)y}{(b - c) + (a - b)y}$,

e) $\frac{b}{ax^p + b} = y$,

f) $\sin^2(\theta) = y$,

g) $\sin^2(\theta) = \frac{ax}{(a - b)x + b}$. ■

Chapitre 7

Introduction à la formule de Stokes

7.1 Chemins et courbes dans \mathbb{R}^n

Définitions. Un *chemin dans \mathbb{R}^n* est la donnée

a) d'un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} ,

b) de n fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ réelles et continues sur $[a, b]$, c'est-à-dire d'une application continue $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ce chemin est noté $(\gamma, [a, b])$ ou même, plus simplement, γ si aucune confusion sur $[a, b]$ n'est possible. Il est \mathcal{C}_1 si chacune des fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ qui définissent γ appartient à $\mathcal{C}_1([a, b])$.

L'*origine* du chemin $(\gamma, [a, b])$ est le point $\gamma(a)$ et son *extrémité*, le point $\gamma(b)$. Un *lacet* est un chemin *fermé*, c'est-à-dire un chemin dont l'origine est égale à l'extrémité.

Exemple. Etant donné deux points a, b de \mathbb{R}^n , le *segment joignant a à b* est le chemin $(\gamma, [0, 1])$ dans \mathbb{R}^n défini par

$$\gamma(t) = a + t(b - a), \quad \forall t \in [0, 1]. \square$$

Exemple. Le *lacet circonférence unité* est le lacet $(\gamma, [0, 2\pi])$ dans \mathbb{R}^2 défini par

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \square$$

Définitions. Une *courbe* (resp. une *boucle*) *dans \mathbb{R}^n* est une partie Γ de \mathbb{R}^n pour laquelle il existe un chemin (resp. un lacet) $(\gamma, [a, b])$ dans \mathbb{R}^n tel que $\Gamma = \gamma([a, b])$. L'équation

$$x = \gamma(t) \quad \text{pour } t \in [a, b]$$

porte alors le nom de *représentation paramétrique* de Γ . On dit aussi que Γ est *déterminé par* $(\gamma, [a, b])$.

Remarques. a) Il est clair que *toute boucle est une courbe*. Il est un peu moins évident que *toute courbe est une boucle*: il suffit de considérer les représentations paramétriques “ $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ ” et “ $x = \gamma(a + \sin(t)(b - a))$ pour $t \in [0, \pi]$ ”. La distinction entre courbe et boucle ne présente donc a priori aucun intérêt.

b) On vérifie de suite que *toute courbe est compacte*.

c) Les notions de “chemin = application ...” et de “courbe = ensemble ...” sont essentiellement différentes. Cette distinction est particulièrement mise en évidence par la propriété suivante: *toute courbe admet une représentation paramétrique sur n'importe quel intervalle compact de \mathbb{R}* . De fait, si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin dans \mathbb{R}^n et si $[c, d]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} , on a tôt fait de vérifier que, pour tout $f \in \mathcal{C}_0([c, d])$ tel que $f([c, d]) = [a, b]$, $(\gamma(f), [c, d])$ convient. Un exemple de telle fonction f est donné par $f(t) = a + \frac{t-c}{d-c}(b-a)$. \square

Exemple. Quels que soient les points a, b de \mathbb{R}^n , le segment d'extrémités a, b

$$\overline{ab} = \{ a + t(b - a) : t \in [0, 1] \}$$

est une courbe dans \mathbb{R}^n . Plus généralement, étant donné un nombre fini de points a_0, a_1, \dots, a_J de \mathbb{R}^n , on vérifie de suite que la réunion des segments $\overline{a_0 a_1}, \dots, \overline{a_{J-1} a_J}$ est une courbe dans \mathbb{R}^n , appelée *courbe polygonale associée aux points* a_0, a_1, \dots, a_J . Il est noté $\overline{a_0 \dots a_J}$. \square

Exemple. La *circonférence unité* dans \mathbb{R}^2

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \} = \{ (\cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi] \}$$

est une boucle dans \mathbb{R}^2 . \square

Exercice. Pour toute fonction f continue et réelle sur l'intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , l'ensemble $\{ x, f(x) : x \in [a, b] \}$ est une courbe dans \mathbb{R}^2 . \square

Exercice. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\{a\}$ est une courbe dans \mathbb{R}^n . \square

7.2 Longueur d'un chemin rectifiable

Définitions. Un *découpage* de l'intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} est la donnée de nombres réels a_0, a_1, \dots, a_J en nombre fini et tels que

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_J = b.$$

Il est noté $[a_0, \dots, a_J]$.

Il est *subordonné* à $r > 0$ si on a $a_j - a_{j-1} \leq r$ pour tout $j = 1, \dots, J$. Il est *moins fin* que le découpage $[b_0, \dots, b_K]$ de $[a, b]$ si

$$\{a_0, a_1, \dots, a_J\} \subset \{b_0, b_1, \dots, b_K\},$$

auquel cas on dit aussi que le découpage $[b_0, \dots, b_K]$ est *plus fin* que le découpage $[a_0, \dots, a_J]$.

Définitions. Le chemin $(\gamma, [a, b])$ dans \mathbb{R}^n est *rectifiable* si l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=1}^J |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| : [a_0, \dots, a_J] \in \mathcal{D} \right\},$$

où \mathcal{D} est l'ensemble des découpages de $[a, b]$, est borné, auquel cas sa borne supérieure est appelée *longueur de γ* et est bien souvent notée L_γ .

Le résultat suivant est fort utile.

Lemme 7.2.1 Soient $(\gamma, [a, b])$ un chemin dans \mathbb{R}^n et $[a_0, \dots, a_J]$ un découpage de $[a, b]$. Si le découpage $[b_0, \dots, b_K]$ de $[a, b]$ est plus fin que $[a_0, \dots, a_J]$, il vient

$$\sum_{j=1}^J |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| \leq \sum_{k=1}^K |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})|.$$

Preuve. Cela résulte aussitôt de l'inégalité de Minkowski. ■

Proposition 7.2.2 Soient $(\gamma, [a, b])$ un chemin dans \mathbb{R}^n et $[a_0, \dots, a_J]$ un découpage de $[a, b]$. Alors le chemin γ est rectifiable si et seulement si chacun des chemins $(\gamma^{(j)} = \gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}, [a_{j-1}, a_j])$ l'est, auquel cas on a $L_\gamma = \sum_{j=1}^J L_{\gamma^{(j)}}$.

Preuve. La condition est nécessaire. En mettant ensemble des découpages des intervalles compacts $[a_{j-1}, a_j]$ pour $j = 1, \dots, J$, on détermine un découpage de $[a, b]$. Cela assure la rectifiabilité de chacun des chemins $\gamma^{(j)}$ ainsi que l'inégalité $\sum_{j=1}^J L_{\gamma^{(j)}} \leq L_\gamma$.

La condition est suffisante. Cela résulte aussitôt du lemme précédent et du fait que tout découpage de $[a, b]$ est moins fin qu'un certain découpage de $[a, b]$ contenant les points a_1, \dots, a_{J-1} . Ceci assure en outre l'inégalité $L_\gamma \leq \sum_{j=1}^J L_{\gamma^{(j)}}$.

D'où la conclusion. ■

Définition. En particulier, si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin rectifiable dans \mathbb{R}^n , alors, pour tout $t \in]a, b]$, $(\gamma|_{[a, t]}, [a, t])$ est un chemin rectifiable dans \mathbb{R}^n dont nous notons $L_\gamma(t)$ la longueur. De plus, nous posons $L_\gamma(a) = 0$. De la sorte, nous venons de définir une fonction $L_\gamma(\cdot)$ sur $[a, b]$, qui a de nombreuses propriétés.

Théorème 7.2.3 *Si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin rectifiable dans \mathbb{R}^n , la fonction $L_\gamma(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs dans $[0, L_\gamma]$, croissante et continue.*

De plus, elle est strictement croissante si et seulement si γ n'est constant sur aucun intervalle inclus dans $[a, b]$.

Preuve. Seule la continuité n'est pas immédiate.

Etablissons par exemple que $L_\gamma(\cdot)$ est continu à gauche en tout point $t_0 \in]a, b]$; comme on établit de même que $L_\gamma(\cdot)$ est continu à droite en tout point t_0 de $[a, b[$ (le cas $t_0 = a$ demande une attention spéciale), on conclut aussitôt.

Fixons $\varepsilon > 0$. D'une part, comme $(\gamma|_{[a, t_0]}, [a, t_0])$ est un chemin rectifiable, il existe un découpage $[r_0, \dots, r_J]$ de $[a, t_0]$ tel que

$$L_\gamma(t_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^J |\gamma(r_j) - \gamma(r_{j-1})|.$$

D'autre part, vu la continuité de γ sur $[a, b]$, il existe un point s_J dans $]r_{J-1}, t_0[$ tel que $|\gamma(t_0) - \gamma(s_J)| \leq \varepsilon/2$. Dans ces conditions,

$$[s_0 = r_0, s_1 = r_1, \dots, s_{J-1} = r_{J-1}, s_J, s_{J+1} = t_0]$$

est un découpage de $[a, t_0]$ plus fin que $[r_0, \dots, r_J]$ et il vient

$$L_\gamma(t_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^J |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq L_\gamma(s_J) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L_\gamma(t_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $|L_\gamma(t_0) - L_\gamma(s)| \leq \varepsilon$ pour tout $s \in [s_J, t_0]$, vu la croissance de $L_\gamma(\cdot)$. ■

Théorème 7.2.4 *Si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin dans \mathbb{R}^n tel que chacune des fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ définissant γ soit continûment dérivable et à dérivée intégrable sur $]a, b[$, alors γ est rectifiable et de longueur donnée par*

$$L_\gamma = \int_a^b |D\gamma(t)| dt. \quad (*)$$

Preuve. Établissons d'abord ce résultat dans le cas où γ est un chemin \mathcal{C}_1 . D'une part, γ est rectifiable car, pour tout découpage $[a_0, \dots, a_J]$ de $[a, b]$, le théorème des accroissements finis donne l'existence pour tout $j = 1, \dots, J$ de points $a_{j,1}, \dots, a_{j,n} \in]a_{j-1}, a_j[$ tels que

$$|\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| = (a_j - a_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^n (D\gamma_k(a_{j,k}))^2}.$$

Comme les fonctions $D\gamma_k$ sont continues, donc bornées sur le compact $[a, b]$, on conclut aussitôt. D'autre part, prouvons que la longueur de γ est donnée par la formule (*). Comme γ est rectifiable, il existe une suite $[a_0^{(m)}, \dots, a_{J(m)}^{(m)}]$ de découpages de $[a, b]$ tels que

$$\sum_{j=1}^{J(m)} \left| \gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)}) \right| \rightarrow L_\gamma$$

si $m \rightarrow \infty$. Vu le lemme 7.2.1, nous pouvons bien sûr supposer que la suite

$$\varepsilon_m = \sup_{j=1, \dots, J(m)} \left| a_j^{(m)} - a_{j-1}^{(m)} \right|$$

converge vers 0. Cela étant (avec des notations claires par elles-mêmes, déterminées comme dans la première partie de cette preuve), les fonctions

$$f_m = \sum_{j=1}^{J(m)} \sqrt{\sum_{k=1}^n (D\gamma_k(a_{j,k}^{(m)}))^2} \chi_{]a_{j-1}^{(m)}, a_j^{(m)}]}$$

- a) sont mesurables,
 - b) constituent une suite de fonctions qui converge pp sur \mathbb{R} vers $|D\gamma| \chi_{[a,b]}$,
 - c) ont leur module majoré pp sur \mathbb{R} par une fonction intégrable fixe du type $C\chi_{[a,b]}$.
- Dès lors, vu le théorème de la convergence majorée, la suite

$$\sum_{j=1}^{J(m)} \sqrt{\sum_{k=1}^n (D\gamma_k(a_{j,k}^{(m)}))^2} (a_j^{(m)} - a_{j-1}^{(m)}) = \int_a^b f_m(t) dt$$

converge vers $\int_a^b |D\gamma(t)| dt$. D'où la conclusion.

Passons au cas général. Établissons d'abord que γ est rectifiable. Vu la continuité de γ , il existe $\eta > 0$ tel que

$$|\gamma(a') - \gamma(a)| + |\gamma(b) - \gamma(b')| \leq 1$$

pour tous $a', b' \in [a, b]$ tels que $a' - a \leq \eta$ et $b - b' \leq \eta$. Cela étant, soit $[a_0, \dots, a_J]$ un découpage de $[a, b]$. Quitte à le remplacer par un découpage plus fin $[b_0, \dots, b_K]$ tel que $b_1 - b_0 \leq \eta$ et $b_K - b_{K-1} \leq \eta$, ce qui ne ferait qu'augmenter $\sum_{j=1}^J |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})|$, nous pouvons supposer avoir

$$\sum_{j=1}^J |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| \leq 1 + \sum_{j=2}^{J-1} |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})|.$$

La conclusion s'ensuit aussitôt car on a

$$\sum_{j=2}^{J-1} |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| \leq \int_{a_1}^{a_{J-1}} |\mathrm{D}\gamma(t)| dt \leq \int_a^b |\mathrm{D}\gamma(t)| dt$$

vu la première partie de cette preuve. Cela étant, prouvons que L_γ est donné par la formule (*). Pour tous $a < a' < b' < b$, vu ce qui précède, nous avons

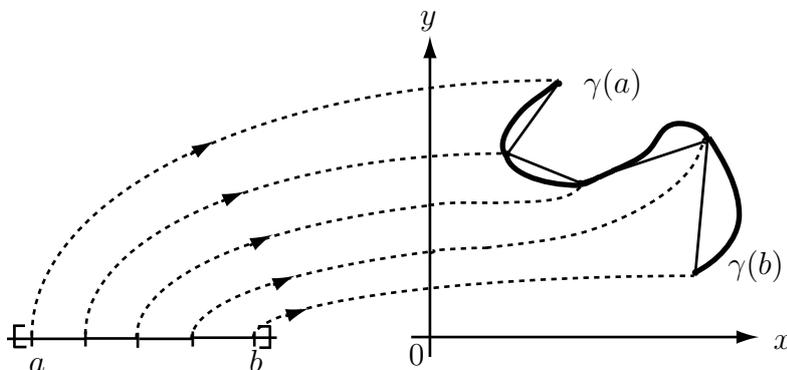
$$L_{\gamma|_{[a', b']}} = \int_{a'}^{b'} |\mathrm{D}\gamma(t)| dt.$$

La conclusion résulte alors aussitôt du théorème précédent et de l'intégrabilité de $|\mathrm{D}\gamma|$ sur $[a, b]$. ■

Interprétation. La longueur d'un chemin $(\gamma, [a, b])$ dans \mathbb{R}^n tel que chacune des fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ définissant γ soit continûment dérivable et à dérivée intégrable sur $]a, b[$ a une interprétation très pragmatique:

- on choisit une suite numérique réelle strictement positive δ_m qui converge vers 0,
 - pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on choisit un découpage $[a_0^{(m)}, \dots, a_{J(m)}^{(m)}]$ de $[a, b]$ subordonné à δ_m .
- Cela étant, la longueur L_γ de ce chemin est égale à la limite de la suite

$$\sum_{j=1}^{J(m)} |\gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)})|.$$



Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, (b-a)/4[$ tel que

$$\int_a^{a+\eta} |\mathrm{D}\gamma(t)| dt + \int_{b-\eta}^b |\mathrm{D}\gamma(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour m suffisamment grand, on a $\delta_m < \eta$; il existe donc $j_0(m)$ et $j_1(m)$ tels que

$$a < a_{j_0(m)}^{(m)} \leq a + \eta < a_{j_0(m)+1}^{(m)} \leq a_{j_1(m)-1}^{(m)} < b - \eta \leq a_{j_1(m)}^{(m)} < b.$$

Tout comme dans la démonstration précédente, on établit que

$$\sum_{j=j_0(m)+1}^{j_1(m)} \left| \gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)}) \right| \rightarrow \int_{a+\eta}^{b-\eta} |\mathrm{D}\gamma(t)| dt.$$

La conclusion est alors immédiate car, pour m suffisamment grand, il vient successivement

$$\begin{aligned} L_\gamma - \varepsilon &= \int_a^b |\mathrm{D}\gamma(t)| dt - \varepsilon \leq \int_{a+\eta}^{b-\eta} |\mathrm{D}\gamma(t)| dt - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{j=j_0(m)+1}^{j_1(m)} \left| \gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)}) \right| \leq L_\gamma. \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple. Pour tout couple de points a, b de \mathbb{R}^n , le segment joignant a à b est rectifiable et de longueur égale à la distance $|b-a|$ entre ces points. \square

Exemple. Le lacet circonférence unité est rectifiable et de longueur égale à 2π .

Plus généralement, l'arc de circonférence de rayon R et de centre (a, b) compris entre les angles polaires ω_0 et ω_1 avec $\omega_0 < \omega_1$ — à savoir $(\gamma, [\omega_0, \omega_1])$ où γ est défini par $\gamma(t) = (a + R \cos(t), b + R \sin(t))$ pour tout $t \in [\omega_0, \omega_1]$ — est rectifiable et de longueur égale à $(\omega_1 - \omega_0)R$. \square

Exercice. Calculer la longueur de l'arcade de sinusöide de représentation paramétrique $(x, y) = (t, \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On vérifie de suite que le théorème précédent s'applique: cette arcade est un chemin rectifiable et sa longueur est égale à

$$L_C = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx.$$

(Il s'agit d'une intégrale elliptique qu'on ne sait pas calculer par les méthodes que nous avons mises au point.) \square

La propriété suivante d'invariance de la longueur d'un chemin rectifiable est importante. C'est elle qui va nous permettre d'introduire au paragraphe suivant la notion de longueur d'une courbe.

Proposition 7.2.5 *Si $(\gamma_1, [a_1, b_1])$ et $(\gamma_2, [a_2, b_2])$ sont deux chemins dans \mathbb{R}^n et s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_0([a_2, b_2])$ strictement monotone et telle que $f([a_2, b_2]) = [a_1, b_1]$ et $\gamma_2 = \gamma_1(f)$, alors les chemins γ_1 et γ_2 sont simultanément rectifiables, auquel cas ils ont même longueur.*

Preuve. Vu le théorème de la fonction inverse, il suffit de prouver que, si γ_1 est rectifiable, alors γ_2 est aussi rectifiable et tel que $L_{\gamma_2} \leq L_{\gamma_1}$. Si, par exemple, f est strictement croissant, alors, pour tout découpage $[c_0, \dots, c_J]$ de $[a_2, b_2]$, $[f(c_0), \dots, f(c_J)]$ est un découpage de $[a_1, b_1]$ et on a

$$\sum_{j=1}^J |\gamma_2(c_j) - \gamma_2(c_{j-1})| = \sum_{j=1}^J |\gamma_1[f(c_j)] - \gamma_1[f(c_{j-1})]| \leq L_{\gamma_1},$$

ce qui suffit. ■

7.3 Courbes simple et de Jordan dans \mathbb{R}^n

Définition. Une courbe Γ dans \mathbb{R}^n est *simple* s'il existe un chemin injectif $(\gamma, [a, b])$ tel que $\Gamma = \gamma([a, b])$. L'équation

$$x = \gamma(t) \quad \text{pour } t \in [a, b]$$

porte alors le nom de *représentation paramétrique simple* de Γ .

Lemme 7.3.1 *Soit $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ une représentation paramétrique simple de la courbe simple Γ dans \mathbb{R}^n .*

a) *Pour toute représentation paramétrique simple $x = \varphi(s)$ pour $s \in [c, d]$ de Γ , il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_0([c, d])$ strictement monotone et telle que $f([c, d]) = [a, b]$ et $\varphi = \gamma(f)$.*

b) *Pour tout intervalle compact $[c, d]$ de \mathbb{R} et tout $f \in \mathcal{C}_0([c, d])$ strictement monotone et tel que $f([c, d]) = [a, b]$, le chemin $(\varphi = \gamma(f), [c, d])$ donne aussi lieu à une représentation paramétrique simple de Γ .*

Preuve. a) Il suffit de définir $f(s)$ pour $s \in [c, d]$ comme étant le point unique $t \in [a, b]$ tel que $\varphi(s) = \gamma(t)$. Bien sûr, f est alors une fonction définie sur $[c, d]$ et telle que $f([c, d]) = [a, b]$. La continuité de f s'établit par l'absurde. Si f n'est pas continu, il existe une suite $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans $[c, d]$ convergant vers s_0 et $\varepsilon > 0$ tels

que $|f(s_m) - f(s_0)| \geq \varepsilon$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. De la suite $(f(s_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite $(f(s_{k(m)}))_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui converge vers un point t_0 du compact $[a, b]$, qui ne peut être que $f(s_0)$ car on doit avoir

$$\gamma(t_0) = \lim \gamma(f(s_{k(m)})) = \lim \varphi(s_{k(m)}) = \varphi(s_0).$$

D'où une contradiction. Cela étant, la stricte monotonie de f s'établit directement en recourant au théorème des valeurs intermédiaires.

b) est trivial. ■

Théorème 7.3.2 *Soit $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ une représentation paramétrique simple de la courbe simple Γ dans \mathbb{R}^n . Si le chemin $(\gamma, [a, b])$ est rectifiable, alors, pour toute représentation paramétrique simple $x = \varphi(s)$ pour $s \in [c, d]$ de Γ , le chemin $(\varphi, [c, d])$ est rectifiable et tel que $L_\gamma = L_\varphi$.*

Preuve. Cela résulte aussitôt de la partie a) du lemme précédent et de la dernière proposition du paragraphe précédent. ■

Définition. Une courbe simple Γ dans \mathbb{R}^n est *rectifiable* si elle admet une représentation paramétrique simple $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ telle que le chemin $(\gamma, [a, b])$ soit rectifiable. Dans ce cas, *la longueur de Γ* , notée L_Γ , est la longueur commune de tous les chemins $(\varphi, [c, d])$ tels que $x = \varphi(s)$ pour $s \in [c, d]$ soit une représentation paramétrique simple de Γ .

Définition. Une courbe Γ dans \mathbb{R}^n est de *Jordan* s'il existe un lacet $(\gamma, [a, b])$ tel que $\Gamma = \gamma([a, b])$ et $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ pour tous $t, t' \in]a, b[$ distincts. L'équation $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ porte alors le nom de *représentation paramétrique de Jordan* de Γ .

Théorème 7.3.3 *Soit $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ une représentation paramétrique de Jordan de la courbe de Jordan Γ dans \mathbb{R}^n . Si le lacet $(\gamma, [a, b])$ est rectifiable, alors, pour toute représentation paramétrique de Jordan $x = \varphi(s)$ pour $s \in [c, d]$ de Γ , le lacet $(\varphi, [c, d])$ est rectifiable et tel que $L_\gamma = L_\varphi$.*

Preuve. Établissons d'abord ce résultat dans le cas où $\gamma(a) = \varphi(c)$. Définissons une fonction f sur $]c, d[$ de la manière suivante: pour tout $s \in]c, d[$, $f(s)$ est le point unique $t \in]a, b[$ tel que $\varphi(s) = \gamma(t)$. On vérifie comme dans la preuve du théorème précédent que f est une fonction continue et strictement monotone sur $]c, d[$ telle que $f(]c, d[) =]a, b[$. Si on prolonge f sur $[c, d]$ par

$$f(c) = \lim_{s \rightarrow c^+} f(s) \quad \text{et} \quad f(d) = \lim_{s \rightarrow d^-} f(s),$$

on obtient une fonction f continue et strictement monotone sur $]c, d[$ vérifiant $f([c, d]) = [a, b]$ et telle que $\varphi(s) = \gamma(f(s))$ pour tout $s \in [c, d]$. La conclusion s'ensuit directement.

Si on a $\gamma(a) \neq \varphi(c)$, il existe un point $t_0 \in]a, b[$ unique tel que $\gamma(t_0) = \varphi(c)$. On définit alors une application $\psi : [r_0, r_0 + b - a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\psi(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \forall t \in [r_0, b], \\ \gamma(t - b + a), & \forall t \in [b, r_0 + b - a]. \end{cases}$$

On vérifie de suite que $x = \psi(r)$ pour $r \in [r_0, r_0 + b - a]$ est une représentation paramétrique de Jordan de Γ telle que $\psi(r_0) = \varphi(c)$ donc telle que $L_\psi = L_\varphi$. La conclusion est alors directe car on vérifie de suite que $L_{\gamma|_{[a, r_0]}} = L_{\psi|_{[b, r_0 + b - a]}}$. ■

Définitions. Une courbe de Jordan Γ dans \mathbb{R}^n est *rectifiable* si elle admet une représentation paramétrique de Jordan $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ telle que le lacet $(\gamma, [a, b])$ soit rectifiable.

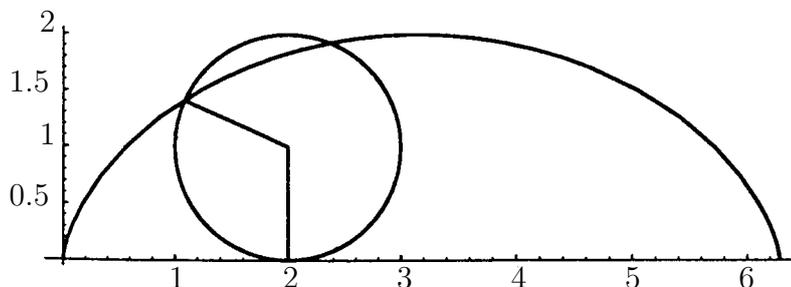
Dans ce cas, *la longueur de Γ* , notée L_Γ , est la longueur commune de tous les lacets $(\varphi, [c, d])$ tels que $x = \varphi(s)$ pour $s \in [c, d]$ soit une représentation paramétrique de Jordan de Γ .

Théorème 7.3.4 *La longueur d'une courbe simple (resp. de Jordan) rectifiable est indépendante du choix du système d'axes des coordonnées.* ■

Exemple. *Pour tout couple (a, b) de points distincts de \mathbb{R}^n , le segment d'extrémités a, b est une courbe simple rectifiable dont la longueur est égale à $|b - a|$.* □

Exemple. *Dans \mathbb{R}^2 , une circonférence de rayon $R > 0$ est une courbe de Jordan rectifiable dont la longueur est égale à $2\pi R$.* □

Exercice. *Vérifier que la longueur d'une arcade de cycloïde construite au moyen d'une circonférence de rayon $R > 0$ est égale à $8R$.*



Suggestion. Comme la longueur d'une courbe dans \mathbb{R}^n est invariante par rapport au choix du système d'axes cartésiens, nous pouvons adopter le chemin

$$((R(\omega - \sin(\omega)), R(1 - \cos(\omega))), \omega \in [0, 2\pi]),$$

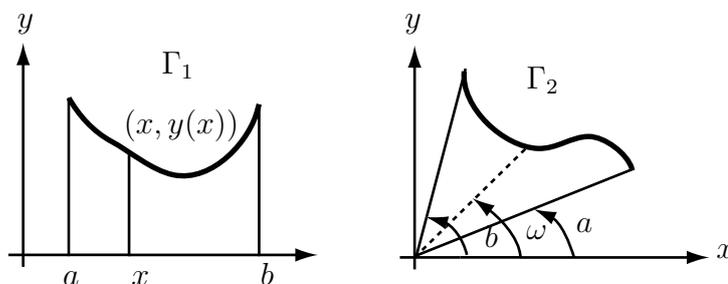
pour déterminer cette arcade Γ . Comme la fonction $R(\omega - \sin(\omega))$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , Γ est une courbe simple. Comme les fonctions $R(\omega - \sin(\omega))$ et $R(1 - \cos(\omega))$ appartiennent à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ et que leurs dérivées $R(1 - \cos(\omega))$ et $R \sin(\omega)$ sont intégrables sur $[0, 2\pi]$, la courbe Γ est rectifiable et telle que

$$L_\Gamma = 2R \int_0^{2\pi} \sin(\omega/2) d\omega = 8R. \square$$

Cas particuliers.

1) *Représentation paramétrique cartésienne dans \mathbb{R}^2 .* Si $y(x)$ est une fonction réelle et continue sur l'intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , continûment dérivable et à dérivée intégrable sur $]a, b[$, alors $\Gamma = \{(x, y(x)) : x \in [a, b]\}$ est une courbe simple rectifiable dans \mathbb{R}^2 dont la longueur est égale à

$$L_\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + (Dy)^2} dx. \square$$



2) *Représentation paramétrique polaire.* Si $\rho(\omega)$ est une fonction continue sur l'intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , continûment dérivable et à dérivée intégrable sur $]a, b[$, si ρ est à valeurs strictement positives et si on a $b - a < 2\pi$, alors

$$\Gamma = \{(\rho(\omega) \cos(\omega), \rho(\omega) \sin(\omega)) : \omega \in [a, b]\}$$

est une courbe simple rectifiable dans \mathbb{R}^2 dont la longueur est égale à

$$L_\Gamma = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (D\rho)^2} d\omega. \square$$

7.4 Intégrale d'une fonction sur un chemin rectifiable

Définitions. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} . Un *découpage à la Riemann* de $[a, b]$ est la donnée

- a) d'un découpage $[a_0, \dots, a_J]$ de $[a, b]$,
- b) pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, d'un point $r_j \in [a_{j-1}, a_j]$.

Il est noté

$$\{[a_0, \dots, a_J], (r_j)_{j \leq J}\}.$$

Une *suite fondamentale de découpages à la Riemann* de $[a, b]$ est une suite de découpages à la Riemann $\{[a_0^{(m)}, \dots, a_{J(m)}^{(m)}], (r_j^{(m)})_{j \leq J(m)}\}$ tels que

$$\sup_{1 \leq j \leq J(m)} |a_j^{(m)} - a_{j-1}^{(m)}| = \varepsilon_m \rightarrow 0.$$

Théorème 7.4.1 Soit $(\gamma, [a, b])$ un chemin rectifiable dans \mathbb{R}^n . Pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\gamma([a, b]))$ et toute suite fondamentale

$$\{[a_0^{(m)}, \dots, a_{J(m)}^{(m)}], (r_j^{(m)})_{j \leq J(m)}\}$$

de découpages à la Riemann de $[a, b]$ telle que

$$\sum_{j=1}^{J(m)} |\gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)})| \rightarrow L_\gamma,$$

la suite

$$\sum_{j=1}^{J(m)} f(\gamma(r_j^{(m)})) |\gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)})|$$

converge et sa limite ne dépend pas de la suite de découpages choisie.

Cette limite est appelée *intégrale de f sur γ* et est notée $\int_\gamma f ds$.

Si en outre, les fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ définissant γ sont continûment dérivables et à dérivée intégrable sur $]a, b[$, alors on a

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |D\gamma(t)| dt.$$

Preuve. Posons

$$\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))|.$$

La première partie résulte aussitôt des considérations suivantes. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la fonction $f(\gamma)$ est uniformément continue sur le compact $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in [a, b] \\ |x - y| \leq 2\eta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(\gamma(x)) - f(\gamma(y))| \leq \frac{\varepsilon}{3(L_\gamma + 1)}.$$

Cela étant, si $\{[a_0, \dots, a_J], (r_j)_{j \leq J}\}$ et $\{[b_0, \dots, b_K], (s_k)_{k \leq K}\}$ sont des découpages à la Riemann subordonnés à η de $[a, b]$ tels que

$$\sum_{j=1}^J |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})|, \quad \sum_{k=1}^K |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| \geq L_\gamma - \frac{\varepsilon}{3(\|f\| + 1)},$$

il vient successivement

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^J f(\gamma(r_j)) |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| - \sum_{k=1}^K f(\gamma(s_k)) |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^J |f(\gamma(r_j))| \left| |\gamma(a_j) - \gamma(a_{j-1})| - L_{\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}} \right| \\ & \quad + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |f(\gamma(r_j)) - f(\gamma(s_k))| L_{\gamma|_{[a_{j-1}, a_j] \cap [b_{k-1}, b_k]}} \\ & \quad + \sum_{k=1}^K |f(\gamma(s_k))| \left| |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| - L_{\gamma|_{[b_{k-1}, b_k]}} \right| \\ & \leq \|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{3(\|f\| + 1)} + \frac{\varepsilon}{3(L_\gamma + 1)} \cdot L_\gamma + \|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{3(\|f\| + 1)} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(en (*), on pose $L_{\gamma|_{I \cap J}} = 0$ si I et J sont des intervalles compacts inclus dans $[a, b]$ dont l'intersection est soit vide, soit réduite à un point).

Passons à la deuxième partie de l'énoncé. De la définition même de $\int_\gamma f ds$, on tire de suite la majoration $\left| \int_\gamma f ds \right| \leq \|f\| \cdot L_\gamma$. On en déduit immédiatement que la fonction $\int_{\gamma|_{[a, t]}} f ds$ est continue sur $[a, b]$. Cela étant, il suffit bien sûr d'établir la formule annoncée sous l'hypothèse supplémentaire que le chemin γ soit \mathcal{C}_1 . Il s'agit là d'une application du théorème de Lebesgue analogue à celle utilisée pour établir la propriété correspondante de L_γ . ■

Proposition 7.4.2 Soient $(\gamma_1, [a_1, b_1])$ et $(\gamma_2, [a_2, b_2])$ deux chemins rectifiables dans \mathbb{R}^n . S'il existe une fonction g appartenant à $\mathcal{C}_0([a_2, b_2])$, strictement monotone et telle que $g([a_2, b_2]) = [a_1, b_1]$ et $\gamma_2 = \gamma_1(g)$, alors il vient

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\gamma_1([a_1, b_1])). \blacksquare$$

Extension. Rien ne s'oppose plus maintenant à l'introduction de l'intégrale d'une fonction f continue sur une courbe simple (resp. de Jordan) rectifiable Γ dans \mathbb{R}^n comme étant $\int_{\gamma} f ds$ où $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ est une représentation paramétrique simple (resp. de Jordan) et rectifiable de Γ puisque ce nombre ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie. On la note $\int_{\Gamma} f ds$.

7.5 Intégrales curvilignes

Théorème 7.5.1 Soit $(\gamma, [a, b])$ un chemin rectifiable dans \mathbb{R}^n .

Pour toute application continue $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et toute suite fondamentale $\{[a_0^{(m)}, \dots, a_{J(m)}^{(m)}], (r_j^{(m)})_{j \leq J(m)}\}$ de découpages à la Riemann de $[a, b]$ telle que $\sum_{j=1}^{J(m)} |\gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)})| \rightarrow L_{\gamma}$, la suite

$$\sum_{j=1}^{J(m)} \left\langle f(\gamma(r_j^{(m)})), \gamma(a_j^{(m)}) - \gamma(a_{j-1}^{(m)}) \right\rangle$$

converge et sa limite ne dépend pas de la suite de découpages choisie.

Cette limite est appelée *intégrale de f le long de γ* et est notée

$$\int_{\gamma} \langle f, dx \rangle \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} \sum_{k=1}^n f_k dx_k.$$

Si, en outre, les fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ définissant γ sont continûment dérivables et à dérivée intégrable sur $]a, b[$, alors il vient

$$\int_{\gamma} \langle f, dx \rangle = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(\gamma(t)) D\gamma_k(t) dt.$$

Preuve. La première partie résulte aussitôt des considérations suivantes. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $f(\gamma)$ est une application uniformément continue sur le compact $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta) \Rightarrow |f(\gamma(x)) - f(\gamma(y))| \leq \frac{\varepsilon}{L_{\gamma} + 1}.$$

Cela étant, si $\{[a_0, \dots, a_J], (r_j)_{j \leq J}\}$ et $\{[b_0, \dots, b_L], (s_l)_{l \leq L}\}$ sont des découpages à la Riemann de $[a, b]$ subordonnés à $\eta/2$, alors, pour tout $k \leq n$, il vient

$$\left| \sum_{j=1}^J f_k(\gamma(r_j))(\gamma_k(a_j) - \gamma_k(a_{j-1})) - \sum_{l=1}^L f_k(\gamma(s_l))(\gamma_k(b_l) - \gamma_k(b_{l-1})) \right| \leq \sum_{m=1}^M \frac{\varepsilon}{L_\gamma + 1} |\gamma(c_m) - \gamma(c_{m-1})| \leq \varepsilon$$

si $[c_0, \dots, c_M]$ est le découpage de $[a, b]$ obtenu en considérant les points a_0, \dots, a_J et b_0, \dots, b_L .

Comme on a évidemment

$$\left| \int_\gamma \langle f, dx \rangle \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \cdot L_\gamma,$$

pour établir la deuxième partie, il suffit bien sûr d'établir la formule annoncée sous l'hypothèse supplémentaire que le chemin γ soit \mathcal{C}_1 . Il s'agit là d'une application, devenue maintenant classique, du théorème de la convergence majorée. ■

La formule utilisée dans la preuve précédente mérite d'être mise en évidence.

Proposition 7.5.2 *Si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin rectifiable dans \mathbb{R}^n et si f est une application continue de $\gamma([a, b])$ dans \mathbb{R}^n , alors on a*

$$\left| \int_\gamma \langle f, dx \rangle \right| \leq \sup_{x \in \gamma([a, b])} |f(x)| \cdot L_\gamma. \blacksquare$$

Proposition 7.5.3 (invariance) a) *Si $(\gamma, [a, b])$ et $(\varphi, [c, d])$ sont deux chemins rectifiables dans \mathbb{R}^n pour lesquels il existe $g \in \mathcal{C}_0([c, d])$ strictement croissant (resp. strictement décroissant) tel que $g([c, d]) = [a, b]$ et $\varphi = \gamma(g)$, alors on a*

$$\int_\gamma \langle f, dx \rangle = \int_\varphi \langle f, dx \rangle \quad \left(\text{resp.} = - \int_\varphi \langle f, dx \rangle \right)$$

pour toute application f continue de $\gamma([a, b])$ dans \mathbb{R}^n .

b) *Soit $(\gamma, [a, b])$ un chemin simple \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^n . Si $[c, d]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} et $g \in \mathcal{C}_1([c, d])$ une fonction telle que $g(c) = a$, $g(d) = b$ (resp. $g(c) = b$, $g(d) = a$) et $g([c, d]) =]a, b[$, alors*

i) $(\gamma(g), [c, d])$ est un chemin \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^n déterminant la même courbe que γ ,

ii) on a

$$\int_\gamma \langle f, dx \rangle = \int_{\gamma(g)} \langle f, dx \rangle \quad \left(\text{resp.} = - \int_{\gamma(g)} \langle f, dx \rangle \right)$$

pour toute application continue f de $\gamma([a, b])$ dans \mathbb{R}^n .

Preuve. a) est clair.
 b.i) est immédiat.
 b.ii) résulte aussitôt du fait que

$$\sum_{j=1}^n f_j(\gamma(g(t))) [D\gamma_j]_{g(t)} Dg(t)$$

est une fonction continue et bornée, donc intégrable, sur $[c, d]$ dont une primitive sur $]c, d[$ est donnée par $F(g)$ si F est une primitive sur $]a, b[$ de la fonction

$$\sum_{j=1}^n f_j(\gamma(s)) D\gamma_j(s)$$

continue et intégrable sur $]a, b[$. ■

Remarque. La présence du signe \pm qui intervient dans les deux propriétés précédentes nous contraint à introduire la notion suivante afin de pouvoir parler d'intégrale le long d'une courbe simple (resp. de Jordan). □

Définition. Soit Γ une courbe simple dans \mathbb{R}^n . Dans l'ensemble des représentations paramétriques simples de Γ , la relation \approx définie par

$$(\gamma, [a, b]) \approx (\varphi, [c, d]) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{la fonction } g \text{ définie sur } [c, d] \text{ par} \\ \gamma(g) = \varphi \text{ est strictement croissante} \end{cases}$$

est bien sûr une relation d'équivalence. Elle détermine deux classes, appelées *orientations de Γ* . Pour les distinguer, on convient d'appeler l'une l'orientation *positive* et l'autre l'orientation *négative de Γ* . On dit qu'une représentation paramétrique simple $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ est *positive* ou *négative* selon l'orientation à laquelle γ appartient.

Ces considérations s'étendent aisément aux courbes de Jordan.

Extension. Rien ne s'oppose plus maintenant à l'introduction de l'intégrale d'une application continue sur une courbe simple (resp. de Jordan) rectifiable et orientée Γ dans \mathbb{R}^n comme étant $\int_{\gamma} \langle f, dx \rangle$ où $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ est une représentation paramétrique simple (resp. de Jordan) positive de Γ . Si l'orientation de Γ est claire, on pose même

$$\int_{\Gamma^+} \langle f, dx \rangle = \int_{\gamma} \langle f, dx \rangle .$$

Remarque. Il arrive bien souvent qu'une courbe simple (resp. de Jordan) orientée Γ dans \mathbb{R}^n puisse être décrite aisément à partir d'un nombre fini de représentations paramétriques partielles (c'est déjà le cas pour toute courbe polygonale). Précisons cette remarque et indiquons son utilisation.

Soit d'une part $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ une représentation paramétrique simple (resp. de Jordan) positive de la courbe simple (resp. de Jordan) Γ . Soient d'autre part un découpage non trivial $[a_0, \dots, a_J]$ de $[a, b]$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, $x = \varphi_j(t)$ pour $t \in [c_j, d_j]$ une représentation paramétrique simple de $\gamma([a_{j-1}, a_j])$ telle que $\varphi_j(c_j) = \gamma(a_{j-1})$ et $\varphi_j(d_j) = \gamma(a_j)$. Cela étant, si $[b_0, \dots, b_J]$ est un découpage de l'intervalle compact $[a', b']$ de \mathbb{R} , l'application $(\varphi, [a', b'])$ définie par

$$\varphi(t) = \varphi_j \left(\frac{c_j b_j - d_j b_{j-1}}{b_j - b_{j-1}} + \frac{d_j - c_j}{b_j - b_{j-1}} t \right), \quad \forall t \in [b_{j-1}, b_j], \quad \forall j \leq J,$$

donne aussi lieu à une représentation paramétrique simple positive de Γ . De plus, il vient a) $\Gamma = \Gamma_\varphi$,

b) γ est rectifiable si et seulement si chacun des φ_j l'est, ce qui a lieu si et seulement si φ l'est, auquel cas on a

$$L_\gamma = L_\varphi = L_{\varphi_1} + \dots + L_{\varphi_J},$$

c) si γ est rectifiable, on a

$$\int_\gamma f ds = \int_\varphi f ds = \sum_{j=1}^J \int_{\varphi_j} f ds$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$,

d) si γ est rectifiable, on a

$$\int_\gamma \langle f, dx \rangle = \int_\varphi \langle f, dx \rangle = \sum_{j=1}^J \int_{\varphi_j} \langle f, dx \rangle$$

pour toute application continue f de Γ dans \mathbb{R}^n . \square

7.6 Formule de Gauss-Green dans \mathbb{R}^2

Définitions. Un compact parallèle à l'axe des x (resp. à l'axe des y) dans \mathbb{R}^2 est une partie de \mathbb{R}^2 qui peut s'écrire

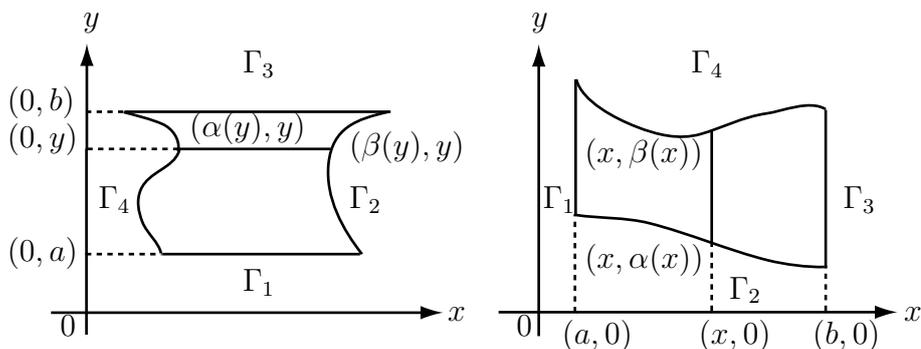
$$\{(x, y) : a \leq y \leq b, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

$$\text{(resp. } \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\})$$

avec

i) $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_0([a, b]) \cap \mathcal{C}_1(]a, b[)$ tels que $D\alpha, D\beta \in L^1(]a, b[)$, $\alpha(a) \leq \beta(a)$, $\alpha(b) \leq \beta(b)$ et $\alpha(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.



On vérifie de suite que de tels ensembles K sont des parties compactes de \mathbb{R}^2 , non vides et telles que $K = K^{\circ, -}$, dont la frontière est une courbe de Jordan rectifiable.

Le *bord orienté positivement* d'un tel compact K , noté ∂K , est la frontière de K considérée comme étant la courbe de Jordan rectifiable décrite par les courbes orientées suivantes

i) si K est parallèle à l'axe des x :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 & : (x, y) = (\alpha(a) + t(\beta(a) - \alpha(a)), a), & (t \in [0, 1]), \\ \Gamma_2 & : (x, y) = (\beta(t), t), & (t \in [a, b]), \\ \Gamma_3 & : (x, y) = (\beta(b) + t(\alpha(b) - \beta(b)), b), & (t \in [0, 1]), \\ \Gamma_4 & : (x, y) = (\alpha(a + b - t), a + b - t), & (t \in [a, b]), \end{aligned}$$

où il faut supprimer Γ_1 si on a $\alpha(a) = \beta(a)$ et supprimer Γ_3 si $\alpha(b) = \beta(b)$,

ii) si K est parallèle à l'axe des y :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 & : (x, y) = (a, \beta(a) + t(\alpha(a) - \beta(a))), & (t \in [0, 1]), \\ \Gamma_2 & : (x, y) = (t, \alpha(t)), & (t \in [a, b]), \\ \Gamma_3 & : (x, y) = (b, \alpha(b) + t(\beta(b) - \alpha(b))), & (t \in [0, 1]), \\ \Gamma_4 & : (x, y) = (a + b - t, \beta(a + b - t)), & (t \in [a, b]), \end{aligned}$$

où il faut supprimer Γ_1 si on a $\alpha(a) = \beta(a)$ et supprimer Γ_3 si $\alpha(b) = \beta(b)$.

Théorème 7.6.1 (Gauss-Green) Soit K un compact de \mathbb{R}^2 , à la fois parallèle à l'axe des x et à l'axe des y . Si les fonctions P et Q appartiennent à $\mathcal{C}_1(\Omega)$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant K , alors on a

$$\iint_K (D_x Q - D_y P) dx dy = \int_{\partial K} (P dx + Q dy).$$

Preuve. Nous allons utiliser pour K et ∂K les notations introduites dans les définitions qui précèdent.

Etablissons que, si K est un compact de \mathbb{R}^2 parallèle à l'axe des x , on a

$$\iint_K D_x Q \, dx \, dy = \int_{\partial K} Q \, dy;$$

comme on établit de même l'égalité

$$\iint_K D_y P \, dx \, dy = - \int_{\partial K} P \, dx,$$

si K est un compact de \mathbb{R}^2 parallèle à l'axe des y , la conclusion s'ensuit aussitôt.

D'une part, K étant un compact parallèle à l'axe des x dans \mathbb{R}^2 et $D_x Q$ étant une fonction intégrable sur K , le théorème de Fubini donne

$$\iint_K D_x Q \, dx \, dy = \int_a^b dt \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} [D_x Q]_{(x,t)} \, dx = \int_a^b (Q(\beta(t), t) - Q(\alpha(t), t)) \, dt;$$

en effet, pour tout $t \in]a, b[$, $[D_x Q]_{(x,t)}$ est une fonction continue et intégrable sur $]\alpha(t), \beta(t)[$, dont $Q(x, t)$ est une primitive.

D'autre part, $(0, Q)$ est une application continue de la courbe de Jordan rectifiable et orientée ∂K dans \mathbb{R}^2 ; on a donc

$$\int_{\partial K} \langle (0, Q), (dx, dy) \rangle = \int_{\partial K} Q \, dy = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} Q \, dy$$

(où $\int_{\Gamma_j} Q \, dy$ est à remplacer par 0 si on doit supprimer Γ_j) avec

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} Q \, dy &= \int_0^1 Q(\alpha(a) + t(\beta(a) - \alpha(a)), a) D_t a \, dt = 0, \\ \int_{\Gamma_2} Q \, dy &= \int_a^b Q(\beta(t), t) D_t t \, dt, \\ \int_{\Gamma_3} Q \, dy &= \int_0^1 Q(\beta(b) + t(\alpha(b) - \beta(b)), b) D_t b \, dt = 0, \\ \int_{\Gamma_4} Q \, dy &= \int_a^b Q(\alpha(a + b - t), a + b - t) D_t (a + b - t) \, dt = - \int_a^b Q(\alpha(t), t) \, dt. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

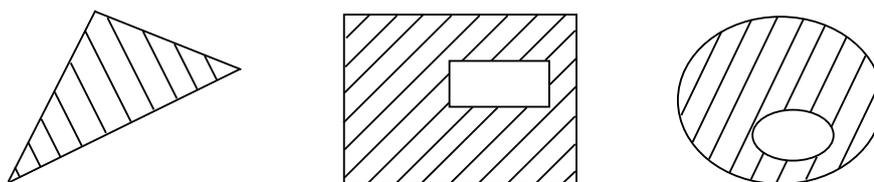
Remarque. Comme exemples de compacts de \mathbb{R}^2 qui sont à la fois parallèles à l'axe des x et à l'axe des y , citons

- i) les intervalles compacts de \mathbb{R}^2 ,
- ii) les disques fermés de \mathbb{R}^2 et, plus généralement, les ellipses fermées de \mathbb{R}^2 pour autant que leurs axes soient parallèles aux axes des coordonnées.

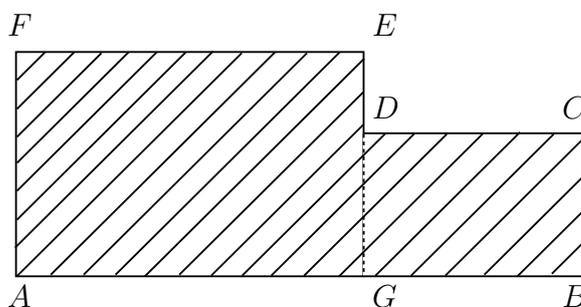
Extensions. Signalons que l'hypothèse formulée sur K dans la formule de Gauss-Green dans \mathbb{R}^2 peut être sensiblement affaiblie.

i) Il suffit que K soit un compact régulier de \mathbb{R}^2 dont l'intérieur est connexe et dont la frontière est une courbe de Jordan rectifiable. (Cf. T.M. Aspostol: *Mathematical analysis*, (1957)).

ii) En recourant un nombre fini de fois à la formule de Gauss-Green dans \mathbb{R}^2 , on étend son application à des compacts tels que



Par exemple, si K est l'ensemble hachuré ci-après,



notons K_1 l'intervalle compact de sommets A, G, E, F et K_2 l'intervalle compact de sommets G, B, C, D . On a alors

$$\iint_K (D_x Q - D_y P) dx dy = \iint_{K_1} + \iint_{K_2} (D_x Q - D_y P) dx dy$$

et on peut appliquer la formule de Gauss-Green dans \mathbb{R}^2 à K_1 et à K_2 . Vis-à-vis de K_1 , le segment d'extrémités $G = (a, b)$, $D = (a, c)$ intervient pour donner $\int_b^c Q(a, t) dt$ et vis-à-vis de K_2 , pour donner $-\int_b^c Q(a, t) dt$; ces deux contributions s'annulent.

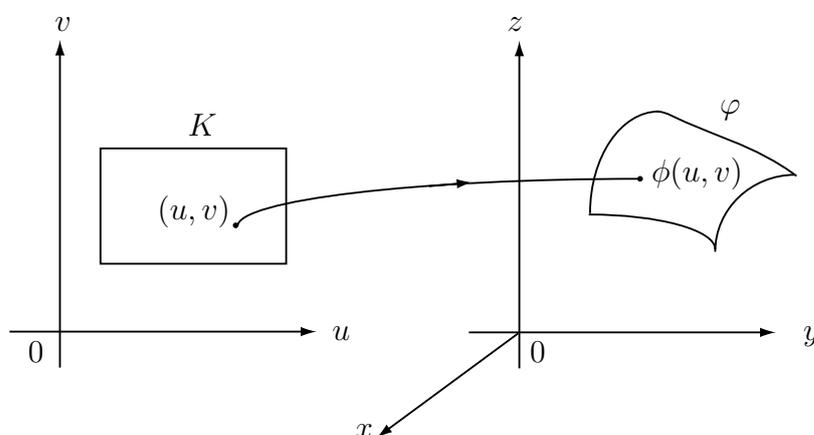
7.7 Couvertures et surfaces dans \mathbb{R}^3

Définitions. Une *couverture dans \mathbb{R}^3* est la donnée

a) d'un intervalle compact K de \mathbb{R}^2 ,

b) de trois fonctions réelles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}_1(U)$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant K , telles que l'application $\varphi: K^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit injective et qu'il existe deux fonctions réelles $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_1(\Omega)$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant $\varphi(K^\circ)$, telles que $\psi(\varphi(u, v)) = (u, v)$ pour tout $(u, v) \in K^\circ$.

Cette couverture est notée (φ, K) .



Une *surface dans \mathbb{R}^3* est une partie S de \mathbb{R}^3 pour laquelle il existe une couverture (φ, K) dans \mathbb{R}^3 telle que $S = \varphi(K)$. L'équation

$$x = \varphi(u, v) \text{ pour } (u, v) \in K$$

porte alors le nom de *représentation paramétrique de la surface S* . On dit aussi que S est la surface *déterminée par la couverture (φ, K)* .

Remarques. a) La distinction entre “couverture” et “surface” est à rapprocher de celle qui existe entre “chemin” et “courbe”.

b) On vérifie de suite que *toute surface dans \mathbb{R}^3 est compacte*.

c) En plus des exemples fondamentaux qui suivent, nous allons donner au paragraphe suivant de nombreux exemples de surfaces dans \mathbb{R}^3 .

Exemple. *Tout parallélogramme dans \mathbb{R}^3 est une surface.* Le parallélogramme \mathcal{P} de sommet P et de côtés a et b en P peut s'écrire $\mathcal{P} = \varphi(K)$ où K est égal à $[0, 1] \times [0, 1]$ et où $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est défini par $\varphi(u, v) = P + ua + vb$.

Pour conclure, il suffit de vérifier que (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 . Bien sûr, K est un intervalle compact de \mathbb{R}^2 . Les fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 s'écrivent explicitement $\varphi(u, v) = P_j + a_j u + b_j v$; elles sont donc réelles et appartiennent à

$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^2)$. L'injectivité de $\varphi: K^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ est assurée par le fait que a et b ne sont pas parallèles. Pour obtenir les fonctions ψ_1 et ψ_2 , il suffit de procéder comme suit. On choisit d'abord $c \in \mathbb{R}^3$ tel que a , b et c soient linéairement indépendants. Cela étant, la matrice $A = (a, b, c)$ est telle que $(x, y, z) = A(u, v, w) + P$ est un changement de variable linéaire donc régulier d'ordre infini entre \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^3 qui s'inverse en

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y, z) \\ \lambda_2(x, y, z) \\ \lambda_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Il reste alors à constater que les fonctions λ_1 et λ_2 appartiennent à $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^3)$ et que $\Omega = \mathbb{R}^3$, $\psi_1 = \lambda_1$ et $\psi_2 = \lambda_2$ conviennent. \square

Exemple. *Tout triangle de \mathbb{R}^3 est une surface.* Le triangle \mathcal{T} de sommet P et de côtés a et b en P peut s'écrire $\mathcal{T} = \varphi(K)$ où K est égal à $[0, 1] \times [0, 1]$ et où $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est défini par $\varphi(u, v) = P + ua + v(1 - u)b$.

Pour conclure, il suffit de vérifier que (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 , ce qui est direct. L'injectivité de $\varphi: K^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ est assurée par le fait que a et b ne sont pas parallèles. Pour obtenir ψ_1 et ψ_2 , on choisit d'abord $c \in \mathbb{R}^3$ tel que a , b et c soient linéairement indépendants et on procède comme dans l'exemple précédent pour obtenir les fonctions λ_1 , λ_2 et $\lambda_3 \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^3)$. Il reste alors à vérifier que $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{P + a + vb + wc: v, w \in \mathbb{R}\}$, $\psi_1 = \lambda_1$ et $\psi_2 = \lambda_2/(1 - \lambda_2)$ conviennent. \square

Exemple. *Toute sphère dans \mathbb{R}^3 est une surface.* La sphère \mathcal{S} de centre P et de rayon $R > 0$ s'écrit $\mathcal{S} = \varphi(K)$ où K est égal à $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ et où $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est défini par

$$\varphi(u, v) = P + R(\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u)).$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 , ce qui est direct. On peut poser $\Omega = P + \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ et définir l'application $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\psi(P + R(\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))) = (u, v)$$

pour tous $r > 0$, $u \in]0, \pi[$ et $v \in]0, 2\pi[$. \square

7.8 Aire d'une surface

Proposition 7.8.1 *Si les couvertures $(\varphi^{(1)}, K_1)$ et $(\varphi^{(2)}, K_2)$ dans \mathbb{R}^3 déterminent la même surface \mathcal{S} , on a*

$$\iint_{K_1} |D_u \varphi^{(1)} \wedge D_v \varphi^{(1)}| du dv = \iint_{K_2} |D_u \varphi^{(2)} \wedge D_v \varphi^{(2)}| du dv.$$

Preuve. * \rightarrow Ces intégrales ont bien sûr un sens. Si on pose

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus (\varphi^{(1)}(K_1^\bullet) \cup \varphi^{(2)}(K_2^\bullet))$$

puis

$$\omega_1 = (\varphi^{(1)}|_{K_1})^{-1}(\mathcal{S}') \quad \text{et} \quad \omega_2 = (\varphi^{(2)}|_{K_2})^{-1}(\mathcal{S}'),$$

on vérifie directement que ω_1 et ω_2 sont des ouverts de \mathbb{R}^2 , inclus dans K_1° et K_2° respectivement. Cela étant, $\psi^{(1)}(\varphi^{(2)}): \omega_2 \rightarrow \omega_1$ est un changement de variable régulier d'ordre ≥ 1 et, comme on a

$$\begin{aligned} [D_u \varphi^{(1)} \wedge D_v \varphi^{(1)}]_{\psi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}} \cdot \det \frac{\partial(\psi^{(1)} \circ \varphi^{(2)})}{\partial(u', v')} \\ = D_{u'} \varphi^{(1)}(\psi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}) \wedge D_{v'} \varphi^{(1)}(\psi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}) \end{aligned}$$

avec $\varphi^{(1)}(\psi^{(1)} \circ \varphi^{(2)}) = \varphi^{(2)}$ sur ω_2 , il vient

$$\iint_{\omega_1} |D_u \varphi^{(1)} \wedge D_v \varphi^{(1)}| \, du \, dv = \iint_{\omega_2} |D_{u'} \varphi^{(2)} \wedge D_{v'} \varphi^{(2)}| \, du' \, dv'.$$

D'où la conclusion car, en recourant au Théorème 2.2.3, on peut établir que les ensembles $K_1 \setminus \omega_1$ et $K_2 \setminus \omega_2$ sont négligeables. $\leftarrow * \blacksquare$

Définition. Il est donc licite de définir l'*aire*, notée $A_{\mathcal{S}}$, d'une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 par

$$A_{\mathcal{S}} = \iint_K |D_u \varphi \wedge D_v \varphi| \, du \, dv$$

où (φ, K) est une couverture de \mathbb{R}^3 déterminant \mathcal{S} car ce nombre est indépendant de la couverture choisie.

Théorème 7.8.2 *L'aire d'une surface est indépendante du choix du système d'axes de coordonnées.* \blacksquare

En recourant au paragraphe précédent, on obtient directement les résultats suivants.

Exemple. *L'aire du parallélogramme de sommet P et de côtés a et b en P dans \mathbb{R}^3 est égale à $|a \wedge b|$.* \square

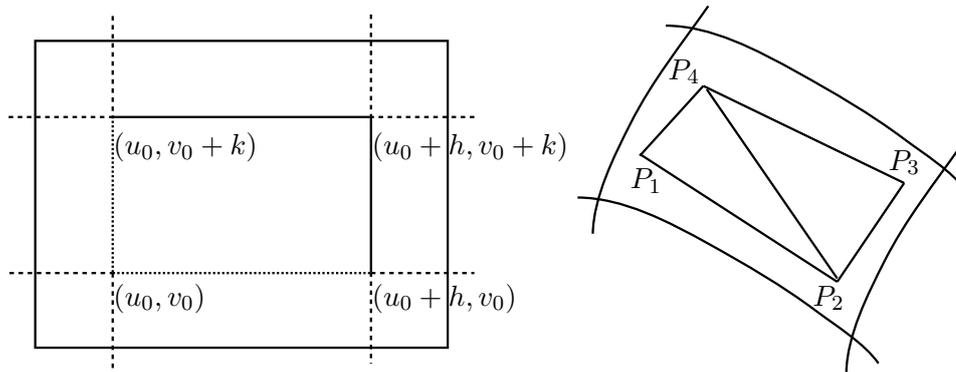
Exemple. *L'aire du triangle de sommet P et de côtés a et b en P dans \mathbb{R}^3 est égale à $\frac{1}{2} |a \wedge b|$.* \square

Exemple. L'aire de la sphère de centre P et de rayon $R > 0$ dans \mathbb{R}^3 est égale à $4\pi R^2$. \square

Interprétation. Soit \mathcal{S} une surface dans \mathbb{R}^3 et soit (φ, K) une couverture dans \mathbb{R}^3 déterminant \mathcal{S} . Soit en outre $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite numérique réelle strictement positive telle que $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Soit enfin, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, un réseau \mathcal{R}_m de \mathbb{R}^2 en semi-intervalles dont le diamètre est majoré par ε_m .

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, définissons le nombre A_m de la manière suivante. Pour tout semi-intervalle $I =]u_0, u_0 + h] \times]v_0, v_0 + k]$ appartenant à \mathcal{R}_m et tel que $I^- \subset K^\circ$, les points $P_1 = \varphi(u_0, v_0)$, $P_2 = \varphi(u_0 + h, v_0)$, $P_3 = \varphi(u_0 + h, v_0 + k)$ et $P_4 = \varphi(u_0, v_0 + k)$ appartiennent à \mathcal{S} et déterminent les triangles \mathcal{I}_1 de sommets P_1, P_2, P_4 et \mathcal{I}_2 de sommets P_2, P_3, P_4 . Si nous notons σ_I la somme des aires de ces triangles \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 , A_m est défini comme étant la somme de ces nombres σ_I .

Cela étant, on a $A_m \rightarrow A_{\mathcal{S}}$.



* \rightarrow Pour établir cette interprétation, on procède comme suit. Avec les notations utilisées ci-dessus, on a

$$\sigma_I = \frac{1}{2} \left(|(\varphi(u_0 + h, v_0) - \varphi(u_0, v_0)) \wedge (\varphi(u_0, v_0 + k) - \varphi(u_0, v_0))| + |(\varphi(u_0 + h, v_0) - \varphi(u_0 + h, v_0 + k)) \wedge (\varphi(u_0, v_0 + k) - \varphi(u_0 + h, v_0 + k))| \right)$$

et, vu le théorème des accroissements finis, il existe $h_1, \dots, h_6 \in]0, h[$ et $k_1, \dots, k_6 \in]0, k[$ tels que

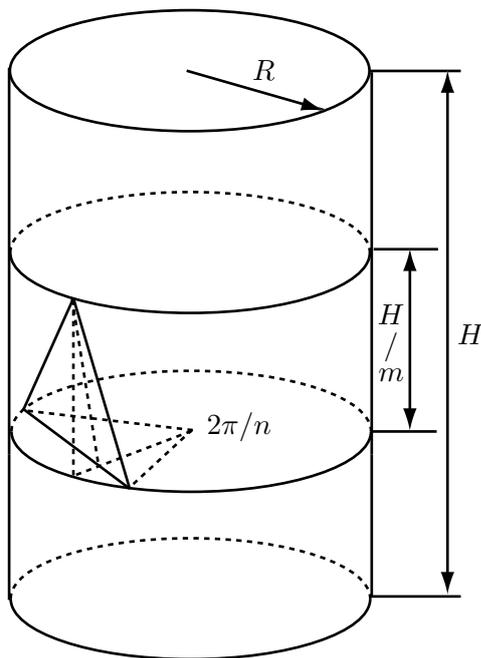
$$\sigma_I = \frac{1}{2} h k \left(\left| \sum_{j=1}^3 [D_u \varphi_j]_{(u_0 + h_j, v_0)} e_j \wedge \sum_{l=1}^3 [D_v \varphi_l]_{(u_0, v_0 + k_l)} e_l \right| + \left| \sum_{j=1}^3 [D_v \varphi_j]_{(u_0 + h, v_0 + k_{3+j})} e_j \wedge \sum_{l=1}^3 [D_u \varphi_l]_{(u_0 + h_{3+l}, v_0 + k)} e_l \right| \right).$$

Si on note \mathcal{T}_1 le triangle de sommets (u_0, v_0) , $(u_0 + h, v_0)$, $(u_0, v_0 + k)$ et \mathcal{T}_2 le triangle de sommets $(u_0 + h, v_0)$, $(u_0 + h, v_0 + k)$, $(u_0, v_0 + k)$, alors σ_I est l'intégrale sur \mathbb{R}^2 de la fonction

$$g_I = \left| \sum_{j=1}^3 [D_u \varphi_j]_{(u_0+h_j, v_0)} e_j \wedge \sum_{l=1}^3 [D_v \varphi_l]_{(u_0, v_0+k_l)} e_l \right| \chi_{\mathcal{T}_1} \\ + \left| \sum_{j=1}^3 [D_v \varphi_j]_{(u_0+h, v_0+k_{3+j})} e_j \wedge \sum_{l=1}^3 [D_u \varphi_l]_{(u_0+h_{3+l}, v_0+k)} e_l \right| \chi_{\mathcal{T}_2}.$$

Pour conclure, il suffit alors d'appliquer le théorème de la convergence majorée à la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ où, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, f_m est défini comme étant la somme sur les semi-intervalles $I \in \mathcal{R}_m$ tels que $I^- \subset K^\circ$ des fonctions g_I correspondantes. $\leftarrow * \blacksquare$

Remarque. Dans l'interprétation précédente, il convient d'insister sur le fait que les triangles sont déterminés par des réseaux de \mathbb{R}^2 . Voici un exemple dû à H. A. Schwarz qui montre à quels déboires on peut arriver si on néglige ce fait.



Soit \mathcal{S} un cylindre droit de révolution, de rayon R et de hauteur H . Etant donné des entiers m et n , on considère les $m + 1$ circonférences obtenues en prenant les deux bases et $m - 1$ plans équidistants. Sur chacune de ces circonférences, on considère n points, sommets d'un n -gone régulier, de telle sorte que la génératrice du cylindre qui passe par un de ces points, intersecte la circonférence suivante au milieu de l'arc déterminé par deux

de ces points. Au total, ces points déterminent $2mn$ triangles isocèles égaux; leur base vaut bien sûr $2R \sin(\pi/n)$ tandis que leur hauteur est égale à

$$h = \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + R^2(1 - \cos(\pi/n))^2}.$$

Dès lors, la somme de leurs surfaces vaut

$$2\pi R \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \sqrt{H^2 + \frac{\pi^4 R^2 m^2}{4n^4} \left(\frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\right)^4},$$

expression qui ne converge vers $2\pi RH$ que si $m/n^2 \rightarrow 0!$ □

Exemple. Aire d'une surface plane

Si \mathcal{S} est une surface dans \mathbb{R}^3 incluse dans le plan π et si on munit π d'un système d'axes cartésiens, on peut établir que l'aire de \mathcal{S} est égale à la mesure de \mathcal{S} considéré comme partie compacte de l'espace \mathbb{R}^2 ainsi déterminé. * \rightarrow Un changement de système d'axes dans \mathbb{R}^3 ne modifiant pas l'aire de \mathcal{S} , on peut supposer avoir $\varphi_3 = 0$. Cela étant, (φ_1, φ_2) établit un changement de variable régulier d'ordre ≥ 1 entre K° et son image. De plus, K^\bullet est négligeable et $(\varphi_1, \varphi_2)(K^\bullet)$ est négligeable vu le Théorème 2.2.3. \leftarrow *

De la sorte, tout revient à calculer la mesure d'un compact de \mathbb{R}^2 . □

Exercice. Calculer l'aire de la surface plane \mathcal{S} limitée par une arcade de cycloïde et sa base.

Suggestion. A un changement de système d'axes près (ce qui ne modifie pas son aire), on vérifie de suite que (φ, K) défini par $K = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ et

$$\varphi(u, v) = (R(u - \sin(u)), vR(1 - \cos(u)), 0), \quad \text{pour } (u, v) \in K,$$

est une couverture dans \mathbb{R}^3 qui détermine \mathcal{S} . Dès lors, on obtient aisément

$$A_{\mathcal{S}} = R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^1 (1 - \cos(u))^2 dv = 3\pi R^2. \square$$

Exemple. Aire d'une surface déterminée par une représentation paramétrique cartésienne

Soient K un intervalle compact de \mathbb{R}^2 et f un élément réel de $\mathcal{C}_1(U)$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant K . On vérifie de suite que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (u, v, f(u, v)) \quad \text{pour } (u, v) \in K, \\ (\text{resp. } &= (u, f(u, v), v) \quad \text{pour } (u, v) \in K; \\ &= (f(u, v), u, v) \quad \text{pour } (u, v) \in K) \end{aligned}$$

est une représentation paramétrique d'une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 , appelée représentation paramétrique cartésienne de \mathcal{S} , dont l'aire est donnée par

$$A_{\mathcal{S}} = \iint_K \sqrt{1 + (D_u f)^2 + (D_v f)^2} du dv. \square$$

Exemple. Aire d'une surface cylindrique

Une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 est *cylindrique* si elle est déterminée par une couverture (φ, K) vérifiant les conditions suivantes:

- a) e est un vecteur unitaire dans \mathbb{R}^3 ,
- b) Γ est une courbe simple (resp. de Jordan) \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^3 de représentation paramétrique simple (resp. de Jordan) $(x, y, z) = \gamma(u)$ pour $u \in [a, b]$,
- c) $g \in \mathcal{C}_1([a, b])$ est une fonction réelle telle que $g(u) > 0$ pour tout $u \in]a, b[$,
- d) $K = [a, b] \times [0, 1]$,
- e) $\varphi(u, v) = \gamma(u) + vg(u)e$ pour tout $(u, v) \in K$.

On dit alors que \mathcal{S} est une surface cylindrique *parallèle* à e , de *base* Γ et de *hauteur* g .

Comme on a $D_u \varphi = D_u \gamma + v D_u g e$ et $D_v \varphi = g(u)e$ en tout point de K , il vient

$$A_{\mathcal{S}} = \int_a^b g(u) |D_u \gamma \wedge e| du. \square$$

Exercice. L'aire latérale d'un cylindre droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égale à $2\pi RH$.

Suggestion. A un changement de système d'axes près (ce qui ne modifie pas son aire), on peut prendre

$$e = (0, 0, 1),$$

$$\gamma(u) = (R \cos(u), R \sin(u), 0) \text{ et } [a, b] = [0, 2\pi],$$

$$g(u) = H, \quad \forall u \in [0, 2\pi].$$

On justifie de suite qu'il s'agit d'une surface cylindrique \mathcal{S} telle que

$$A_{\mathcal{S}} = \int_0^{2\pi} RH |(-\sin(u), \cos(u), 0) \wedge e| du = 2\pi RH. \square$$

Exemple. Aire d'une surface conique

Une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 est *conique* si elle est déterminée par une couverture (φ, K) vérifiant les conditions suivantes:

- a) S est un point de \mathbb{R}^3 ,
- b) Γ est une courbe simple (resp. de Jordan) \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^3 ne contenant pas S et de représentation paramétrique simple (resp. de Jordan) $(x, y, z) = \gamma(u)$ pour $u \in [a, b]$,

c) $K = [a, b] \times [0, 1]$,

d) $\varphi(u, v) = S + v(\gamma(u) - S)$ pour tout $(u, v) \in K$.

On dit alors que \mathcal{S} est une surface conique de *sommet* S et de *base* Γ .

Comme on a $D_u\varphi = v D_u\gamma(u)$ et $D_v\varphi = \gamma(u) - S$ pour tout $(u, v) \in K$, il vient

$$A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \int_a^b |D_u\gamma(u) \wedge (\gamma(u) - S)| du. \square$$

Exercice. L'aire latérale d'un cône droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égale à $\pi R(R^2 + H^2)^{1/2}$.

Suggestion. A un changement de système d'axes près (ce qui ne modifie pas son aire), on peut prendre $S = (0, 0, H)$ et $\gamma(u) = (R \cos(u), R \sin(u), 0)$ pour $u \in [0, 2\pi]$. On justifie de suite qu'il s'agit d'une surface conique \mathcal{S} telle que

$$A_{\mathcal{S}} = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} |(-\sin(u), \cos(u), 0) \wedge (R \cos(u), R \sin(u), -H)| du = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}. \square$$

Exercice. L'aire latérale d'un cône droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égale à $\pi R(R^2 + H^2)^{1/2}$.

Suggestion. A un changement de système d'axes près (ce qui ne modifie pas son aire), on peut prendre $S = (0, 0, H)$ et $\gamma(u) = (R \cos(u), R \sin(u), 0)$ pour $u \in [0, 2\pi]$. On justifie de suite qu'il s'agit d'une surface conique \mathcal{S} telle que

$$A_{\mathcal{S}} = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} |(-\sin(u), \cos(u), 0) \wedge (R \cos(u), R \sin(u), -H)| du = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}. \square$$

Exemple. Aire d'une surface de révolution

Une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 est de *révolution* si, à un changement de système d'axes près (ce qui ne modifie pas son aire), elle est déterminée par une couverture (φ, K) vérifiant les conditions suivantes:

a) Γ est une courbe simple (resp. de Jordan) \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^3 , de représentation paramétrique simple (resp. de Jordan) $(x, y, z) = \gamma(u)$ pour $u \in [a, b]$,

b) $K = [a, b] \times [0, 2\pi]$,

c) $\varphi(u, v) = (|\gamma(u) \wedge e| \cos(v), |\gamma(u) \wedge e| \sin(v), \langle \gamma(u), e \rangle)$ pour tout $(u, v) \in K$ avec $e = (0, 0, 1)$.

On obtient directement

$$A_{\mathcal{S}} = 2\pi \int_a^b |\gamma(u) \wedge e| \sqrt{(D_u|\gamma \wedge e|)^2 + (\langle D_u\gamma, e \rangle)^2} du.$$

Cas particuliers. Le plus souvent, on choisit pour Γ la trace de \mathcal{S} dans le demi-plan $\{(0, y, z) : y \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$.

1. Si Γ admet une représentation paramétrique cartésienne, c'est-à-dire du type $(x, y, z) = (0, y(u), u)$ pour $u \in [a, b]$, avec $y(u) \in \mathcal{C}_1([a, b])$ et $y(u) \geq 0$ pour tout $u \in [a, b]$, il vient

$$A_{\mathcal{S}} = 2\pi \int_a^b y(u) \sqrt{1 + (D_u y)^2} du.$$

2. Si Γ admet une représentation paramétrique polaire, c'est-à-dire du type $(x, y, z) = (0, \rho(\omega) \cos(\omega), \rho(\omega) \sin(\omega))$ pour $\omega \in [a, b]$, avec $-\pi/2 \leq a < b \leq \pi/2$, $\rho(\omega) \in \mathcal{C}_1([a, b])$ et $\rho(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in [a, b]$, il vient

$$A_{\mathcal{S}} = 2\pi \int_a^b \rho(\omega) \cos(\omega) \sqrt{\rho^2(\omega) + (D_{\omega} \rho)^2} d\omega. \square$$

Exercice. Traiter comme surfaces de révolution les deux exercices précédents. \square

Exercice. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation d'une arcade de cycloïde autour de sa base.

Suggestion. On prend

$$(x, y, z) = (0, R(1 - \cos(u)), R(u - \sin(u))) \text{ pour } u \in [0, 2\pi],$$

comme représentation paramétrique de l'arcade de cycloïde. On justifie ensuite qu'on a une surface de révolution telle que

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{S}} &= 2\pi \int_0^{2\pi} R(1 - \cos(u)) \sqrt{R^2 \sin^2(u) + R^2(1 - \cos(u))^2} du \\ &= 8\pi R^2 \int_0^{2\pi} \sin^3(u/2) du = 16\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin(u) \cdot (1 - \cos^2(u)) du = \frac{64}{3} \pi R^2. \square \end{aligned}$$

Exemple. Aire d'une surface sphérique

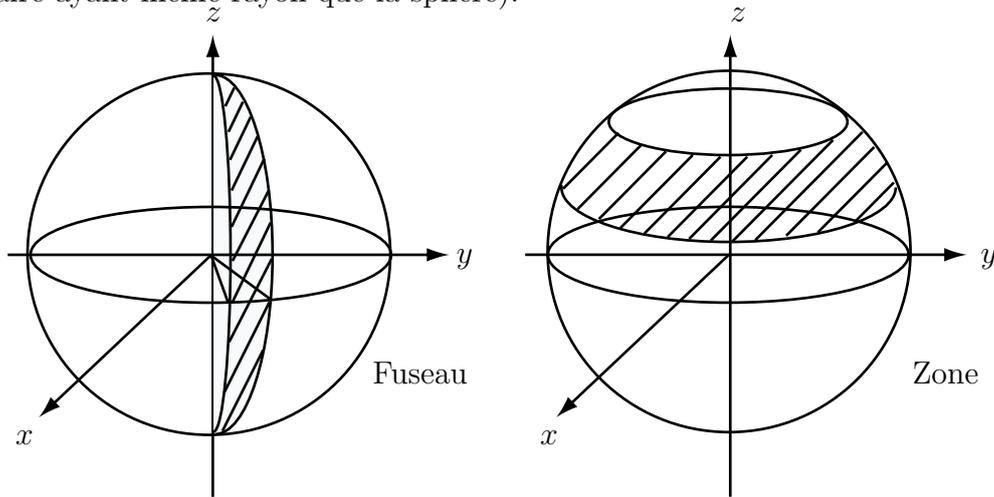
Nous savons que la sphère de centre P et de rayon $R > 0$ dans \mathbb{R}^3 est déterminée par la couverture (φ, K) où K est égal à $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ et où φ est défini sur \mathbb{R}^2 par

$$\varphi(u, v) = P + R(\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u)). \quad (*)$$

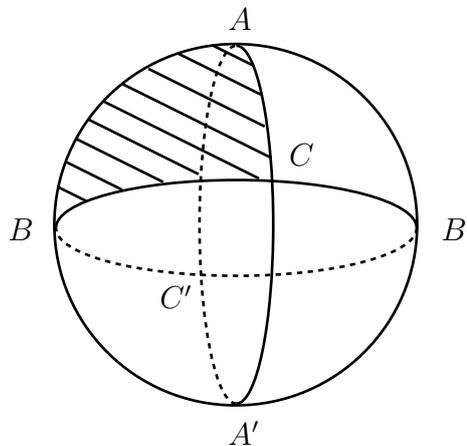
a) **Cas des fuseaux.** Un *fuseau* de la sphère de centre P et de rayon R dans \mathbb{R}^3 est une partie \mathcal{S} de cette sphère qui, à un changement d'axes près (ce qui ne modifie pas son aire), est déterminée par une couverture du type $(*)$ avec $K = [0, \pi] \times [\varphi_0, \varphi_1]$. Son aire est par conséquent égale à $2R^2(\varphi_1 - \varphi_0)$.

b) **Cas des zones.** Une *zone* de la sphère de centre P et de rayon R dans \mathbb{R}^3 est une partie \mathcal{S} de cette sphère qui, à un changement d'axes près (ce qui ne modifie pas

son aire), est déterminée par une couverture du type (*) avec $K = [\theta_0, \theta_1] \times [0, 2\pi]$. Son aire est par conséquent égale à $2\pi R^2(\cos(\theta_0) - \cos(\theta_1))$. (Si on remarque que $R \cos(\theta_0)$ et $R \cos(\theta_1)$ sont les ordonnées des “côtés” de la zone, on voit que son aire est égale à celle d’un cylindre droit de même hauteur que la zone et de base circulaire ayant même rayon que la sphère).



c) **Cas des triangles sphériques.** *L’aire du triangle sphérique ABC est égale à $R^2(A + B + C - \pi)$.*



* \rightarrow En considérant les grands cercles qui déterminent le triangle sphérique ABC et en considérant les points A' , B' et C' diamétralement opposés respectivement à A , B et C , on met en évidence différents triangles sphériques qui donnent lieu aux égalités suivantes:

$$\begin{aligned} A_{\text{tr}_{ABC}} + A_{\text{tr}_{A'BC}} &= A_{\text{fuseau}_A}, \\ A_{\text{tr}_{ABC}} + A_{\text{tr}_{AB'C}} &= A_{\text{fuseau}_B}, \\ A_{\text{tr}_{ABC}} + A_{\text{tr}_{ABC'}} &= A_{\text{fuseau}_C}. \end{aligned}$$

Si on remarque alors que l'aire du triangle sphérique ABC' est égale à celle du triangle sphérique $A'B'C$ et si on note que la somme des aires des triangles sphériques ABC , $A'BC$, $A'B'C$ et $AB'C$ est égale à l'aire d'une demi-sphère, on obtient directement le résultat annoncé en sommant membre à membre les trois égalités précédentes. $\leftarrow * \square$

7.9 Intégrale d'une fonction sur une surface

Proposition 7.9.1 *Si les couvertures $(\varphi^{(1)}, K^{(1)})$ et $(\varphi^{(2)}, K^{(2)})$ dans \mathbb{R}^3 déterminent la même surface \mathcal{S} et si f est une fonction continue sur \mathcal{S} , on a*

$$\begin{aligned} \iint_{K^{(1)}} f(\varphi^{(1)}(u, v)) |D_u \varphi^{(1)} \wedge D_v \varphi^{(1)}| \, du \, dv \\ = \iint_{K^{(2)}} f(\varphi^{(2)}(u, v)) |D_u \varphi^{(2)} \wedge D_v \varphi^{(2)}| \, du \, dv. \end{aligned}$$

Preuve. $* \rightarrow$ La preuve découle aussitôt de celle du cas $f = \chi_{\mathcal{S}}$ donnée au paragraphe précédent. $\leftarrow * \blacksquare$

Définition. Il est donc licite de définir l'intégrale de $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{S})$ sur la surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 par

$$\iint_{\mathcal{S}} f \, d\sigma = \iint_K f(\varphi(u, v)) |D_u \varphi \wedge D_v \varphi| \, du \, dv$$

où (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 déterminant \mathcal{S} car ce nombre est indépendant de la couverture choisie.

Interprétation. Reprenons les notations introduites dans l'interprétation de l'aire d'une surface dans \mathbb{R}^3 . Choisissons en outre dans chaque triangle t_j retenu un point (u_j, v_j) . Cela étant, soit f une fonction continue sur \mathcal{S} . Pour tout semi-intervalle I retenu, posons

$$c_I = f(\varphi(u_1, v_1)) \cdot A_{t_1} + f(\varphi(u_2, v_2)) \cdot A_{t_2}$$

puis définissons C_m comme étant la somme de ces nombres c_I pour tous les semi-intervalles $I \in \mathcal{R}_m$ retenus. Cela étant, on établit $* \rightarrow$ de manière analogue à celle de l'interprétation de l'aire d'une surface $\leftarrow *$ qu'on a $C_m \rightarrow \iint_{\mathcal{S}} f \, d\sigma$. \square

7.10 Surfaces orientables

Remarque. Si (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 , l'application

$$N_{(\varphi, K)}: K \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto [D_u\varphi \wedge D_v\varphi]_{(u,v)}$$

diffère de 0 en tout point (u, v) de K° . De fait, si ψ désigne une application continûment dérivable d'un ouvert de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 dont la restriction à $\varphi(K^\circ)$ coïncide avec l'inverse de $\varphi|_{K^\circ}$, on a $\psi \circ \varphi(u, v) = (u, v)$ donc

$$\begin{pmatrix} D_x\psi_1 & D_y\psi_1 & D_z\psi_1 \\ D_x\psi_2 & D_y\psi_2 & D_z\psi_2 \end{pmatrix}_{\varphi(u,v)} \begin{pmatrix} D_u\varphi_1 & D_v\varphi_1 \\ D_u\varphi_2 & D_v\varphi_2 \\ D_u\varphi_3 & D_v\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en tout point $(u, v) \in K^\circ$, ce qui prouve que $[D_u\varphi]_{(u,v)}$ et $[D_v\varphi]_{(u,v)}$ sont linéairement indépendants.

On peut donc introduire l'application $n_{(\varphi, K)}: K^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ selon

$$n_{(\varphi, K)}(u, v) = \frac{N_{(\varphi, K)}(u, v)}{|N_{(\varphi, K)}(u, v)|}, \quad \forall (u, v) \in K^\circ.$$

La raison qui motive l'introduction de cette application peut s'énoncer comme suit: pour tout $(u_0, v_0) \in K^\circ$, le vecteur unitaire $n_{(\varphi, K)}(u_0, v_0)$ est orthogonal à la tangente en $\varphi(u_0, v_0)$ à tout chemin $(\gamma, [a, b])$ qui est \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^3 et tel que $\varphi(u_0, v_0) \in \gamma(]a, b[)$ et $\gamma(]a, b[) \subset \varphi(K^\circ)$. De plus, c'est avec $-n_{(\varphi, K)}(u_0, v_0)$ le seul vecteur unitaire jouissant de cette propriété. Pour établir cette affirmation, remarquons d'une part que, si on pose $\gamma' = \psi \circ \gamma$, alors $(\gamma', [a, b])$ est un chemin \mathcal{C}_1 dans \mathbb{R}^2 tel que $\gamma'([a, b]) \subset K^\circ$ et $\varphi \circ \gamma'(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. Dans ces conditions, pour tout $t_0 \in]a, b[$ tel que $\varphi(u_0, v_0) = \gamma(t_0)$, on a

$$\langle N_{(\varphi, K)}(u_0, v_0), D\gamma(t_0) \rangle = \langle [D_u\varphi \wedge D_v\varphi]_{(u_0, v_0)}, D(\varphi \circ \gamma')(t_0) \rangle = 0$$

car $D(\varphi \circ \gamma')(t_0)$ est égal à

$$D\gamma'_1(t_0) \cdot [D_u\varphi]_{(u_0, v_0)} + D\gamma'_2(t_0) \cdot [D_v\varphi]_{(u_0, v_0)}.$$

Remarquons d'autre part qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < v_0 < b$ (resp. $a < u_0 < b$) et que $(\varphi(\cdot, v_0), [a, b])$ (resp. $(\varphi(u_0, \cdot), [a, b])$) soit un chemin dans \mathbb{R}^3 .

Dès lors, si $(\varphi^{(1)}, K^{(1)})$ et $(\varphi^{(2)}, K^{(2)})$ sont des couvertures dans \mathbb{R}^3 qui déterminent la même surface \mathcal{S} , on a

$$n_{(\varphi^{(1)}, K^{(1)})}(u_1, v_1) \in \{n_{(\varphi^{(2)}, K^{(2)})}(u_2, v_2), -n_{(\varphi^{(2)}, K^{(2)})}(u_2, v_2)\}$$

pour tout $(u_1, v_1) \in \omega_1$ et tout $(u_2, v_2) \in \omega_2$ tels que $\varphi^{(1)}(u_1, v_1) = \varphi^{(2)}(u_2, v_2)$, où ω_1 et ω_2 sont définis comme dans la Proposition 7.8.1.

Définition. Etant donné une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 , la *partie régulière de \mathcal{S}* , notée $\mathcal{S}_{\text{rég}}$, est la réunion sur toutes les couvertures (φ, K) dans \mathbb{R}^3 qui déterminent \mathcal{S} , des ensembles $\varphi(K^\circ)$. $\ast \rightarrow$ Il s'agit d'une partie connexe de \mathcal{S} (comme union de parties connexes d'intersection non vide deux à deux) et dense dans \mathcal{S} (car K est un compact régulier et φ une application continûment dérivable). $\leftarrow \ast$

$\ast \rightarrow$ Un raisonnement aisé basé sur la connexité de K° et de la partie $\varphi(K^\circ)$ de $\mathcal{S}_{\text{rég}}$ établit de suite que, $\leftarrow \ast$ pour toute couverture (φ, K) d'une surface orientée \mathcal{S} , on a

$$n_{(\varphi, K)} = n_{\mathcal{S}|_{\varphi(K^\circ)}} \quad \text{ou} \quad n_{(\varphi, K)} = -n_{\mathcal{S}|_{\varphi(K^\circ)}}.$$

Cela étant, on dit dans le premier cas que la couverture (φ, K) est *positive* et dans le second qu'elle est *négative*.

Exemples. a) *Toute surface plane est orientable.*

b) *Toute surface déterminée par une représentation paramétrique cartésienne est orientable.*

c) *Une surface cylindrique parallèle à e et dont la base Γ est déterminée par une courbe simple (resp. de Jordan) $(\gamma, [a, b])$ qui est \mathcal{C}_1 et incluse dans un plan non parallèle à e est orientable si on a $D\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ (resp. $D\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et $D\gamma(a) = D\gamma(b)$).*

En particulier, *la surface latérale d'un cylindre droit de base circulaire est une surface orientable.*

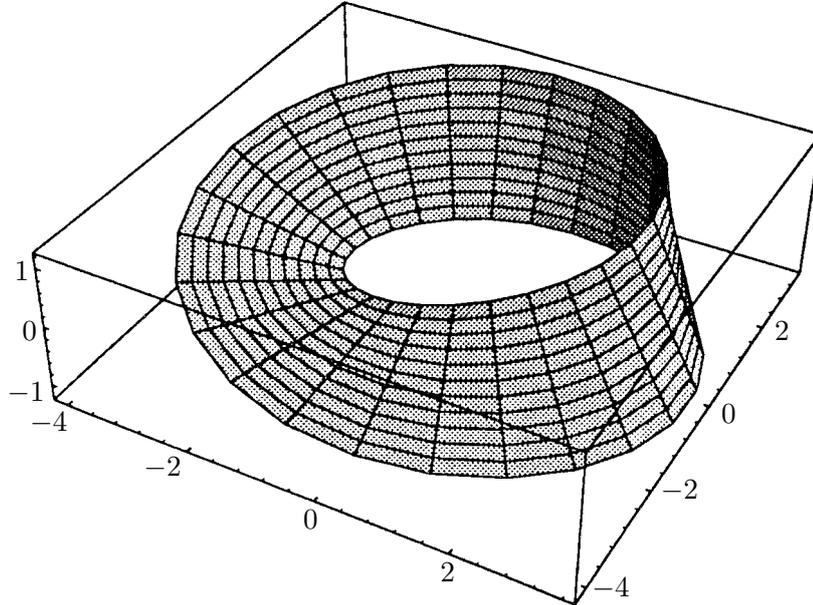
d) *Une surface conique de sommet S et dont la base Γ est déterminée par une courbe simple (resp. de Jordan) $(\gamma, [a, b])$ qui est \mathcal{C}_1 et incluse dans un plan ne contenant pas S est orientable si on a $D\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ (resp. $D\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et $D\gamma(a) = D\gamma(b)$).*

En particulier, *la surface latérale d'un cône droit de base circulaire est une surface orientable.*

e) *Toute sphère \mathcal{S} est orientable et on a $\mathcal{S}_{\text{rég}} = \mathcal{S}$.*

En particulier, *toute surface sphérique est orientable.* \square

Remarque. Il existe des surfaces dans \mathbb{R}^3 qui ne sont pas orientables. Tel est le cas du *ruban de Möbius* dont une représentation matérielle est suggérée par la construction suivante: on prend un rectangle $ABCD$



et on superpose les côtés AD et BC de telle sorte que C coïncide avec A et B avec D .
 $*$ \rightarrow Plus précisément, le *ruban de Möbius* est défini comme étant la surface associée à la couverture (φ, K) définie par $K = [0, 2\pi] \times [-r, r]$ et

$$\varphi(u, v) = ((R - v \cos(u/2)) \cos(u), (R - v \cos(u/2)) \sin(u), v \sin(u/2)). \leftarrow *$$

7.11 Intégrales superficielles

Définition. Si \mathcal{S} est une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , de normale unitaire continue n , et si f est une application continue de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 , alors l'*intégrale de f sur \mathcal{S}* est égale à $\iint_{\mathcal{S}} \langle f, n \rangle d\sigma$. On dit aussi qu'il s'agit d'une *intégrale superficielle*.

Proposition 7.11.1 Soient \mathcal{S} une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , de normale unitaire continue n , et f une application continue de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 .

Alors, pour toute couverture (φ, K) positive (resp. négative) déterminant \mathcal{S} , on a

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle f, n \rangle d\sigma = \iint_K \langle f \circ \varphi, D_u \varphi \wedge D_v \varphi \rangle du dv$$

$$(\text{resp.} = - \iint_K \langle f \circ \varphi, D_u \varphi \wedge D_v \varphi \rangle du dv). \blacksquare$$

Définition. Soient \mathcal{S} une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , de normale unitaire continue $n = (n_1, n_2, n_3)$, et $f = (P, Q, R)$ une application continue de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 . On

introduit aussi les *intégrales superficielles*

$$\iint_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} P n_1 \\ Q n_2 \\ R n_3 \end{pmatrix} d\sigma \quad \text{notées également} \quad \iint_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} P dy \wedge dz \\ Q dz \wedge dx \\ R dx \wedge dy \end{pmatrix}.$$

Pour toute couverture (φ, K) déterminant \mathcal{S} , on a alors

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} P dy \wedge dz &= \delta \iint_K P(\varphi) \det \left(\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} \right) du dv \\ \iint_{\mathcal{S}} Q dz \wedge dx &= \delta \iint_K Q(\varphi) \det \left(\frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \right) du dv \\ \iint_{\mathcal{S}} R dx \wedge dy &= \delta \iint_K R(\varphi) \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right) du dv \end{aligned}$$

avec $\delta = 1$ si la couverture (φ, K) est positive et $\delta = -1$ sinon.

Remarque. Les symboles $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ et $dx \wedge dy$ doivent être écrits dans cet ordre. On peut aussi introduire par exemple la notation $\iint_{\mathcal{S}} P dz \wedge dy$ pour $-\iint_{\mathcal{S}} P dy \wedge dz$. \square

7.12 Formule de Stokes dans \mathbb{R}^3

Théorème 7.12.1 Soit \mathcal{S} une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , de normale unitaire continue n , dont (φ, K) est une couverture positive telle que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}_2(U)$.

Si $(u, v) = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ est une représentation paramétrique de Jordan positive du bord de K , alors

- a) $(\varphi(\gamma), [a, b])$ est un lacet rectifiable dans \mathbb{R}^3 ,
- b) pour toute application f deux fois continûment dérivable sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 contenant \mathcal{S} , on a la formule

$$\iint_{\mathcal{S}^+} \langle \text{rot}(f), n \rangle d\sigma = \int_{\varphi(\gamma)} \langle f, dx \rangle,$$

appelée *formule de Stokes dans \mathbb{R}^3* (ou *formule de la circulation*).

Preuve. Vu les théorèmes d'invariance, nous pouvons prendre pour $(\gamma, [a, b])$ le lacet qui nous a permis de définir l'orientation positive du bord de K , K étant considéré comme compact parallèle à l'axe des y .

- a) est alors direct.

b) Posons $f = (P, Q, R)$. On a bien sûr

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi(\gamma)} P dx_1 &= \int_a^b P(\varphi(\gamma(t))) D_t \varphi_1(\gamma(t)) dt \\
 &\stackrel{(*)}{=} - \int_a^b D_t P(\varphi(\gamma(t))) \varphi_1(\gamma(t)) dt \\
 &= - \int_a^b [\varphi_1 D_u P(\varphi)]_{\gamma(t)} D\gamma_1(t) dt - \int_a^b [\varphi_1 D_v P(\varphi)]_{\gamma(t)} D\gamma_2(t) dt \\
 &= - \int_{\gamma} \varphi_1 D_u P(\varphi) du - \int_{\gamma} \varphi_1 D_v P(\varphi) dv.
 \end{aligned}$$

(En (*), on a intégré par parties). Cela étant, la formule de Gauss-Green dans \mathbb{R}^2 donne

$$\int_{\varphi(\gamma)} P dx_1 = \iint_K (D_v(\varphi_1 D_u P(\varphi)) - D_u(\varphi_1 D_v P(\varphi))) du dv.$$

Comme l'intégrand du second membre est égal à

$$- [D_2 P]_{\varphi} \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right) + [D_3 P]_{\varphi} \det \left(\frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \right),$$

il vient enfin

$$\int_{\varphi(\gamma)} P dx_1 = - \iint_{\mathcal{S}} n_3 D_2 P d\sigma + \iint_{\mathcal{S}} n_2 D_3 P d\sigma.$$

D'où la conclusion car on établit de même que

$$\int_{\varphi(\gamma)} Q dx_2 = - \iint_{\mathcal{S}} n_1 D_3 Q d\sigma + \iint_{\mathcal{S}} n_3 D_1 Q d\sigma$$

et

$$\int_{\varphi(\gamma)} R dx_3 = - \iint_{\mathcal{S}} n_2 D_1 R d\sigma + \iint_{\mathcal{S}} n_1 D_2 R d\sigma. \blacksquare$$

Remarque. La formule de Stokes admet de nombreux autres cas de validité, qui sortent du cadre de ce cours.

7.13 Formule de Gauss dans \mathbb{R}^3

Définitions. Un compact *parallèle à l'axe des z dans \mathbb{R}^3* est une partie K de \mathbb{R}^3 qui s'écrit sous la forme

$$K = \{ (x, y, z) : (x, y) \in K', g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \}$$

où

a) K' est un intervalle ou un disque compact de \mathbb{R}^2 (on peut fortement améliorer cette hypothèse sur K'),

b) g_1, g_2 sont des fonctions réelles et continues sur K' vérifiant la majoration $g_1(x, y) < g_2(x, y)$ pour tout $(x, y) \in K'^{\circ}$,

c) pour $j = 1$ (resp. $j = 2$), $\mathcal{S}_j = \{(x, y, g_j(x, y)) : (x, y) \in K'\}$ est une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , de normale unitaire continue n_j dont la troisième composante est strictement négative (resp. positive) en tout point de \mathcal{S}_j , rég et dont $(\varphi^{(j)}, K^{(j)})$ est une couverture,

d) pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{S}_j)$ et tout $j \in \{1, 2\}$, on a

$$\iint_{K'} f(x, y, g_j(x, y)) dx dy = \iint_{K^{(j)}} f(\varphi^{(j)}(u, v)) \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)})}{\partial(u, v)} \right) \right| du dv$$

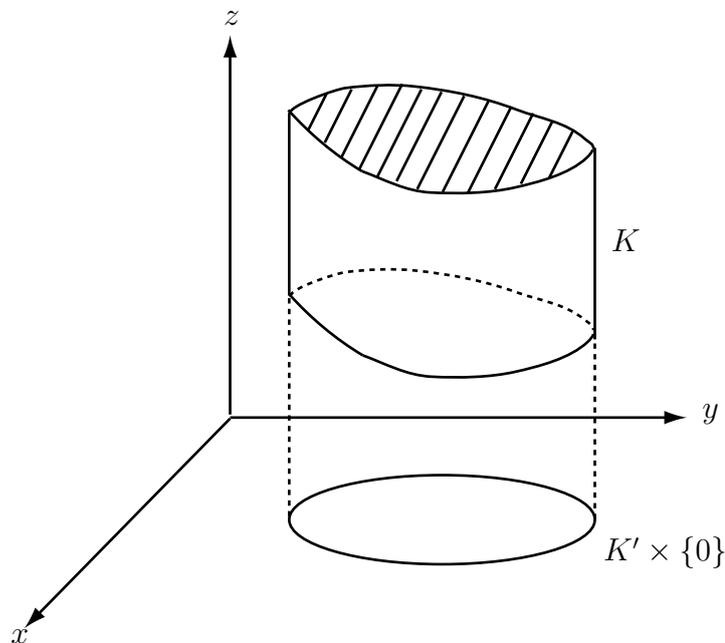
(ceci a notamment lieu si $(\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)})$ est un changement de variable régulier d'ordre ≥ 1 entre K'° et $K^{(j)\circ}$).

On vérifie directement qu'il s'agit bien d'un compact.

Dans ces conditions,

a) \mathcal{S}_1 est appelé *base inférieure* de K ,

b) \mathcal{S}_2 est appelé *base supérieure* de K .



On introduit de même les notions de *compact parallèle à l'axe des x* (resp. *des y*) dans \mathbb{R}^3 .

Exemple. Tout intervalle compact de \mathbb{R}^3 est à la fois parallèle à l'axe des x , à l'axe des y et à l'axe des z . \square

Exemple. Toute boule compacte de \mathbb{R}^3 est à la fois parallèle à l'axe des x , à l'axe des y et à l'axe des z . \square

Théorème 7.13.1 Soit K un compact de \mathbb{R}^3 parallèle à l'axe des x (resp. des y ; des z), pour lequel nous allons utiliser les notations introduites dans la définition précédente.

Pour toute application $f = (P, Q, R)$ continûment dérivable sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 contenant K et à valeurs dans \mathbb{R}^3 , on a la **formule de Gauss dans \mathbb{R}^3**

$$\begin{aligned} \iiint_K D_x P \, dx \, dy \, dz &= \iint_{S_1} P \, n_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} P \, n_1 \, d\sigma \\ \left(\text{resp. } \iiint_K D_y Q \, dx \, dy \, dz &= \iint_{S_1} Q \, n_2 \, d\sigma + \iint_{S_2} Q \, n_2 \, d\sigma; \right. \\ \iiint_K D_z R \, dx \, dy \, dz &= \iint_{S_1} R \, n_3 \, d\sigma + \iint_{S_2} R \, n_3 \, d\sigma \left. \right). \end{aligned}$$

Preuve. Traitons par exemple le cas d'un compact parallèle à l'axe des z .

Comme $D_z R$ est une fonction continue donc intégrable sur K , le théorème de Fubini donne de suite

$$\begin{aligned} \iiint_K D_z R \, dx \, dy \, dz &= \iint_{K'} dx \, dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} [D_z R]_{(x,y,z)} \, dz \\ &= \iint_{K'} (R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Cela étant, pour $j = 1$ et $j = 2$, la partie d) de la définition donne

$$\begin{aligned} \iint_{K'} R(x, y, g_j(x, y)) \, dx \, dy &= \iint_{K^{(j)}} R(\varphi^{(j)}(u, v)) \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)})}{\partial(u, v)} \right) \right| \, du \, dv \\ &= \delta \iint_{S_j} R \, n_3 \, d\sigma, \end{aligned}$$

avec $\delta = -1$ pour $j = 1$ et $\delta = 1$ pour $j = 2$. D'où la conclusion. \blacksquare

Remarque. Considérons, par exemple, un compact K de \mathbb{R}^3 parallèle à l'axe des z et utilisons les notations introduites dans la définition précédente. Il est clair que le bord de K' admet une représentation paramétrique $(x, y) = \gamma(u)$ pour $u \in [a, b]$ positive, de Jordan et \mathcal{C}_1 par morceaux. Alors

$$S_l = \{ (\gamma(u), g_1(\gamma(u)) + v(g_2(\gamma(u)) - g_1(\gamma(u))) : (u, v) \in [a, b] \times [0, 1] \}$$

est appelé *surface latérale* de K bien que, en général, ce ne soit pas une surface dans \mathbb{R}^3 mais bien une union finie $s_1 \cup \dots \cup s_J$ de surfaces deux à deux disjointes ou n'ayant deux à deux en commun qu'un ou deux segments de droite. De toute façon, on vérifie aisément que chacune de ces surfaces est orientable et que la troisième composante des normales continues sur ces surfaces est la fonction 0. Il est donc licite de poser

$$\iint_{\mathcal{S}_l} f n_3 d\sigma = \sum_{j=1}^J \iint_{s_j} f n_3 d\sigma = 0,$$

où on fixe n sur chacune des surfaces s_j en prenant la normale extérieure. En fait, nous avons décomposé la frontière de K en surfaces orientables \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_l que nous avons orientées en prenant systématiquement la normale extérieure: cela donne lieu au *bord* $\partial K = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_l$ de K et à la formule de Gauss dans \mathbb{R}^3

$$\iiint_K D_z R dx dy dz = \iint_{\partial K} R n_3 d\sigma$$

pour toute fonction R continûment dérivable sur un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant K .

A partir de cette remarque, on obtient directement les résultats suivants.

Théorème 7.13.2 *Si K est un compact de \mathbb{R}^3 parallèle à l'axe des x , à l'axe des y et à l'axe des z et si f est une fonction continûment dérivable sur un ouvert contenant K , alors on a*

$$\iiint_K \text{grad}(f) dx dy dz = \iint_{\partial K} f n d\sigma. \blacksquare$$

Théorème 7.13.3 *Si K est un compact de \mathbb{R}^3 parallèle à l'axe des x , à l'axe des y et à l'axe des z et si f est une fonction continûment dérivable sur un ouvert contenant K , et à valeurs dans \mathbb{R}^3 , alors on a*

$$\iiint_K \text{rot}(f) dx dy dz = \iint_{\partial K} n \wedge f d\sigma$$

et la célèbre **formule d'Ostrogradsky** ou **formule du flux**

$$\iiint_K \text{div}(f) dx dy dz = \iint_{\partial K} \langle f, n \rangle d\sigma. \blacksquare$$

Extensions. Il existe de nombreuses extensions des cas d'application de ces formules. Elles sortent du cadre de ce cours.

7.14 Volume d'un corps

Définitions. Un *corps* est un ouvert intégrable de \mathbb{R}^3 .

Le *volume* du corps Ω est sa mesure et est généralement noté V_Ω .

Vu le théorème du changement de variable, si Ω est un corps et si $P(u, v, w)$ est un changement de variable régulier d'ordre ≥ 1 entre Ω et l'ouvert U de \mathbb{R}^3 , le volume de Ω est égal à

$$V_\Omega = \iiint_U |\det(D_u P, D_v P, D_w P)| \, du \, dv \, dw.$$

Dès lors, si on appelle représentation paramétrique du corps Ω tout changement de variable régulier $P(u, v, w)$ d'ordre ≥ 1 entre Ω et un ouvert U de \mathbb{R}^3 et si on baptise

$$\iiint_U |\det(D_u P, D_v P, D_w P)| \, du \, dv \, dw$$

le volume de Ω , nous voyons que *le volume d'un corps est indépendant de la représentation paramétrique choisie.*

Théorème 7.14.1 *Le volume d'un corps est indépendant du choix du système d'axes de coordonnées.*

Preuve. C'est immédiat car un changement d'axes de coordonnées correspond à une translation et une rotation. ■

Remarque. Si Ω est un corps dont la frontière est négligeable, on a $\text{mes}(\Omega^-) = \text{mes}(\Omega)$ et on parle aussi du volume du fermé Ω^- . Le calcul du volume de certains corps conduit donc au calcul du volume de certains fermés de \mathbb{R}^3 . Comme la frontière d'un parallélépipède est négligeable, le raccord avec la notion habituelle de volume est obtenue au moyen du résultat suivant.

Théorème 7.14.2 *Le volume du parallélépipède ouvert déterminé par le sommet S et les trois vecteurs non coplanaires a, b, c est égal à $|\det(a, b, c)|$.*

Preuve. Une représentation paramétrique de ce parallélépipède est évidemment donnée par

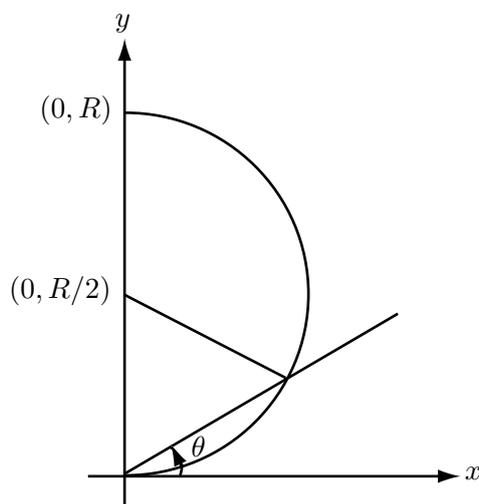
$$P(u, v, w) = S + ua + vb + wc \quad \text{pour } (u, v, w) \in]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[.$$

La conclusion est alors immédiate. ■

Exercice. *Calculer le volume du corps \mathcal{C} limité par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - Ry < 0$ et le cône ouvert de sommet $(0, 0, R)$ et de base*

$$B = \{ (x, y, 0) : x^2 + y^2 < R^2 \}.$$

Suggestion. En fait, \mathcal{C} est un ouvert borné; il s'agit donc bien d'un corps. Il est intéressant de faire intervenir le paramètre θ suivant.



Il permet de prendre pour représentation paramétrique

$$B(\theta, u) = (uR \sin(\theta) \cos(\theta), uR \sin^2(\theta), 0) \text{ pour } (\theta, u) \in]0, \pi[\times]0, 1[,$$

pour B puis

$$P(\theta, u, v) = (uR \sin(\theta) \cos(\theta), uR \sin^2(\theta), vR(1 - u \sin(\theta)))$$

pour

$$(\theta, u, v) \in]0, \pi[\times]0, 1[\times]0, 1[$$

pour \mathcal{C} , comme on le vérifie aisément. De

$$D_\theta P(\theta, u, v) = (uR \cos(2\theta), uR \sin(2\theta), -uvR \cos(\theta))$$

$$D_u P(\theta, u, v) = (R \sin(\theta) \cos(\theta), R \sin^2(\theta), -vR \sin(\theta))$$

$$D_v P(\theta, u, v) = (0, 0, R(1 - u \sin(\theta))),$$

on tire alors de suite

$$V_{\mathcal{C}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 du \int_0^1 uR^3(1 - u \sin(\theta)) \sin^2(\theta) dv = R^3(\pi/4 - 4/9). \square$$

Dans certains cas, la formule donnant le volume d'un corps se réduit à une intégrale double.

Exemple. Volume d'un corps cylindrique. Si le corps cylindrique Ω admet la représentation paramétrique

$$P(u, v, w) = B(u, v) + w g(u, v) e \text{ pour } (u, v, w) \in U \times]0, 1[,$$

son volume est égal à

$$V_{\Omega} = \iint_U g(u, v) |\det(D_u B, D_v B, e)| \, du \, dv. \square$$

Exercice. *Le volume du cylindre droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égal à $\pi R^2 H$.*

Suggestion. De fait, le corps cylindrique déterminé par $U =]0, 2\pi[\times]0, R[$, $B(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 0)$, $g = H \chi_U$ et $e = (0, 0, 1)$ est égal pp au cylindre droit que nous étudions, à un changement du système d'axes près. \square

Exemple. Volume d'un corps conique. *Si le corps conique Ω admet la représentation paramétrique*

$$P(u, v, w) = S + w(B(u, v) - S) \quad \text{pour } (u, v, w) \in U \times]0, 1[$$

son volume est égal à

$$V_{\Omega} = \frac{1}{3} \iint_U |\det(D_u B, D_v B, B - S)| \, du \, dv. \square$$

Exercice. *Le volume du cône droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égal à $\pi R^2 H/3$.*

Suggestion. De fait, le corps conique déterminé par $U =]0, 2\pi[\times]0, R[$, $B(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 0)$ et $S = (0, 0, H)$ est égal pp au cône droit que nous étudions, à un changement du système d'axes près. \square

Exemple. Volume d'un corps de révolution. *Si, à un ensemble négligeable près, le corps de révolution Ω admet la représentation paramétrique*

$$P(u, v, w) = (|B(u, v) \wedge e| \cos(w), |B(u, v) \wedge e| \sin(w), \langle B(u, v), e \rangle),$$

pour $(u, v, w) \in U \times]0, 2\pi[$, son volume est égal à

$$V_{\Omega} = 2\pi \iint_U |B \wedge e| \left| \det \begin{pmatrix} D_u |B \wedge e| & D_u \langle B, e \rangle \\ D_v |B \wedge e| & D_v \langle B, e \rangle \end{pmatrix} \right| \, du \, dv.$$

Si, en outre, on a $B(u, v) = (0, y(u, v), z(u, v))$ avec $y(u, v) > 0$ pour tout $(u, v) \in U$, cette formule devient

$$V_{\Omega} = 2\pi \iint_U y(u, v) \left| \det \begin{pmatrix} D_u y & D_u z \\ D_v y & D_v z \end{pmatrix} \right| \, du \, dv. \square$$

Exercice. Traiter comme corps de révolution les deux exercices précédents. \square

Exercice. Le volume de la boule de rayon R est égal à $4\pi R^3/3$.

Suggestion. De fait, le corps déterminé par $U =]-\pi/2, \pi/2[\times]0, R[$, $B(u, v) = (0, v \cos(u), v \sin(u))$ et $e = (0, 0, 1)$ est égal pp à la boule considérée, à un changement de système d'axes près. \square

Exercice. Calculer la mesure du tore

$$T = \{(x, y, z) : d((x, y, z), \mathcal{C}) \leq r\}$$

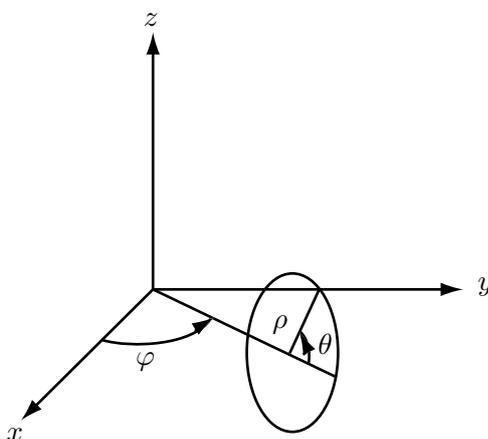
où $\mathcal{C} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = R^2\}$ avec $0 < r < R$.

Suggestion. Pour imaginer une représentation paramétrique adaptée à ce calcul, il convient de penser à la représentation géométrique suivante du tore: c'est l'ensemble obtenu par la rotation du disque

$$\{(x, 0, z) : (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

autour de l'axe des z .

On est alors amené à introduire les paramètres ρ , θ et φ indiqués sur la figure ci-dessous.



On peut ensuite vérifier que

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ y = (R + \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ z = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

est un changement de variable régulier d'ordre infini entre un ensemble égal pp à T et

$$\{(\rho, \theta, \varphi) : 0 < \rho < r, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Cela donne lieu à

$$B(\rho, \theta) = (0, R + \rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

avec $U =]0, r[\times]0, 2\pi[$ d'où

$$\text{mes}(T) = 2\pi \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} \rho(R + \rho \cos(\theta)) d\theta = 2\pi^2 r^2 R. \square$$

Exemple. Volume d'un conoïde. Un *conoïde* est un corps qui admet une représentation paramétrique du type

$$P(u, v, w) = (w x(u, v), w a, z(u, v)) \text{ pour } (u, v, w) \in U \times]0, 1[,$$

avec $a > 0$, $U =$ ouvert de \mathbb{R}^2 et $x(u, v), z(u, v) \in \mathcal{C}_1(U)$. La *base* de ce conoïde est l'ensemble $\{(x(u, v), a, z(u, v)) : (u, v) \in U\}$.

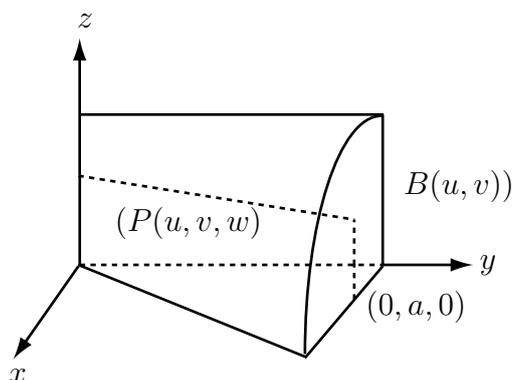
Cela étant, l'interprétation géométrique d'un conoïde est claire: c'est l'union des segments d'extrémités

$$B(u, v) = (x(u, v), a, z(u, v)) \text{ et } (0, 0, z(u, v))$$

pour $(u, v) \in U$.

Le volume de ce conoïde est égal à

$$\frac{a}{2} \iint_U \left| \det \begin{pmatrix} D_u x & D_u z \\ D_v x & D_v z \end{pmatrix} \right| du dv. \square$$



Bibliographie

- [1] BASS J., *Cours de mathématique*, **III** (1971).
- [2] CHANDRASEKHARAN K., *Classical Fourier transforms*, Springer Universitext (1989).
- [3] DIXMIER J., *Topologie générale*, Presses Universitaires de France (1981).
- [4] FOLLAND G. B., *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics Series, Pacific Grove (1992).
- [5] GARNIR H. G., *Fonctions de variables réelles*, **I & II**, Vander (1970) & Gauthier-Villars et Librairie Universitaire (1965).
- [6] GARNIR H. G., DE WILDE M., SCHMETS J., *Analyse fonctionnelle*, **I & III**, Birkhäuser (1968 & 1973).
- [7] HEUSER H., *Lehrbuch der Analysis I & II*, Teubner (1980 & 1981).
- [8] HEWITT E., STROMBERG K., *Real and abstract analysis*, Springer (1965).
- [9] KÖRNER T. W., *Fourier analysis*, Cambridge University Press (1989).
- [10] KÖRNER T. W., *Exercises for Fourier analysis*, Cambridge University Press (1993).
- [11] LIGHTHILL M. J., *Introduction to Fourier analysis and generalized functions*, Cambridge University Press (1958).
- [12] SCHMETS J., *Analyse mathématique*, Derouaux (1990).
- [13] SCHWARTZ L., *Analyse: topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, **11** (1970).
- [14] SCHWARTZ L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (1961).

- [15] SIKORSKI R., *Advanced calculus: functions of several variables*, PWN-Polish Scientific Publishers (1969).
- [16] WALKER J. S., *Fourier analysis*, Oxford University Press, New York (1988).
- [17] ZAAANEN A. C., *Continuity, integration and Fourier theory*, Springer Universi-text (1989).
- [18] ZYGMUND A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge (1968).

Table des matières

1	Intégration des fonctions étagées	1
1.1	Fonctions étagées	1
1.2	Intégration des fonctions étagées	5
2	Théorèmes fondamentaux du calcul intégral	11
2.1	Ensembles dénombrables	11
2.2	Ensembles négligeables	12
2.3	Presque partout sur $A \subset \mathbb{R}^n$	14
2.4	Convergences ponctuelle et pp	15
2.5	Fonctions intégrables et leur intégrale	16
2.6	Propriétés fondamentales	19
2.7	Théorèmes fondamentaux	20
2.8	Fonctions intégrables sur un ensemble	22
2.9	Intégration sur un intervalle de \mathbb{R}	24
2.10	Interprétation de Cauchy-Riemann	25
3	Intégration sur un intervalle de \mathbb{R}	29
3.1	Intégrales fléchées	29
3.2	Théorème d'existence d'une primitive	30
3.3	Critères d'intégrabilité	32
3.4	Calcul des intégrales sur un intervalle de \mathbb{R}	36
3.4.1	Intégration par parties.	38
3.4.2	Intégration par changement de variable	40
3.5	Séries numériques absolument convergentes	43
4	Intégration sur une partie de \mathbb{R}^n	47
4.1	Réduction d'une intégrale	47
4.1.1	Calcul d'une intégrale par réduction	47
4.1.2	Intégrabilité par réduction	48
4.2	Interprétation de l'intégrale d'une fonction réelle	49
4.3	Exemples de réduction d'une intégrale	50
4.3.1	Exemples dans \mathbb{R}^2	50

4.3.2	Exemple dans \mathbb{R}^3	52
4.4	Permutation de l'ordre d'intégration	53
4.5	Changement de variable	57
4.5.1	Changement de variable linéaire	58
4.5.2	Passage aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2	58
4.5.3	Passage aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^3	59
4.5.4	Exemples dans \mathbb{R}^2	60
4.5.5	Exemples dans \mathbb{R}^3	62
5	Dérivation des intégrales paramétriques	65
5.1	Théorème fondamental	65
5.2	Cas où l'ensemble d'intégration varie	69
5.3	Cas où l'ensemble d'intégration varie	69
5.3.1	Méthode du "gel"	69
5.3.2	Méthode par les fonctions composées	70
6	Intégrales remarquables	73
6.1	Intégrale de Poisson	73
6.2	La fonction "Gamma": Γ	73
6.3	La fonction "Beta" : B	78
6.4	Autres intégrales eulériennes	81
7	Introduction à la formule de Stokes	83
7.1	Chemins et courbes dans \mathbb{R}^n	83
7.2	Longueur d'un chemin rectifiable	84
7.3	Courbes simple et de Jordan dans \mathbb{R}^n	90
7.4	Intégrale d'une fonction sur un chemin rectifiable	94
7.5	Intégrales curvilignes	96
7.6	Formule de Gauss-Green dans \mathbb{R}^2	99
7.7	Couvertures et surfaces dans \mathbb{R}^3	103
7.8	Aire d'une surface	104
7.9	Intégrale d'une fonction sur une surface	113
7.10	Surfaces orientables	114
7.11	Intégrales superficielles	116
7.12	Formule de Stokes dans \mathbb{R}^3	117
7.13	Formule de Gauss dans \mathbb{R}^3	118
7.14	Volume d'un corps	122