

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté des Sciences
Institut de Mathématique

Introduction aux

ESPACES NORMÉS

Notes des cours

*Analyse fonctionnelle et
Compléments d'analyse fonctionnelle*

Licence en Sciences Mathématiques

Jean SCHMETS

Année académique 2000-2001

Introduction

Ces notes constituent la base de cours que j'ai donnés durant l'année académique 1997–1998 comme cours à option à la licence en sciences mathématiques. Il s'agit d'un cours d'analyse fonctionnelle de 30h + 10h et d'un cours de compléments de même importance horaire. Dans une telle situation, le choix se situe entre survoler la matière et s'attacher avec quelques détails à un thème particulier.

C'est franchement la seconde possibilité que j'ai choisie. Le leitmotiv est la théorie spectrale des opérateurs linéaires compacts d'un espace de Banach dans lui-même. Ce sujet est quant à lui déjà très vaste et j'ai dû me limiter aux propriétés fondamentales . . . tout en ne pouvant résister à aborder certains compléments importants. J'ai aussi cherché à motiver cette étude en m'attachant à la résolution des équations de Fredholm et de Volterra.

Le premier chapitre contient une information de base sur les opérateurs linéaires entre espaces vectoriels. Ici ce sont les opérateurs linéaires de rang fini qui sont étudiés avec quelques détails.

Dans le (long) deuxième chapitre, les propriétés générales des espaces normés ou de Banach sont étudiées. Ici les séries de Neumann sont développées pour résoudre les équations du type $(\text{id} - T)x = f$ avec $\|T\| < 1$ et plus généralement les équations de Volterra.

Le théorème de Hahn-Banach et ses premières conséquences constituent l'essentiel du troisième chapitre où se trouve également le théorème de Krein-Milman.

Les théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'opérateur ouvert et du graphe fermé figurent dans le chapitre quatre. On y trouve aussi une première approche de la théorie spectrale des opérateurs linéaires compacts.

Afin de poursuivre cette étude et obtenir une description assez fine du spectre de ces opérateurs (qui figure à la fin du chapitre 5), il faut introduire un minimum de connaissances sur la topologie générale et les espaces localement convexes séparés. Ceci est indispensable pour établir d'une part qu'un opérateur linéaire d'un espace de Banach dans un autre est compact si et seulement si son adjoint est compact et d'autre part que les noyaux et conoyaux des opérateurs $K - \lambda \text{id}$ et $K' - \lambda \text{id}$ ont même dimension finie. A ce moment, le spectre $\sigma(K)$ d'un opérateur linéaire compact K

d'un espace de Banach dans lui-même est décrit comme étant une partie finie de \mathbb{C} ou l'ensemble des points d'une suite de \mathbb{C} convergente vers 0 uni à $\{0\}$, tout élément non nul de $\sigma(K)$ étant une valeur propre de K , dont l'ensemble des vecteurs propres est un sous-espace vectoriel de dimension finie. C'est alors le moment de traiter des exemples et de revenir aux équations de Fredholm.

Trois appendices terminent ces notes: un (court) sur l'axiome du choix et ses équivalents, un deuxième sur des éléments de la théorie spectrale dans les espaces de Hilbert et le dernier sur les notions de base de quelques espaces fondamentaux de suites.

Les textes placés entre les symboles “* \rightarrow ” et “ \leftarrow *” font appel à de la matière ultérieure et sont à réserver pour une deuxième lecture.

J. Schmets

Chapitre 1

Quelques compléments sur les espaces vectoriels

Convention. Dans tout ce qui suit, \mathbb{K} désigne le corps des scalaires et est toujours égal à \mathbb{R} ou à \mathbb{C} . En vue d'alléger le texte, nous disons espace vectoriel à la place d'espace \mathbb{K} -vectoriel, opérateur linéaire à la place d'opérateur \mathbb{K} -linéaire, ... chaque fois que la propriété est valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Espaces vectoriels

Tout espace \mathbb{C} -vectoriel E est aussi un espace \mathbb{R} -vectoriel, il est alors appelé *espace \mathbb{R} -vectoriel sous-jacent* à E et noté $E_{\mathbb{R}}$. La réciproque est bien entendu fausse.

Un *sous-espace vectoriel* de l'espace vectoriel E est une partie non vide L de E , qui est un espace vectoriel pour les opérations $+$ et \cdot induites par E . Il suffit bien sûr d'avoir $L + L \subset L$ et $cL \subset L$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.

L'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E :

- a) contient $\{0\}$ comme plus petit élément pour l'inclusion,
- b) contient E comme plus grand élément pour l'inclusion,
- c) est fermé pour l'intersection.

Dès lors, on peut introduire la notion d'*enveloppe linéaire* pour toute partie non vide A de E comme étant l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A ; il est noté $\text{span}(A)$. On a tôt fait de vérifier l'égalité

$$\text{span}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^J c_j e_j : J \in \mathbb{N}_0; c_1, \dots, c_J \in \mathbb{K}; e_1, \dots, e_J \in A \right\}.$$

Une *base de Hamel* de l'espace vectoriel E est une partie B de E dont les éléments sont linéairement indépendants et dont l'enveloppe linéaire est égale à E .

Théorème 1.1.1 *Toute partie A de l'espace vectoriel E , dont les éléments sont linéairement indépendants, est incluse dans une base de Hamel de E .*

En particulier, tout espace vectoriel admet une base de Hamel.

Preuve. Soit \mathcal{A} l'ensemble des parties de E , qui contiennent A et dont les éléments sont linéairement indépendants. On vérifie aussitôt que (\mathcal{A}, \subset) est un espace ordonné dont toute partie totalement ordonnée admet un majorant (à savoir la réunion de ses éléments). Vu le lemme de Zorn, \mathcal{A} admet un élément maximal qui, bien sûr, est une base de Hamel de E .

Le cas particulier est immédiat. ■

Remarque. Le théorème précédent est un théorème existentiel: il affirme que tout espace vectoriel admet une base de Hamel. Ce n'est pas un théorème constructif: il ne procure aucun moyen de construire une base de Hamel. □

Si E est un espace vectoriel admettant une base de Hamel finie, on sait que toutes ses bases de Hamel ont la même cardinalité: c'est la *dimension* de E , notée $\dim(E)$, et on dit que E est un espace vectoriel de *dimension finie*. Si l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de *dimension infinie* et on pose $\dim(E) = +\infty$.

Exercice. Dans \mathbb{R} , déterminer l'enveloppe linéaire des ensembles $\{0\}$ et $\{r\}$ avec $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

Exercice. Dans \mathbb{R}^2 , déterminer l'enveloppe linéaire de $\{\epsilon_1\}$ et de $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. □

Exercice. Dans \mathbb{C} , déterminer l'enveloppe linéaire de $\{0\}$ et de $\{i\}$. □

Exercice. Etablir que $C_\infty(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Suggestion. Les monômes ne sont-ils pas des éléments linéairement indépendants de cet espace? Les fonctions e^{cx} avec $c \in \mathbb{K}$ ne sont-elles pas linéairement indépendantes dans cet espace? □

Exercice. Etablir que $D_\infty(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie. □

Proposition 1.1.2 *Un espace vectoriel de dimension finie n'est jamais union dénombrable de sous-espaces vectoriels propres.*

Preuve. Si ce n'est pas le cas, il existe un premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathbb{R}^n est réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels L_m tels que $\dim(L_m) < n$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Il est clair qu'on doit avoir $n > 1$. De plus, on vérifie aussitôt qu'on peut supposer avoir $L_j \not\subset L_k$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$ distincts. On a donc $L_1 \neq L_1 \cap L_m$ pour tout entier $m \geq 2$. Comme $\dim(L_1) < n$, L_1 n'est pas égal à $\bigcup_{m=2}^{\infty} (L_1 \cap L_m)$; soit l_1 un élément de $L_1 \setminus \bigcup_{m=2}^{\infty} (L_1 \cap L_m)$. Cela étant, soit e un élément de $\mathbb{R}^n \setminus L_1$. L'ensemble $\{e + rl_1 : r \in \mathbb{R}\}$ étant non dénombrable, il doit exister $m \in \mathbb{N}_0$ et deux nombres réels distincts s, t tels que $e + rl_1$ et $e + sl_1$ appartiennent à L_m . Il s'ensuit d'une part que $l_1 \in L_m$, ce qui implique $m = 1$, et d'autre part que $e \in L_m$ donc $m \neq 1$. D'où une contradiction. ■

1.2 Exemples d'espaces vectoriels

En plus des espaces vectoriels déjà rencontrés précédemment tels que

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \\ &C_0(A), C_p([a, b]), C_p(\Omega), D_p(\Omega), \\ &L^p(A), L^p_{\text{loc}}(A), L^p_{\text{comp}}(\Omega), \dots \end{aligned}$$

il convient d'introduire quelques espaces de suites.

Etant donné des suites $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{K} et un élément c de \mathbb{K} , on peut introduire les suites

$$c \cdot x = (cx_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \quad \text{et} \quad x + y = (x_m + y_m)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

On a tôt fait de vérifier que les opérations $+$ et \cdot ainsi définies sur l'ensemble ω des suites de \mathbb{K} munissent ω d'une structure d'espace vectoriel.

Exercice. Quelle est l'origine de ω ? □

Différentes parties de ω sont très intéressantes:

- 1) pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace ℓ^p est l'ensemble des suites x telles que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p$ converge,
- 2) l'espace ℓ^{∞} est l'ensemble des suites bornées,
- 3) l'espace c est l'ensemble des suites convergentes,
- 4) l'espace c_0 est l'ensemble des suites qui convergent vers 0,
- 5) l'espace ϕ est l'ensemble des suites finies de \mathbb{K} , c'est-à-dire des suites n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Théorème 1.2.1 Les espaces ℓ^{∞} , c , c_0 et ϕ sont vectoriels. ■

Pour étudier les espaces ℓ^p que nous venons d'introduire, il convient de recourir à quelques inégalités célèbres.

Inégalité de Minkowski: pour tous $p \in [1, +\infty[$ et $x, y \in \ell^p$, on a

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m + y_m|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^p \right)^{1/p}.$$

Inégalité de Hölder: pour tous $p \in]1, +\infty[$, $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^q$ avec $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x_m y_m| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q \right)^{1/q}.$$

Inégalité de Jensen: pour tous $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$ et tout $x \in \ell^p$, on a $x \in \ell^q$ et

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{1/p}.$$

(Ces inégalités sont établies dans le cours d'Analyse mathématique de 1CSM&P; cf. paragraphe relatif au logarithme népérien.)

Théorème 1.2.2 *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, ℓ^p est un espace vectoriel.*

De plus, pour tous $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$, on a

$$\varphi \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset \omega.$$

Preuve. La première partie résulte aussitôt de l'inégalité de Minkowski.

La deuxième partie est claire, l'inégalité de Jensen procurant les inclusions $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q$ pour tous $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$. ■

1.3 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Un *opérateur linéaire de E dans F* est une application $T: E \rightarrow F$ telle que

$$\begin{cases} T(ce) = cTe, & \forall c \in \mathbb{K}, \\ T(e_1 + e_2) = Te_1 + Te_2, \end{cases}$$

donc telle que $T(\sum_{j=1}^J c_j e_j) = \sum_{j=1}^J c_j T e_j$ pour toute combinaison linéaire d'éléments de E .

Le *noyau* de T , noté $\ker(T)$, est l'ensemble $T^{-1}\{0\}$ des éléments de E annulés par T . C'est un sous-espace vectoriel de E .

L'image de T , notée $\text{im}(T)$, est l'ensemble TE . C'est un sous-espace vectoriel de F .

Bien sûr, l'opérateur linéaire $T: E \rightarrow F$ est injectif si et seulement si l'équation $Tx = 0$ admet 0 pour seule solution, c'est-à-dire si et seulement si $\ker(T) = \{0\}$.

La détermination de la surjectivité (resp. l'injectivité) d'un opérateur linéaire $T: E \rightarrow F$ est cruciale lors de la résolution d'une équation du type $Tx = f$: elle détermine l'existence (resp. l'unicité) d'une solution.

Exemples. La structure matricielle des opérateurs linéaires $T: E \rightarrow F$ lorsque les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie est bien connue. Mais nous avons déjà rencontré d'autres opérateurs linéaires tels que:

- (1) $L(D): C_p(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$, où $L(D)$ est un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants d'ordre $\leq p$,
- (2) $\int_A \cdot dx: L^1(A) \rightarrow \mathbb{C}$,
- (3) $f \star \cdot: L^p \rightarrow L^p$, pour tout $f \in L^1$ et $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$,
- (4) $f \star \cdot: L^2 \rightarrow L^\infty$, pour tout $f \in L^2$,
- (5) $\mathcal{F}^\pm: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$,
- (6) $\mathbb{F}^\pm: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$,
- (7) $T: C_0([a, b]) \rightarrow \omega \quad f \mapsto (\int_a^b x^m f(x) dx)_{m \in \mathbb{N}}$, opérateur lié au problème des moments (cf. cours de 2CSM&P). \square

Exemple. Opérateurs de Fredholm de première espèce. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et soit k un élément de $C_0([a, b] \times [a, b])$. Il est alors clair que

$$K: C_0([a, b]) \rightarrow C_0([a, b]) \quad f(\cdot) \mapsto \int_a^b k(\cdot, y) f(y) dy$$

a un sens et définit un opérateur linéaire. \square

Exemple. Opérateurs de Fredholm de seconde espèce. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et soit k un élément de $C_0([a, b] \times [a, b])$. Il est alors clair que

$$\text{id} - K: C_0([a, b]) \rightarrow C_0([a, b]) \quad f(\cdot) \mapsto f(\cdot) - \int_a^b k(\cdot, y) f(y) dy$$

a un sens et définit un opérateur linéaire. \square

Exemple. Opérateurs de Volterra. Il s'agit du cas particulier des opérateurs de Fredholm de première espèce pour lesquels le noyau k vérifie l'égalité $k(x, y) = 0$ si $y > x$; on a alors

$$Kf(x) = \int_a^x k(x, y) f(y) dy, \quad \forall x \in [a, b]. \square$$

Théorème 1.3.1 Soient E et F deux espaces vectoriels. Tout opérateur linéaire T d'un sous-espace vectoriel L de E dans F admet un prolongement linéaire de E dans F .

Preuve. Soit B une base de Hamel de L . Nous savons qu'il existe une base de Hamel C de E , qui contient B . Tout élément e de E admet alors une décomposition unique $e = e_1 + e_2$ avec $e_1 \in \text{span}(B) = L$ et $e_2 \in \text{span}(C \setminus B)$. Cela étant, on vérifie de suite que l'application

$$S: E \rightarrow F \quad e \mapsto Te_1$$

est un prolongement linéaire de T . ■

On vérifie de suite que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs linéaires de E dans F est un espace vectoriel si on le munit de

- a) la multiplication externe \times définie par $(c \times T) \cdot = c(T \cdot)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$,
- b) l'addition $+$ définie par $(T_1 + T_2) \cdot = T_1 \cdot + T_2 \cdot$.

Dans le cas $E = F$, on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Exercice. Quelle est l'origine de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$? □

Théorème 1.3.2 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre. ■

Exercice. Etablir que l'opérateur linéaire $T: E \rightarrow F$

- 1) est un monomorphisme (c'est-à-dire que $(S \in \mathcal{L}(G, E), TS = 0) \Rightarrow S = 0$) si et seulement si T est injectif,
- 2) est un épimorphisme (c'est-à-dire que $(S \in \mathcal{L}(F, G), ST = 0) \Rightarrow S = 0$) si et seulement si T est surjectif,
- 3) admet un inverse linéaire à droite ($\exists S \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $TS = \text{id}_F$) si et seulement si T est surjectif,
- 4) admet un inverse linéaire à gauche ($\exists S \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $ST = \text{id}_E$) si et seulement si T est injectif. □

Exercice. Etablir que

- 1) $E = \{ f \in C_2([a, b]) : f(a) = f(b) = 0 \}$ est un sous-espace vectoriel de $C_2([a, b])$,
- 2) $T: E \rightarrow C_0([a, b]) \quad f \mapsto D^2 f$ est un isomorphisme dont l'inverse est un opérateur à noyau.

Suggestion pour 2): T est injectif car $Tf = 0$ implique $f(x) = c_0 + c_1 x$, or on doit avoir $f(a) = f(b) = 0$; T est surjectif car $Tu = f$ a pour solution

$$u(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(z) dz - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b dy \int_a^y f(z) dz;$$

enfin T^{-1} est un opérateur à noyau car une permutation de l'ordre d'intégration dans la valeur de $u(x)$ conduit à

$$u(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

avec

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-b)(y-a)}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq x \\ \frac{(x-a)(y-b)}{b-a} & \text{si } x \leq y \leq b. \end{cases}$$

Bien remarquer que le noyau k est continu sur $[a, b] \times [a, b]$ et symétrique (c'est-à-dire tel que $k(x, y) = k(y, x)$). \square

1.4 Produits et sommes directes finies

Théorème 1.4.1 *Si E_1, \dots, E_J sont des espaces vectoriels en nombre fini, les opérations*

$$\begin{aligned} + & : \left(\prod_{j=1}^J E_j \right) \times \left(\prod_{k=1}^J E_k \right) \rightarrow \prod_{j=1}^J E_j \\ & ((e_1, \dots, e_J), (f_1, \dots, f_J)) \mapsto (e_1 + f_1, \dots, e_J + f_J) \\ \cdot & : \mathbb{K} \times \prod_{j=1}^J E_j \rightarrow \prod_{j=1}^J E_j \quad (c, e_1, \dots, e_J) \mapsto (ce_1, \dots, ce_J) \end{aligned}$$

munissent $\prod_{j=1}^J E_j$ d'une structure d'espace vectoriel. \blacksquare

Définition. Si E_1, \dots, E_J sont des espaces vectoriels en nombre fini, l'espace produit fini $\prod_{j=1}^J E_j$ est l'ensemble $\prod_{j=1}^J E_j$ muni de la structure vectorielle introduite dans le théorème précédent.

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $A, B \subset E$ et $c \in \mathbb{K}$ non vides, on pose

$$A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \} \quad \text{et} \quad cA = \{ ca : a \in A \}.$$

A partir de là, on peut évidemment introduire la notion de combinaison linéaire de parties non vides de E .

Remarque. Il convient de se méfier des réflexes acquis lors de l'utilisation des combinaisons linéaires de nombres. Ainsi l'égalité $A + B = C + B$ n'implique en général pas $A = C$. (Quand est-ce vrai?) \square

Un cas particulier de l'addition reçoit une attention particulière: c'est celui de la somme de sous-espaces vectoriels. Bien sûr une telle somme est aussi un sous-espace vectoriel.

Théorème 1.4.2 *Si L et M sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E , alors*

$$T: L \times M \rightarrow L + M \quad (l, m) \mapsto l + m$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels si et seulement si $L \cap M = \{0\}$.

Preuve. Il est clair que T est une surjection linéaire. Cela étant, d'une part, si T est injectif et si $e \in L \cap M$, on a $T(e, -e) = 0$ donc $e = 0$. D'autre part, si $L \cap M = \{0\}$ et $T(l, m) = 0$, il vient $l = -m \in L \cap M$ donc $l = m = 0$. ■

Définition. Si L et M sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E tels que $L \cap M = \{0\}$, alors $L + M$ est appelé *somme directe* de L et M , et est noté $L \oplus M$.

Théorème 1.4.3 *Soient L, M des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .*

a) *On a $E = L \oplus M$ si et seulement si tout $e \in E$ admet une décomposition unique $e = l + m$ avec $e \in E$ et $m \in M$.*

b) *Si $E = L \oplus M$, alors $\dim(E) = \dim(L) + \dim(M)$.*

Preuve. a) est direct et b) est connu pour E de dimension finie. Pour conclure, il suffit de constater que b) est trivial si L ou M est de dimension infinie. ■

Si $E = L \oplus M$, on dit que M est un *complément algébrique de L dans E* ou même plus simplement un *complément de L dans E* si aucune confusion n'est possible. Il est clair qu'alors L est aussi un complément de M dans E . On dit également que L et M sont *complémentaires dans E* .

Théorème 1.4.4 *Tout sous-espace vectoriel L de l'espace vectoriel E a un complément algébrique dans E .*

Preuve. Soit B une base de Hamel de L . Nous savons qu'il existe une base de Hamel C de E , qui contient B . On vérifie alors directement que $\text{span}(C \setminus B)$ est un complément algébrique de L dans E . ■

Un *projecteur linéaire* de l'espace vectoriel E est un opérateur linéaire $P: E \rightarrow E$ tel que $P^2 = P$.

Théorème 1.4.5 *Soit E un espace vectoriel.*

a) *Si P est un projecteur linéaire de E , alors $\text{id} - P$ est aussi un projecteur linéaire de E et on a $E = \ker(P) \oplus \text{im}(P)$.*

b) *Si les sous-espaces vectoriels L, M de E sont complémentaires, alors l'opérateur P_L qui, à tout $e \in E$, associe l'élément unique $l_e \in L$ pour lequel il existe $m_e \in M$ tel que $e = l_e + m_e$, est un projecteur linéaire de E tel que $\text{im}(P_L) = L$ et $\ker(P_L) = M$. ■*

Théorème 1.4.6 Soient E, F des espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si M est un complément de $\ker(T)$ dans E , alors la restriction de T à M est un isomorphisme entre M et $\text{im}(T)$. On a donc

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T)). \blacksquare$$

Exemple. Si $x_0 \in [a, b]$, il est clair que

$$P: C_0([a, b]) \rightarrow C_0([a, b]) \quad f \mapsto f(x_0)\chi_{[a, b]}$$

est un projecteur linéaire. \square

Exemple. Etablir que l'opérateur "partie paire"

$$P: C_0([-a, a]) \rightarrow C_0([-a, a]) \quad (Pf)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

est un projecteur linéaire. Quel est son noyau? Quelle est son image? \square

Exercice. Si $(L_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de sous-espaces vectoriels propres de même dimension $l \geq 1$ d'un espace vectoriel E de dimension finie n , alors il existe un sous-espace vectoriel M de E qui est complément algébrique dans E de chacun des L_m .

Suggestion. Soit N l'ensemble des entiers j pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel M de E tel que $\dim(M) = j$ et $M \cap L_m = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Vu la Proposition 1.1.2, il est clair que $1 \in N$. Notons k la borne supérieure de N — on a bien sûr $k \in N$ et $k < n$. Il existe donc un sous-espace vectoriel M de E tel que $\dim(M) = k$ et $M \cap L_m = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. En fait, on a aussi $M + L_m = E$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ car sinon il existe un sous-espace vectoriel propre N de E tel que $(M + L_m) \cap N = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ donc tel que $(M + N) \cap L_m = \{0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, avec $M + N \neq M$, ce qui est contradictoire avec $k = \sup N$. \square

1.5 Produits et sommes directes

Théorème 1.5.1 Si $\{E_j : j \in J\}$ est un ensemble non vide d'espaces vectoriels, les opérations

$$+ : \left(\prod_{j \in J} E_j \right) \times \left(\prod_{j \in J} E_j \right) \rightarrow \prod_{j \in J} E_j \quad ((e_j)_{j \in J}, (f_j)_{j \in J}) \mapsto (e_j + f_j)_{j \in J}$$

et

$$\cdot : \mathbb{K} \times \left(\prod_{j \in J} E_j \right) \quad (c, (e_j)_{j \in J}) \mapsto (ce_j)_{j \in J}$$

munissent l'espace $\prod_{j \in J} E_j$ d'une structure d'espace vectoriel. \blacksquare

Définition. Si $\{E_j : j \in J\}$ est un ensemble non vide d'espaces vectoriels, le *produit direct* $\prod_{j \in J} E_j$ est cet ensemble muni de la structure d'espace vectoriel introduite dans le théorème précédent.

Théorème 1.5.2 Si $\{E_j : j \in J\}$ est un ensemble non vide d'espaces vectoriels,

$$\left\{ (e_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} E_j : \#\{j \in J : e_j \neq \emptyset\} \in \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\prod_{j \in J} E_j$, appelé *somme directe* des E_j pour $j \in J$ et noté $\oplus_{j \in J} E_j$. ■

Définition. Etant donné un ensemble non vide $\{E_j : j \in J\}$ d'espaces vectoriels, on introduit pour tout $k \in J$

a) la *k-ème projection canonique*

$$\pi_k : \prod_{j \in J} E_j \rightarrow E_k \quad (e_j)_{j \in J} \mapsto e_k,$$

b) la *k-ème injection canonique*

$$\iota_k : E_k \rightarrow \oplus_{j \in J} E_j \quad e \mapsto (e_j)_{j \in J} \text{ avec } e_j = \begin{cases} e & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie de suite qu'il s'agit d'opérateurs linéaires tels que

$$\pi_k \circ \iota_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ \text{id}_{E_j} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

De plus, il est clair que, pour tout espace vectoriel F et tout ensemble $\{T_j : j \in J\}$ d'opérateurs linéaires $T_j \in \mathcal{L}(F, E_j)$, il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(F, \prod_{j \in J} E_j)$ et un seul tel que

$$\pi_j \circ T = T_j, \quad \forall j \in J.$$

De même, pour tout espace linéaire G et tout ensemble $\{R_j : j \in J\}$ d'opérateurs $R_j \in \mathcal{L}(E_j, G)$, il existe un et un seul opérateur $R \in \mathcal{L}(\oplus_{j \in J} E_j, G)$ tel que

$$R \circ \iota_j = R_j, \quad \forall j \in J.$$

1.6 Espace quotient

Proposition 1.6.1 *Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , la relation \sim_L définie sur $E \times E$ par*

$$e \sim_L f \iff e - f \in L$$

est une relation d'équivalence. Ses classes sont les ensembles $e + L$, notées également e_L , $e^{\sim L}$ ou même e^{\sim} si aucune confusion sur L n'est possible.

Les opérations d'addition

$$e_L + f_L = (e + f)_L, \quad \forall e, f \in E,$$

et de multiplication par un scalaire

$$ce_L = (ce)_L, \quad \forall e \in E, c \in \mathbb{K},$$

sont définies sur l'ensemble des classes $\{e_L : e \in E\}$ et le munissent d'une structure d'espace vectoriel.■

Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , l'espace quotient de E par L est l'espace vectoriel construit dans la proposition précédente. Il est noté E/L .

On vérifie de suite que l'application $s_L: E \rightarrow E/L$ définie par $s_L e = e_L$ pour tout $e \in E$ est un opérateur linéaire surjectif, appelé *surjection canonique* de E sur E/L .

Bien souvent, s'il n'existe pas d'ambiguïté sur L , on écrit s en guise de s_L .

1.7 Structure des opérateurs linéaires

Théorème 1.7.1 *Soient E, F des espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tous sous-espaces vectoriels L de E et M de F tels que $TL \subset M$, il existe un opérateur linéaire unique $S: E/L \rightarrow F/M$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ s_L \downarrow & & \downarrow s_M \\ E/L & \xrightarrow{S} & F/M \end{array}$$

soit commutatif.

De plus,

- S est injectif si et seulement si $T^{-1}M \subset L$,*
- S est surjectif si et seulement si $\text{im}(T) + M = F$.*

Preuve. Si un tel opérateur S existe, on doit avoir

$$Se_L = Ss_Le = s_MTe = (Te)_M, \quad \forall e \in E,$$

ce qui assure son unicité.

Etant donné $e_1, e_2 \in E$ tels que $e_1 - e_2 \in L$, on a nécessairement $(Te_1)_M = (Te_2)_M$. On peut donc définir une application $S: E/L \rightarrow F/M$ par $Se_L = (Te)_M$. On vérifie alors aisément que S est un opérateur linéaire.

De plus,

- a) cet opérateur S est injectif si et seulement si tout $e \in E$ tel que $Se_L = 0$ (c'est-à-dire tel que $Te \in M$) appartient à L ,
- b) cet opérateur S est surjectif si et seulement si, pour tout $f \in F$, il existe $e \in E$ tel que $(Te)_M = f_M$, c'est-à-dire tel que $f \in Te + M$. ■

Théorème 1.7.2 Soient E, F des espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une bijection linéaire $T^\sim: E/\ker(T) \rightarrow \text{im}(T)$ et une seule telle que le diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker(T) & \xrightarrow{T^\sim} & \text{im}(T) \end{array}$$

soit commutatif. ■

Cela étant, si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , nous savons que L admet un complément algébrique M dans E et qu'il existe un projecteur linéaire P de E tel que $\text{im}(P) = M$ et $\ker(P) = L$. Nous savons donc que E/L et M sont des espaces linéaires isomorphes; ils ont donc même dimension, appelée *codimension de L dans E* et notée $\text{codim}_E(L)$.

1.8 Suites exactes

Remarque. Le théorème de structure des opérateurs linéaires débouche naturellement sur les notions de complexes et de suites exactes courtes d'espaces vectoriels, que nous n'allons qu'introduire ici. □

Définitions. Un *complexe d'espaces vectoriels* est la donnée de suites $(E_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ d'espaces vectoriels et $(T_j \in \mathcal{L}(E_j, E_{j+1}))_{j \in \mathbb{Z}}$ d'opérateurs linéaires qui, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, est un *complexe au degré j* , c'est-à-dire vérifie $T_j T_{j-1} = 0$. On le note

$$\dots \rightarrow E_{j-1} \xrightarrow{T_{j-1}} E_j \xrightarrow{T_j} E_{j+1} \rightarrow \dots$$

S'il existe $J_0 \in \mathbb{Z}$ (resp. $J_1 \in \mathbb{Z}$) tel que $E_j = 0$ pour tout $j \leq J_0$ (resp. $j \geq J_1$), on convient de ne pas écrire les E_j pour $j < J_0$ (resp. $j > J_1$).

Un tel complexe est *exact au degré* $j \in \mathbb{Z}$ si $\text{im}(T_{j-1}) = \text{ker}(T_j)$. C'est une *suite exacte* s'il est exact en tout $j \in \mathbb{Z}$. En particulier, une suite exacte est *courte* si elle s'écrit

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \rightarrow 0.$$

Définitions. Si E et F sont des espaces vectoriels et si $T \in \mathcal{L}(E, F)$,

a) la *conoyau* de T , noté $\text{coker}(T)$, est le quotient $F/\text{im}(T)$,

b) la *coimage* de T , notée $\text{coim}(T)$, est le quotient $E/\text{ker}(T)$.

Proposition 1.8.1 a) *Le complexe*

$$\dots \rightarrow E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \rightarrow \dots$$

est exact en F si et seulement si la bijection canonique $\tilde{T}: \text{coim}(T) \rightarrow \text{im}(T)$ est une bijection entre $\text{coim}(T)$ et $\text{ker}(S)$.

En particulier,

a.1) *le complexe $0 \rightarrow E \xrightarrow{T} F \rightarrow \dots$ est exact en E si et seulement si T est injectif,*

a.2) *le complexe $\dots \rightarrow E \xrightarrow{T} F \rightarrow 0$ est exact en F si et seulement si T est surjectif.*

b) *Le complexe*

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

i) *T est injectif,*

ii) *l'opérateur unique $R: \text{coker}(T) \rightarrow G$ rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{S} & G \\ \text{im}(T) \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \text{coker}(T) & \xrightarrow{R} & G/\{0\} \end{array}$$

commutatif est une bijection. ■

Exemples. 1) Le complexe $0 \rightarrow E \rightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si $E = 0$.

2) Le complexe $0 \rightarrow E \xrightarrow{T} F \rightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si T est un isomorphisme.

3) Pour tout sous-espace vectoriel L de l'espace vectoriel E ,

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s_L} E/L \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

C'est même le prototype des suites exactes courtes car si

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte, T induit un isomorphisme entre E et le sous-espace vectoriel $\text{im}(T)$ de F , alors que la bijection canonique \tilde{S} assure que $F/\text{im}(T)$ est isomorphe à G . \square

Voici le lien entre les suites exactes courtes et le théorème fondamental de décomposition des opérateurs linéaires.

Théorème 1.8.2 *Si E, F sont des espaces vectoriels et si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors les suites*

$$0 \rightarrow \ker(T) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s} \text{coim}(T) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{coim}(T) \xrightarrow{\tilde{T}} \text{im}(T) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{im}(T) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{s} \text{coker}(T) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \ker(T) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{s} \text{coker}(T) \rightarrow 0$$

sont exactes. \blacksquare

1.9 Fonctionnelle linéaire, dual algébrique

Soit E un espace vectoriel.

Une *fonctionnelle linéaire sur E* est un opérateur linéaire de E dans \mathbb{K} .

Le *dual algébrique de E* est l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur E ; on peut donc le noter $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$; on préfère cependant lui accorder une notation particulière telle que E^* .

Etant donné $e \in E$ et $e^* \in E^*$, nous allons adopter la notation $\langle e, e^* \rangle$ pour désigner la valeur que e^* prend en e . (On trouve aussi d'autres notations telle que $e^*(e)$.)

Théorème 1.9.1 *Si e^* est une fonctionnelle linéaire non nulle sur l'espace vectoriel E ,*

- a) $\ker(e^*)$ est un sous-espace vectoriel de codimension 1 de E ,
- b) $\text{im}(e^*) = \mathbb{K}$.

Preuve. a) De fait, si $e_0 \in E$ est tel que $r = \langle e_0, e^* \rangle \neq 0$, on vérifie de suite que $P: E \rightarrow E$ défini par $e \mapsto \frac{1}{r} \langle e, e^* \rangle e_0$ est un projecteur linéaire de E tel que $\ker(P) = \ker(e^*)$ et $\text{im}(P) = \text{span}(\{e_0\})$.

b) est immédiat. \blacksquare

Une partie \mathcal{A} de E^* est *séparante* si, pour tout $e \in E$ non nul, il existe $e^* \in \mathcal{A}$ tel que $\langle e, e^* \rangle \neq 0$.

Théorème 1.9.2 (séparation) *Soit L un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E . Pour tout $e_0 \in E \setminus L$, il existe $e^* \in E^*$ tel que $\langle e_0, e^* \rangle = 1$ et $\langle l, e^* \rangle = 0$ pour tout $l \in L$.*

En particulier, E^ est séparant.*

Preuve. Posons $L_0 = L + \text{span}(\{e_0\})$. On vérifie de suite que

$$l^* : L_0 \rightarrow \mathbb{K} \quad l + ce_0 \mapsto c$$

définit une fonctionnelle linéaire sur L . Cela étant, tout prolongement linéaire e^* de l^* sur E convient.

Pour le cas particulier, il suffit de considérer $L = \{0\}$. ■

Comme le dual algébrique E^* d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel, on peut en considérer le dual algébrique E^{**} , appelé *bidual algébrique* de E .

On vérifie de suite que, pour tout $e \in E$,

$$\delta_e : E^* \rightarrow \mathbb{K} \quad e^* \mapsto \langle e, e^* \rangle$$

est une fonctionnelle linéaire sur E^* et que l'ensemble de ces fonctionnelles est une partie séparante de E^{**} .

Remarque. Soit E un espace vectoriel.

a) Si E est de dimension finie, nous savons bien que $\{\delta_e : e \in E\}$ est égal à E^{**} ; on dit que E est algébriquement réflexif.

b) En fait, cette propriété caractérise les espaces vectoriels de dimension finie: si E est de dimension infinie, l'inclusion $\{\delta_e : e \in E\} \subset E^{**}$ est stricte. Soit $B = \{e_j : j \in J\}$ une base de Hamel de E . Pour tout $k \in J$, soit e_k^* la fonctionnelle linéaire définie sur E par $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tout $k \in J$. Il est clair que ces fonctionnelles e_k^* sont linéairement indépendantes. Cela étant, soit C une base de Hamel de E^* , contenant $\{e_k^* : k \in J\}$. Soit alors τ une fonctionnelle linéaire sur E^* qui s'annule sur tous les éléments de C sauf une suite d'éléments de $\{e_k^* : k \in J\}$. On conclut alors en remarquant que τ ne peut pas appartenir à $\{\delta_e : e \in E\}$. □

Proposition 1.9.3 *Soit E un espace vectoriel.*

Si $J \in \mathbb{N}_0$, si les $e_1, \dots, e_J \in E$ sont linéairement indépendants et si \mathcal{L} est un sous-espace vectoriel séparant de E^ , alors il existe $e_1^*, \dots, e_J^* \in \mathcal{L}$ tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$.*

En particulier, si $J \in \mathbb{N}_0$ et si les $e_1^, \dots, e_J^* \in E^*$ sont linéairement indépendants, alors il existe $e_1, \dots, e_J \in E$ tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$.*

Preuve. Posons

$$L = \{ (\langle e_1, e^* \rangle, \dots, \langle e_J, e^* \rangle) : e^* \in \mathcal{L} \}.$$

Bien sûr, L est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^J . En fait, on a même $L = \mathbb{K}^J$ sinon, vu le théorème précédent, il existe $c \in \mathbb{K}^J \setminus \{0\}$ tel que $\langle L, c \rangle = \{0\}$ donc tel que

$$0 = \sum_{j=1}^J c_j \langle e_j, e^* \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^J c_j e_j, e^* \right\rangle, \quad \forall e^* \in \mathcal{L},$$

ce qui est en contradiction avec le fait que \mathcal{L} est séparable. Dès lors, il existe $e_1^*, \dots, e_J^* \in \mathcal{L}$ tels que

$$(\langle e_1, e_j^* \rangle, \dots, \langle e_J, e_j^* \rangle) = (\underbrace{0, \dots, 0}_j, 1, 0, \dots, 0)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$; ce qui suffit.

Le cas particulier a lieu car $\mathcal{L} = \{ \delta_e : e \in E \}$ est un sous-espace vectoriel séparable de E^{**} . ■

Proposition 1.9.4 *Soit E un espace vectoriel. Si $J \in \mathbb{N}_0$ et si les $e_1, \dots, e_J \in E$ et les $e_1^*, \dots, e_J^* \in E^*$ sont tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$, alors*

$$P_1: E \rightarrow E \quad e \mapsto \sum_{j=1}^J \langle e, e_j^* \rangle e_j$$

est un projecteur linéaire de E tel que $\text{im}(P_1) = \text{span}(\{e_1, \dots, e_J\})$ et

$$P_2: E^* \rightarrow E^* \quad e^* \mapsto \sum_{j=1}^J \langle e_j, e^* \rangle e_j^*$$

est un projecteur linéaire de E^* tel que $\text{im}(P_2) = \text{span}(\{e_1^*, \dots, e_J^*\})$.

Preuve. Tout est direct et immédiat. ■

Proposition 1.9.5 *Soient E un espace vectoriel et \mathcal{L} un sous-espace vectoriel séparable de E^* .*

Si $J \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \dots, e_J \in E$ et $l^ \in \mathcal{L}^*$ sont tels que*

$$(l \in \mathcal{L}, \langle e_1, l \rangle = \dots = \langle e_J, l \rangle = 0) \implies \langle l, l^* \rangle = 0,$$

alors il existe $e_0 \in \text{span}(\{e_1, \dots, e_J\})$ tel que $l^ = \delta_{e_0}|_{\mathcal{L}}$.*

En particulier,

a) si $J \in \mathbb{N}_0$ et $e, e_1, \dots, e_J \in E$ sont tels que

$$(l \in \mathcal{L}, \langle e_1, l \rangle = \dots = \langle e_J, l \rangle = 0) \implies \langle e, l \rangle = 0,$$

alors e appartient à $\text{span}(\{e_1, \dots, e_J\})$.

b) si $J \in \mathbb{N}_0$ et $e^*, e_1^*, \dots, e_J^* \in E^*$ sont tels que

$$(e \in E, \langle e, e_1^* \rangle = \dots = \langle e, e_J^* \rangle = 0) \implies \langle e, e^* \rangle = 0,$$

alors e^* appartient à $\text{span}(\{e_1^*, \dots, e_J^*\})$.

Preuve. Nous pouvons bien sûr supposer les e_1, \dots, e_J linéairement indépendants. Cela étant, il existe $l_1, \dots, l_J \in \mathcal{L}$ tels que $\langle e_j, l_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$ et

$$P_2: E^* \rightarrow E^* \quad e^* \mapsto \sum_{j=1}^J \langle e_j, e^* \rangle l_j$$

est un projecteur linéaire de E^* , d'image égale à $\text{span}(\{l_1, \dots, l_J\})$. Dès lors, pour tout $l \in \mathcal{L}$, $l - P_2 l$ appartient bien sûr à \mathcal{L} mais annule aussi e_1, \dots, e_J . Il s'ensuit que, pour tout $l \in \mathcal{L}$, on a $\langle l - P_2 l, l^* \rangle = 0$ donc

$$\left\langle l, l^* - \sum_{j=1}^J \langle l_j, l^* \rangle \delta_{e_j} \right\rangle = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}.$$

Cela étant, pour $e_0 = \sum_{j=1}^J \langle l_j, l^* \rangle e_j$, il vient $\delta_{e_0}|_{\mathcal{L}} = l^*$.

Le cas particulier est une conséquence directe du résultat principal. ■

Exemples. On vérifie de suite que

(1) pour tout $y \in \omega$,

$$e_y^*: \phi \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ϕ ,

(2) pour tout $y \in \ell^\infty$,

$$e_y^*: \ell^1 \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ℓ^1 ,

(3) pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $y \in \ell^q$ avec $1/p + 1/q = 1$,

$$e_y^*: \ell^p \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ℓ^p ,

(4) l'application

$$\tau: c \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \lim_k x_k$$

est une fonctionnelle linéaire sur c ,

(5) pour tout $y \in \ell^1$,

$$e_y^*: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ℓ^∞ ; sa restriction à c_0 ou à c est donc aussi une fonctionnelle linéaire sur cet espace,

(6) pour tout $y \in \phi$,

$$e_y^*: \omega \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur ω ,

(7) pour tout $x_0 \in K$,

$$\delta_{x_0}: C_0(K) \rightarrow \mathbb{K} \quad f \mapsto f(x_0)$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C_0(K)$,

(8) pour tout $g \in L^1(K)$,

$$\tau_g: C_0(K) \rightarrow \mathbb{K} \quad f \mapsto \int_K f g dx$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C_0(K)$,

(9) pour tous $p \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| \leq p$,

$$e^*: C_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{K} \quad f \mapsto [D^\alpha f]_{x_0}$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C_p(\Omega)$,

(10) pour tous $p \in \mathbb{N}_0$, $K \subset \Omega$, $g \in C_0(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| \leq p$,

$$e^*: C_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{K} \quad f \mapsto \int_K g \cdot D^\alpha f dx$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C_p(\Omega)$. \square

1.10 Opérateur adjoint

Soient E, F deux espaces vectoriels et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $f^* \in F^*$, nous savons que

$$\langle T \cdot, f^* \rangle: E \rightarrow \mathbb{K}$$

est une fonctionnelle linéaire, comme composition de deux opérateurs linéaires. On la note également T^*f^* et ainsi $T^*: F^* \rightarrow E^*$ est une application, appelée *adjoint de T* , qui se révèle aussitôt être un opérateur linéaire.

De nombreuses propriétés de T sont liées à celles de T^* . Cette étude repose sur la considération des notions suivantes:

(1) à toute partie non vide A de E , on associe

$$A^\perp = \{ e^* \in E^* : \langle A, e^* \rangle = \{0\} \},$$

(2) à toute partie non vide \mathcal{A} de E^* , on associe

$$\mathcal{A}^\top = \{ e \in E : \langle e, \mathcal{A} \rangle = \{0\} \}.$$

On vérifie alors aussitôt que A^\perp et \mathcal{A}^\top sont toujours des sous-espaces vectoriels de E^* et de E respectivement.

Exercice. A quoi sont égaux les ensembles $\{0\}^\perp$, E^\perp , $\{0\}^\top$ et $E^{*\top}$? \square

Proposition 1.10.1 *Soit E un espace vectoriel.*

- a) *Pour toute partie non vide A de E , on a $A \subset A^{\perp\top}$.*
- b) *Pour toute partie non vide \mathcal{A} de E^* , on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\top\perp}$.*
- c) *Pour toutes parties non vides A_1, A_2 de E telles que $A_1 \subset A_2$, on a $A_1^\perp \supset A_2^\perp$ et $A_1^{\perp\top} \subset A_2^{\perp\top}$.*
- d) *Pour toutes parties non vides $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ de E^* telles que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, on a $\mathcal{A}_1^\top \supset \mathcal{A}_2^\top$ et $\mathcal{A}_1^{\top\perp} \subset \mathcal{A}_2^{\top\perp}$.*
- e) *Pour toutes parties non vides A de E et \mathcal{A} de E^* , on a $A^\perp = A^{\perp\top\perp}$ et $\mathcal{A}^\top = \mathcal{A}^{\top\perp\top}$.*

Preuve. a), b), c) et d) sont triviaux.

e) Traitons par exemple le cas de A ; celui de \mathcal{A} est analogue. D'une part, $A^\perp \subset A^{\perp\top\perp}$ résulte aussitôt de b) appliqué à A^\perp . D'autre part, on a $A \subset A^{\perp\top}$ vu a), donc $A^\perp \supset A^{\perp\top\perp}$ vu c). D'où la conclusion. \blacksquare

Théorème 1.10.2 *Soit E un espace vectoriel.*

- a) *Pour toute partie non vide A de E , on a $A^{\perp\top} = \text{span}(A)$.*
- b) *Si L et M sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $L^\perp = M^\perp$, alors $L = M$.*

Preuve. a) Comme $A^{\perp\top}$ est un sous-espace vectoriel de E , contenant A , on a déjà $A^{\perp\top} \supset \text{span}(A)$. De plus, s'il existe un élément e_0 dans $A^{\perp\top} \setminus \text{span}(A)$, nous savons qu'il existe $e_0^* \in E^*$ tel que $\langle e_0, e_0^* \rangle = 1$ et $\langle \text{span}(A), e_0^* \rangle = \{0\}$. En particulier, on a alors $\langle A, e_0^* \rangle = \{0\}$ donc $e_0^* \in A^\perp$, ce qui donne lieu à la contradiction $\langle e_0, e_0^* \rangle = 0$.

b) De fait, vu a), il vient successivement $L = L^{\perp\top} = M^{\perp\top} = M$. \blacksquare

Proposition 1.10.3 Soient E un espace vectoriel et \mathcal{A} une partie non vide de E^* . On a alors $\mathcal{A}^{\top\perp} = \mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $e^* \in E^* \setminus \mathcal{A}$, il existe $e \in \mathcal{A}^\top$ tel que $\langle e, e^* \rangle \neq 0$.

Preuve. Comme on a toujours $\mathcal{A}^{\top\perp} \supset \mathcal{A}$, la condition est équivalente à $\mathcal{A}^{\top\perp} \subset \mathcal{A}$ donc à $E^* \setminus \mathcal{A} \subset E^* \setminus \mathcal{A}^{\top\perp}$. Cela signifie que, pour tout $e^* \in E^* \setminus \mathcal{A}$, on a $e^* \notin \mathcal{A}^{\top\perp}$, c'est-à-dire qu'il existe $e \in \mathcal{A}^\top$ tel que $\langle e, e^* \rangle \neq 0$. ■

Remarque. Tout compte fait, l'énoncé précédent n'est qu'une tautologie! □

Une partie \mathcal{A} de E^* est *algébriquement saturée* si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\top\perp}$. Cela exige que \mathcal{A} soit un sous-espace vectoriel de E^* mais cette condition n'est pas suffisante. Cependant $\{0\}$ et E^* sont algébriquement saturés; plus généralement, pour toute partie non vide \mathcal{A} de E^* , $\mathcal{A}^{\top\perp}$ est algébriquement saturé.

Exercice. Etablir que, pour tout $y \in \ell^1$,

$$\tau_y : c \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur c . Etablir que, pour $\mathcal{A} = \{\tau_y : y \in \ell^1\}$, on a $\mathcal{A}^\top = \{0\}$ donc $\mathcal{A}^{\top\perp} = c^*$. Etablir que

$$\tau : c \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$$

est une fonctionnelle linéaire sur c . Etablir que τ n'appartient pas à \mathcal{A} . Au total, \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de c^* , qui n'est pas algébriquement saturé. □

Théorème 1.10.4 Soient E, F des espaces vectoriels.

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

- (a) $\text{im}(T)^\perp = \ker(T^*)$,
- (b) $\text{im}(T) = \ker(T^*)^\top$,
- (c) T est surjectif si et seulement si T^* est injectif.

Preuve. (a) résulte aussitôt de ce que $\langle Te, f^* \rangle = \langle e, T^*f^* \rangle$ pour tous $e \in E$ et $f^* \in F^*$.

(b) est une conséquence directe de (a): comme $\text{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de F , il vient $\text{im}(T) = \text{im}(T)^\perp{}^\top = \ker(T^*)^\top$.

(c) Si $\text{im}(T) = F$, il vient $\ker(T^*) = \text{im}(T)^\perp = F^\perp = \{0\}$ et T^* est injectif. Si T^* est injectif, il vient $\text{im}(T) = \ker(T^*)^\top = \{0\}^\top = F$. ■

Théorème 1.10.5 Soient E, F des espaces vectoriels.

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

- (a) $\ker(T) = \text{im}(T^*)^\top$,
- (b) $\ker(T)^\perp = \text{im}(T^*)$,
- (c) T est injectif si et seulement si T^* est surjectif.

Preuve. (a) résulte aussitôt de ce que $\langle Te, f^* \rangle = \langle e, T^*f^* \rangle$ pour tous $e \in E$, $f^* \in F^*$.

(b) Vu (a), on a déjà $\text{im}(T^*) \subset \text{im}(T^*)^{\top\perp} = \ker(T)^\perp$. Inversement, si e^* appartient à $\ker(T)^\perp$, on peut introduire

$$l^* : \text{im}(T) \rightarrow \mathbb{K} \quad Te \mapsto \langle e, e^* \rangle$$

car, si $e_1, e_2 \in E$ sont tels que $Te_1 = Te_2$, on a $e_1 - e_2 \in \ker(T)$ donc $\langle e_1, e^* \rangle = \langle e_2, e^* \rangle$. Cela étant, l^* est une fonctionnelle linéaire sur $\text{im}(T)$ et admet donc un prolongement linéaire f^* sur F^* . Comme on a alors $T^*f^* = e^*$, on conclut aussitôt.

(c) résulte aussitôt de (a) et (b). ■

Remarque. Ces deux derniers résultats sont très importants puisqu'ils caractérisent l'injectivité et la surjectivité des opérateurs linéaires, notions fondamentales dans l'étude de la résolution d'une équation du type $Tx = f$. Cependant en dehors du cas où E et F sont de dimension finie (on est alors ramené à un problème d'algèbre matricielle) et des deux cas du paragraphe suivant, leur utilité est fort limitée par le fait que E^* et F^* ne sont pas caractérisés dans les cas pratiques (sauf pour le cas trivial de l'espace ϕ). Pour pallier ce handicap, il faut sortir d'une approche purement algébrique du problème. C'est ce que nous allons faire au chapitre suivant en introduisant des notions topologiques. □

Exercice. Si L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , établir que
a) l'adjoint de la surjection canonique $s : E \rightarrow E/L$ est un opérateur $s^* : (E/L)^* \rightarrow E^*$ qui est linéaire, injectif et tel que $\text{im}(s^*) = L^\perp$,
b) l'opérateur $R : E^* \rightarrow L^*$ défini par $e^* \mapsto e^*|_L$ est linéaire et surjectif. □

1.11 Equation $Tx = f$, première approche

Il existe deux cas élémentaires où des méthodes algébriques simples permettent de résoudre une équation du type $Tx = f$.

Définition. Soient E, F des espaces vectoriels. Un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$ est de *rang fini* s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$, $e_1^*, \dots, e_J^* \in E^*$ et $f_1, \dots, f_J \in F$ tels que

$$Te = \sum_{j=1}^J \langle e, e_j^* \rangle f_j, \quad \forall e \in E.$$

Dans cette définition, remarquons que nous pouvons toujours supposer les e_1^*, \dots, e_J^* d'une part et les f_1, \dots, f_J d'autre part linéairement indépendants. Si c'est le cas, on dit que l'opérateur est écrit sous une représentation *propre*, ce qui n'assure évidemment pas son unicité.

Proposition 1.11.1 *Soient E, F des espaces vectoriels. Un opérateur linéaire $T: E \rightarrow F$ est de rang fini si et seulement si $\dim(\text{im}(T)) < \infty$.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Soit $\{f_1, \dots, f_J\}$ une base de $\text{im}(T)$. Il existe alors $f_1^*, \dots, f_J^* \in F^*$ tels que $\langle f_j, f_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$. Dans ces conditions, tout $f \in \text{im}(T)$ s'écrit $f = \sum_{j=1}^J \langle f, f_j^* \rangle f_j$. Dès lors, il vient

$$Te = \sum_{j=1}^J \langle Te, f_j^* \rangle f_j = \sum_{j=1}^J \langle e, T^* f_j^* \rangle f_j, \quad \forall e \in E,$$

ce qui suffit. ■

Remarque. Dans la preuve de la suffisance de la condition, remarquons que les $T^* f_1^*, \dots, T^* f_J^*$ sont linéairement indépendants car $\sum_{k=1}^J c_k T^* f_k^* = 0$ entraîne $0 = \langle f_j, \sum_{k=1}^J c_k f_k^* \rangle = c_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$. □

Proposition 1.11.2 *Soient E, F des espaces vectoriels.*

Si $\sum_{j=1}^J \langle \cdot, e_j^ \rangle f_j$ est une représentation propre d'un opérateur linéaire de rang fini T de E dans F , alors*

- a) $T^* \cdot = \sum_{j=1}^J \langle f_j, \cdot \rangle e_j^*$,
- b) $\ker(T) = \{e \in E : \langle e, e_j^* \rangle = 0 \ \forall j \leq J\}$,
- c) $\ker(T^*) = \{f^* \in F^* : \langle f_j, f^* \rangle = 0 \ \forall j \leq J\}$,
- d) $\text{im}(T) = \text{span}(\{f_1, \dots, f_J\})$,
- e) $\text{im}(T^*) = \text{span}(\{e_1^*, \dots, e_J^*\})$.

Preuve. a) est direct.

b) et c) s'ensuivent aussitôt.

d) L'inclusion \subset est triviale. L'autre résulte aussitôt de l'existence de $e_1, \dots, e_J \in E$ tels que $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$.

e) s'établit comme d). ■

1. Equation $Tx = f$ avec T de rang fini

Vu ce qui précède, il est clair que si E, F sont des espaces vectoriels et si $T \cdot = \sum_{j=1}^J \langle \cdot, e_j^* \rangle f_j$ est un opérateur linéaire de rang fini de E dans F mis sous représentation propre, alors l'équation $Tx = f$ admet une solution si et seulement si $f \in \text{span}(\{f_1, \dots, f_J\})$.

De plus, si $f \in \text{span}(\{f_1, \dots, f_J\})$ et si on choisit des $e_1, \dots, e_J \in E$ tels que la matrice A d'éléments $A_{j,k} = \langle e_k, e_j^* \rangle$ soit inversible, alors l'équation $Tx = f$ a une solution particulière unique $x_0 \in \text{span}(\{e_1, \dots, e_J\})$. Cette solution s'écrit $x_0 = \sum_{j=1}^J \xi_j e_j$ si et seulement si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_J)$ vérifie l'équation $A\xi = \varepsilon$ avec $f = \sum_{j=1}^J \varepsilon_j f_j$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J)$.

Tout est connu sauf ce qui est relatif à x_0 . Mais s'il existe une solution $x_0 = \sum_{j=1}^J \xi_j e_j$, elle donne lieu à

$$Tx_0 = f \quad \text{donc} \quad \sum_{j=1}^J \left\langle \sum_{k=1}^J \xi_k e_k, e_j^* \right\rangle f_j = \sum_{j=1}^J \varepsilon_j f_j = f,$$

et inversement.

2. Equation $(\text{id} - T)x = f$ avec T de rang fini

Position du problème. Soient E un espace vectoriel et $T: E \rightarrow E$ un opérateur linéaire de rang fini dont $T \cdot = \sum_{j=1}^J \langle \cdot, e_j^* \rangle f_j$ est une représentation propre. Nous allons envisager d'une part la résolution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$ et d'autre part les liens qui unissent les noyaux et images des opérateurs $\text{id} - T$ et $(\text{id} - T)^* = \text{id} - T^*$.

Résolution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$. Si x est solution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$, on a nécessairement $x = f + \sum_{j=1}^J \langle x, e_j^* \rangle f_j$. Posons $\xi_j = \langle x, e_j^* \rangle$ pour tout $j = 1, \dots, J$ puis $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_J)$. En introduisant cette représentation de x dans l'équation de départ, il vient

$$\sum_{j=1}^J \left(\xi_j - \langle f, e_j^* \rangle - \sum_{k=1}^J \xi_k \langle f_k, e_j^* \rangle \right) f_j = 0$$

donc

$$\xi_j - \sum_{k=1}^J \langle f_k, e_j^* \rangle \xi_k = \langle f, e_j^* \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, J,$$

en tenant compte de l'indépendance linéaire des f_1, \dots, f_J . Si nous posons $A_{j,k} = \langle f_k, e_j^* \rangle$ et $\varepsilon_j = \langle f, e_j^* \rangle$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$, ξ vérifie l'équation matricielle $\xi - A\xi = \varepsilon$.

Inversement, si $\xi \in \mathbb{K}^J$ est solution de l'équation $\xi - A\xi = \varepsilon$, on vérifie de suite que $x = f + \sum_{j=1}^J \xi_j f_j$ est solution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$.

Au total, nous avons obtenu le résultat suivant, où nous utilisons les notations que nous venons d'introduire.

Théorème 1.11.3 *L'équation $(\text{id} - T)x = f$ admet une solution si et seulement si l'équation $(\text{id} - A)\xi = \varepsilon$ en admet une.*

Toute solution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$ a la forme $x = f + \sum_{j=1}^J \xi_j f_j$. De plus, $x = f + \sum_{j=1}^J \xi_j f_j$ est solution de $(\text{id} - T)x = f$ si et seulement si ξ est solution de $(\text{id} - A)\xi = \varepsilon$. ■

Nous avons ainsi ramené la résolution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$ à un problème algébrique élémentaire.

Comme T^* est aussi un opérateur linéaire de rang fini de E^* dans E^* , le théorème précédent s'applique également à l'équation $(\text{id} - T^*)x^* = f^*$. Dans ce cas, on remplace

- a) le vecteur ξ par $\xi^* = (\langle f_1, x^* \rangle, \dots, \langle f_J, x^* \rangle)$,
- b) le vecteur ε par $\varepsilon^* = (\langle f_1, f^* \rangle, \dots, \langle f_J, f^* \rangle)$,
- c) la matrice A par la matrice A^* d'éléments $A_{j,k}^* = \langle f_j, e_k^* \rangle$.

Problème homogène. Vu ce qui précède, il vient

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\text{id} - T)) &= \dim(\ker(\text{id} - A)) = J - \text{rang}(\text{id} - A) \\ &= J - \text{rang}(\text{id} - A^*) = \dim(\ker(\text{id} - A^*)) \\ &= \dim(\ker(\text{id} - T^*)), \end{aligned}$$

car le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice transposée.

Nous avons donc déjà le résultat suivant:

$$\begin{array}{ccc} \text{id} - T \text{ est injectif} & \iff & \text{id} - T^* \text{ est injectif} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{id} - T^* \text{ est surjectif} & & \text{id} - T \text{ est surjectif} \end{array}$$

donc

$$\text{id} - T \text{ est bijectif} \iff \text{id} - T^* \text{ est bijectif.}$$

Considérons à présent le cas où $\text{id} - T^*$ n'est pas injectif. Son noyau est cependant de dimension finie; soit $\{a_1^*, \dots, a_m^*\}$ une base de $\ker(\text{id} - T^*)$; on a donc $0 < m \leq J$. Or $(\text{id} - T)x = f$ admet une solution si et seulement si $f \in \text{im}(\text{id} - T) = (\ker(\text{id} - T^*))^\top$, c'est-à-dire si et seulement si $\langle f, a_1^* \rangle = \dots = \langle f, a_m^* \rangle = 0$. Nous savons qu'il existe des éléments $a_1, \dots, a_m \in E$ tels que $\langle a_j, a_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, m\}$. Cela étant, d'une part, nous avons

$$\text{span}(\{a_1, \dots, a_m\}) \cap \text{im}(\text{id} - T) = \{0\}$$

car

$$\sum_{j=1}^m c_j a_j \in \text{im}(\text{id} - T) \implies \left\langle \sum_{j=1}^m c_j a_j, a_k^* \right\rangle = c_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, J,$$

et, d'autre part,

$$\text{span}(\{a_1, \dots, a_m\}) + \text{im}(\text{id} - T) = E$$

car, pour tout $e \in E$,

$$e - \sum_{j=1}^m \langle e, a_j^* \rangle a_j \in \text{im}(\text{id} - T).$$

Dès lors, nous obtenons

$$\dim(\ker(\text{id} - T^*)) = \text{codim}_E(\text{im}(\text{id} - T))$$

et, de la même manière

$$\dim(\ker(\text{id} - T)) = \text{codim}_{E^*}(\text{im}(\text{id} - T^*)),$$

donc

$$\begin{aligned} \text{codim}_E(\text{im}(\text{id} - T)) &= \dim(\ker(\text{id} - T^*)) \\ &= \dim(\ker(\text{id} - T)) = \text{codim}_{E^*}(\text{im}(\text{id} - T^*)). \end{aligned}$$

1.12 Rappel

Proposition 1.12.1 *Si T est un opérateur linéaire de l'espace vectoriel E dans lui-même, alors*

a) *pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et $c, c' \in \mathbb{K}$ distincts, on a*

$$\ker((T - c\text{id})^m) \subset \text{im}((T - c'\text{id})^n).$$

b) *$(\ker(T^{m_0}))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E .*

De plus, $\ker(T^{m_0}) = \ker(T^{m_0+1})$ entraîne $\ker(T^{m_0}) = \ker(T^m)$ pour tout entier $m \geq m_0$ et, dans un tel cas, on dit que la suite $(\ker(T^m))_{m \in \mathbb{N}}$ se stabilise et même qu'elle se stabilise en m_0 si m_0 est le premier entier pour lequel on a $\ker(T^{m_0}) = \ker(T^{m_0+1})$.

c) *$(\text{im}(T^m))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-espaces linéaires de E .*

De plus, $\text{im}(T^{m_0}) = \text{im}(T^{m_0+1})$ entraîne $\text{im}(T^{m_0}) = \text{im}(T^m)$ pour tout entier $m \geq m_0$ et, dans un tel cas, on dit que la suite $(\text{im}(T^m))_{m \in \mathbb{N}}$ se stabilise et même qu'elle se stabilise en m_0 si m_0 est le premier entier pour lequel on a

$$\text{im}(T^{m_0}) = \text{im}(T^{m_0+1}).$$

d) si les suites $(\ker(T^m))_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\text{im}(T^m))_{m \in \mathbb{N}}$ se stabilisent en m_0 et n_0 respectivement, on a

$$\begin{cases} m_0 = n_0, \\ \text{im}(T^{m_0}) + \ker(T^{m_0}) = E, \\ \text{im}(T^{m_0}) \cap \ker(T^{m_0}) = \{0\}. \end{cases}$$

Preuve. a) Pour tout $e \in \ker((T - c\text{id})^m)$, il vient

$$0 = (T - c\text{id})^m e = (T - c'\text{id} + (c' - c)\text{id})^m e$$

donc

$$\begin{aligned} e &= \frac{-1}{(c' - c)^m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!} (c' - c)^j (T - c'\text{id})^{m-j} e \\ &= (T - c'\text{id})P(T)e \end{aligned}$$

pour un polynôme P . Cela étant, il vient

$$e = (T - c'\text{id})^n P^n(T)e$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque les polynômes $T - c'\text{id}$ et $P(T)$ commutent.

b) Il est clair que $\ker(T^m) \subset \ker(T^{m+1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De plus, $\ker(T^m) = \ker(T^{m+1})$ entraîne bien sûr

$$\ker(T^{m+1}) = T^{-1}\ker(T^m) = T^{-1}\ker(T^{m+1}) = \ker(T^{m+2}),$$

ce qui permet de conclure aussitôt.

c) Il est clair que $\text{im}(T^{m+1}) \subset \text{im}(T^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De plus, $\text{im}(T^m) = \text{im}(T^{m+1})$ entraîne bien sûr

$$\text{im}(T^{m+1}) = T\text{im}(T^m) = T\text{im}(T^{m+1}) = \text{im}(T^{m+2}),$$

ce qui permet de conclure aussitôt.

d) Établissons d'abord que $m_0 \leq n_0$. Si ce n'est pas le cas, on a $n_0 < m_0$ donc $\ker(T^{n_0}) \neq \ker(T^{n_0+1})$ et il existe $e \in E$ tel que $T^{n_0+1}e = 0$ et $T^{n_0}e \neq 0$. De $\text{im}(T^{n_0}) = \text{im}(T^{m_0})$, on tire alors l'existence de $f \in E$ tel que $T^{n_0}e = T^{m_0}f$ donc tel que $T^{n_0+1}e = T^{m_0+1}f = 0$, ce qui entraîne la contradiction $T^{n_0}e = T^{m_0}f = 0$.

Établissons ensuite que $n_0 \leq m_0$. Si ce n'est pas le cas, on a $m_0 < n_0$. De $\text{im}(T^{n_0}) = \text{im}(T^{n_0+1})$, on tire que, pour tout $e \in E$, il existe $f \in E$ tel que $T^{n_0}e = T^{n_0+1}f$ donc tel que $T^{n_0}(e - Tf) = 0$. Mais alors il vient $T^{m_0}(e - Tf) = 0$ donc $\text{im}(T^{m_0}) \subset \text{im}(T^{m_0+1})$, ce qui est contradictoire.

De la sorte, nous avons obtenu l'égalité $m_0 = n_0$.

Etablissons que $\text{im}(T^{m_0}) + \ker(T^{m_0}) = E$. De fait, pour tout $e \in E$, il existe $f \in E$ tel que $T^{m_0}e = T^{2m_0}f$ donc tel que $e = T^{m_0}f + (e - T^{m_0}f)$ avec $e - T^{m_0}f \in \ker(T^{m_0})$.

Enfin prouvons que $\text{im}(T^{m_0}) \cap \ker(T^{m_0}) = \{0\}$. Si e est un élément de cette intersection, il existe $f \in E$ tel que $e = T^{m_0}f$ alors que $T^{m_0}e = 0$. Il vient alors $T^{2m_0}f = 0$, ce qui implique $T^{m_0}f = 0$, c'est-à-dire $e = 0$. ■

Définitions. Si T est un opérateur linéaire de l'espace vectoriel E dans lui-même, la chaîne engendrée par $e \in E \setminus \{0\}$ est la suite $(T^m e)_{m \in \mathbb{N}}$ où on pose $T^0 e = e$. Une telle chaîne est *limitée* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $T^m e \neq 0$ et $T^{m+1} e = 0$, auquel cas $m + 1$ est sa *longueur*, e est sa *tête* et $T^m e$ sa *queue*.

La preuve des propriétés suivantes, mise au point dans les espaces vectoriels de dimension finie, s'étend directement au cas des espaces vectoriels généraux.

Proposition 1.12.2 Soit T un opérateur linéaire de l'espace vectoriel E dans lui-même.

a) Les éléments d'un ensemble de chaînes limitées sont linéairement indépendants si et seulement si les queues de ces chaînes sont linéairement indépendantes.

b) Si $\ker(T^m)$ est de dimension finie, il admet une base constituée par les éléments de chaînes linéairement indépendantes de longueur $\leq m$.

c) Si les suites $(\ker(T^m))_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\text{im}(T^n))_{n \in \mathbb{N}}$ se stabilisent en m_0 et si $\ker(T^{m_0})$ est de dimension finie, alors $\ker(T^m)$ est de dimension finie pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\dim(\ker(T^m)) = \text{codim}_E(\text{im}(T^m))$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. ■

Chapitre 2

Espaces normés

2.1 Définition

Définitions. Soit E un espace vectoriel.

Une *semi-norme* sur E est une fonction $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (a) $p(ce) = |c|p(e)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$,
- (b) $p(e_1 + e_2) \leq p(e_1) + p(e_2)$.

Une *norme* sur E est une semi-norme p sur E telle que $p(e) = 0$ a lieu si et seulement si $e = 0$. Le plus souvent, on abandonne alors la notation p au profit de $\|\cdot\|$, le nombre $p(e)$ étant noté $\|e\|$.

Exemples. On vérifie directement que

- 1) le module est une norme sur \mathbb{R}^n et sur \mathbb{C}^n ,
- 2) $\|x\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|$ est une norme sur ℓ^1 ,
- 3) $\|x\|_p = (\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p)^{1/p}$ est une norme sur ℓ^p pour tout $p \in [1, \infty[$,
- 4) $\|x\|_{\infty} = \sup_{m \in \mathbb{N}_0} |x_m|$ est une norme sur ℓ^{∞} donc sur c et sur c_0 ,
- 5) $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ est une norme sur $C(K)$,
- 6) $\|f\|_1 = \int_A |f| dx$ est une norme sur $L^1(A)$,
- 7) $\|f\|_p = (\int_A |f|^p dx)^{1/p}$ est une norme sur $L^p(A)$ pour tout $p \in [1, \infty[$,
- 8) $\|f\|_{\infty} = \sup_{pp} |f(x)|$ est une norme sur $L^{\infty}(A)$. \square

Proposition 2.1.1 Soit E un espace vectoriel.

- a) Si p, q sont des normes (resp. semi-normes) sur E et si $r > 0$, alors $rp, p + q, \sup\{p, q\}$ et $\sqrt{p^2 + q^2}$ sont des normes (resp. semi-normes) sur E .
- b) Si p est une semi-norme sur E et L un sous-espace vectoriel de E , alors

$$p_L: E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto \inf_{l \in L} p(e + l)$$

est une semi-norme sur E .

c) Si T est un opérateur linéaire de E dans un espace vectoriel F et si q est une semi-norme sur F , alors $q(T\cdot)$ est une semi-norme sur E .

En particulier, pour tout $e^* \in E^*$, $|\langle \cdot, e^* \rangle|$ est une semi-norme sur E . ■

Voici quelques propriétés fondamentales des normes et semi-normes.

Proposition 2.1.2 Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E ,

- a) $p(0) = 0$,
- b) $p(e) \geq 0$,
- c) $p(\sum_{j=1}^J c_j e_j) \leq \sum_{j=1}^J |c_j| p(e_j)$,
- d) $|p(e_1) - p(e_2)| \leq p(e_1 - e_2)$.

Preuve. a) Il suffit de noter qu'on a $p(0) = p(c0) = |c|p(0)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.

b) De fait, pour tout $e \in E$, on a alors

$$0 = p(0) = p(e - e) \leq p(e) + p(-e) = 2p(e).$$

c) est immédiat par récurrence sur J .

d) résulte aussitôt de la majoration

$$p(e) = p(e - f + f) \leq p(e - f) + p(f). \blacksquare$$

Définition. Un *espace normé* est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E ; il est noté $(E, \|\cdot\|)$ ou même tout simplement E si aucune confusion sur $\|\cdot\|$ n'est possible.

Exemples. De la sorte \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , c_0 , c , ℓ^1 , ℓ^p , ℓ^∞ , $C_0(K)$, $L^1(A)$, $L^p(A)$ et $L^\infty(A)$ sont autant d'espaces normés (munis de leurs normes canoniques spécifiées aux exemples précédents). □

Théorème 2.1.3 a) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, l'application

$$d_{\|\cdot\|} : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad (e_1, e_2) \mapsto \|e_1 - e_2\|$$

est une distance sur E telle que

$$\begin{cases} d_{\|\cdot\|}(e_1 - e, e_2 - e) = d_{\|\cdot\|}(e_1, e_2) \\ d_{\|\cdot\|}(ce_1, ce_2) = |c| d_{\|\cdot\|}(e_1, e_2), \quad \forall c \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

b) Inversement si la distance d sur l'espace vectoriel E est telle que

$$\begin{cases} d(e_1 - e, e_2 - e) = d(e_1, e_2) \\ d(ce_1, ce_2) = |c| d(e_1, e_2), \quad \forall c \in \mathbb{K}, \end{cases}$$

alors

$$\|\cdot\|_d : E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto d(e, 0)$$

est une norme sur E telle que $d_{\|\cdot\|_d} = d$.

De plus, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, on a $\|\cdot\|_{d_{\|\cdot\|}} = \|\cdot\|$. ■

Définition. L'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est l'espace métrique privilégié $(E, d_{\|\cdot\|})$.

Définitions. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors, pour tout $r > 0$, les ensembles

$$b(r) = \{e \in E : \|e\| \leq r\} \quad \text{et} \quad b(< r) = \{e \in E : \|e\| < r\}$$

sont bien sûr égaux respectivement à $b(0; r)$ et $b(0; < r)$. Ils sont appelés respectivement *boule fermée* de rayon r et *boule ouverte* de rayon r (sans spécification nécessaire du centre 0). Pour tout $e \in E$ et tout $r > 0$, on a évidemment

$$b(e; r) = e + b(r) \quad \text{et} \quad b(e; < r) = e + b(< r).$$

Théorème 2.1.4 Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé,

a) l'application

$$+ : E \times E \rightarrow E \quad (e, f) \mapsto e + f$$

est uniformément continue,

b) l'application

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E \quad (c, e) \mapsto ce$$

est continue,

c) pour tout $c \in \mathbb{K}$, l'application

$$M_c : E \rightarrow E \quad e \mapsto ce$$

est uniformément continue,

d) l'application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto \|e\|$$

est uniformément continue.

Preuve. Cela résulte aussitôt des majorations

$$\begin{aligned} \|(e_1 + f_1) - (e_2 + f_2)\| &\leq \|e_1 - e_2\| + \|f_1 - f_2\|, \\ \|ce - df\| &\leq |c - d| \|e - f\| + |c - d| \|f\| + |d| \|e - f\|, \\ \|ce - cf\| &= |c| \|e - f\|, \\ \||e\| - \|f\|| &\leq \|e - f\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Définitions. De même, si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E , alors, pour tout $e \in E$ et tout $r > 0$, les ensembles

$$b_p(e; r) = \{ f \in E : p(e - f) \leq r \} \text{ et } b_p(e; < r) = \{ f \in E : p(e - f) < r \}$$

sont appelés *semi-boules* de *centre* e et de *rayon* r pour la semi-norme p (que nous distinguerons plus tard en qualifiant la première de fermée et la seconde d'ouverte).

Voici quelques propriétés élémentaires des semi-normes et semi-boules.

Introduisons tout d'abord les notions de partie absolument convexe et de partie absorbante d'un espace linéaire.

Rappel. Une partie C de l'espace vectoriel E est *convexe* si elle est non vide et si, pour tous $e, f \in C$ et $r \in]0, 1[$, on a $re + (1 - r)f \in C$.

Nous savons que, si E et F sont des espaces vectoriels et si T est un opérateur linéaire de E dans F , alors

- a) l'image par T de toute partie convexe de E est une partie convexe de F ,
- b) si elle est non vide, l'image inverse par T d'une partie convexe de F est une partie convexe de E .

De plus, tout espace vectoriel E est convexe et toute intersection de parties convexes de E est convexe. Cela étant, *l'enveloppe convexe* d'une partie non vide A de E est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A ; c'est la plus petite partie convexe de E contenant A , elle est notée $\text{co}(A)$ et on a

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^J r_j e_j : J \in \mathbb{N}_0, e_j \in A, r_j > 0, \sum_{j=1}^J r_j = 1 \right\}.$$

Définition. Une partie A de l'espace vectoriel E est *absolument convexe* si elle est non vide et si, pour tous $e, f \in A$ et $c, d \in \mathbb{K}$ tels que $|c| + |d| \leq 1$, on a $ce + df \in A$.

Si E, F sont des espaces vectoriels et si T est un opérateur linéaire de E dans F , on vérifie de suite que

- a) l'image par T de toute partie absolument convexe de E est une partie absolument convexe de F ,
- b) l'image inverse par T de toute partie absolument convexe de F est une partie absolument convexe de E .

Définition. Bien sûr, tout sous-espace vectoriel de E est absolument convexe et toute intersection de parties absolument convexes de E est aussi une partie absolument convexe de E . Cela étant, nous pouvons introduire la notion d'*enveloppe*

absolument convexe d'une partie non vide A de E comme étant l'intersection de toutes les parties absolument convexes de E qui contiennent A ; elle est notée $\Gamma(A)$. On vérifie aisément que

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^J c_j e_j : J \in \mathbb{N}_0; e_1, \dots, e_J \in A; c_1, \dots, c_J \in \mathbb{K}; \sum_{j=1}^J |c_j| \leq 1 \right\}.$$

Exercice. Si $\{A_j : j \in J\}$ est une famille de parties absolument convexes de l'espace vectoriel E , établir que

$$\Gamma(\cup_{j \in J} A_j) = \left\{ \sum_{(j)} c_j e_j : e_j \in A_j; c_j \in \mathbb{K}; \sum_{(j)} |c_j| \leq 1 \right\}. \square$$

Proposition 2.1.5 Si A est une partie absolument convexe de l'espace vectoriel E ,

a) $\text{span}(A) = \cup_{r>0} rA$,

b) $0 < r < s \Rightarrow rA \subset sA$,

c) $p_A : \text{span}(A) \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto \inf \{ r > 0 : e \in rA \}$ est une semi-norme sur $\text{span}(A)$ telle que

$$\{ e \in \text{span}(A) : p_A(e) < 1 \} \subset A \subset \{ e \in \text{span}(A) : p_A(e) \leq 1 \}.$$

Preuve. a) L'inclusion \supset est claire. Inversement, pour toute combinaison linéaire $e = \sum_{j=1}^J c_j e_j$ d'éléments de A , on a bien sûr $e = 0 \in A$ si $\sum_{j=1}^J |c_j| = 0$ et

$$e = \sum_{k=1}^J |c_k| \left(\sum_{j=1}^J \frac{c_j}{\sum_{l=1}^J |c_l|} e_j \right) \in \sum_{k=1}^J |c_k| A$$

sinon.

b) est clair.

c) Bien sûr, p_A est à valeurs dans $[0, +\infty[$. De plus,

i) pour $c = 0$, il vient $p_A(ce) = p_A(0) = 0 = |c| p_A(e)$ pour tout $e \in \text{span}(A)$. Pour tous $c \in \mathbb{K}$ non nul et $e \in \text{span}(A)$, on a $ce \in rA$ si et seulement si $e \in (r/|c|)A$. Au total, on a $p_A(ce) = |c| p_A(e)$ pour tous $c \in \mathbb{K}$ et $e \in \text{span}(A)$.

ii) pour tous $e, f \in \text{span}(A)$ et tous $r > p_A(e)$ et $s > p_A(f)$, on a $e + f \in rA + sA = (r+s)A$ donc $p_A(e+f) \leq r+s$. On en déduit aussitôt que $p_A(e+f) \leq p_A(e) + p_A(f)$. Dès lors p_A est une semi-norme sur $\text{span}(A)$.

Les inclusions sont immédiates. ■

Exercice. Si A est une partie absolument convexe de l'espace vectoriel E , quand a-t-on $b_{p_A}(< 1) = A$? $b_{p_A}(1) = A$? □

Définitions. Une partie A de l'espace vectoriel E

- a) absorbe $B \subset E$ s'il existe $r > 0$ tel que $B \subset cA$ pour tout $c \in \mathbb{K}$ tel que $|c| \geq r$,
 b) est absorbante si elle absorbe tout élément de E .

Exercice. a) Etablir qu'une partie absolument convexe A de l'espace vectoriel E absorbe $B \subset E$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $B \subset cA$.

b) Etablir que $\text{span}(A) = E$ pour toute partie absorbante A de E . \square

Proposition 2.1.6 Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E ,

- a) $b_p(e; r) = e + b_p(r)$ et $b_p(e; < r) = e + b_p(< r)$,
 b) $b_p(r) = rb_p(1)$ et $b_p(< r) = rb_p(< 1)$,
 c) $b_p(r)$ et $b_p(< r)$ sont absolument convexes et absorbants,
 d) si la partie absolument convexe A de E contient $b_p(e; r)$ (resp. $b_p(e; < r)$), alors A contient aussi $b_p(r)$ (resp. $b_p(< r)$).

Preuve. a), b) et c) sont immédiats.

d) Comme A est absolument convexe, il contient également $-b_p(e; r)$ (resp. $-b_p(e; < r)$). Dès lors, pour tout $f \in b_p(r)$ (resp. $f \in b_p(< r)$), il vient

$$e + f, -e + f \in A \text{ donc } f = \frac{1}{2}(e + f) + \frac{1}{2}(-e + f) \in A. \blacksquare$$

La comparaison de semi-normes sur un espace vectoriel est régie par le résultat suivant.

Proposition 2.1.7 Soient p, q des semi-normes sur l'espace vectoriel E . Pour tous $r, s > 0$, les assertions suivantes sont équivalentes:

- (a) $b_p(r) \subset b_q(s)$, c'est-à-dire $p(e) \leq r \Rightarrow q(e) \leq s$,
 (b) $b_p(< r) \subset b_q(< s)$, c'est-à-dire $p(e) < r \Rightarrow q(e) < s$,
 (c) $q(\cdot) \leq \frac{s}{r}p(\cdot)$ sur E .

Preuve. (a) \Rightarrow (c). Si $p(e) = 0$, on a $p(ce) = 0$ pour tout $c \in \mathbb{K}$, donc $q(e) = 0$ et la majoration a lieu. Si $p(e) \neq 0$, il vient

$$p\left(r \frac{e}{p(e)}\right) \leq r \text{ donc } q\left(r \frac{e}{p(e)}\right) \leq s,$$

ce qui suffit.

(c) \Rightarrow (b) est trivial.

(b) \Rightarrow (a). Si $p(e) \leq r$, il vient $p((1 - \varepsilon)e) < r$ donc $q((1 - \varepsilon)e) < s$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, ce qui suffit. \blacksquare

Proposition 2.1.8 Soit E un espace normé.

Si L est un sous-espace vectoriel de E ,

- a) $L^\circ = E$ si $L = E$; $L^\circ = \emptyset$ si $L \neq E$,
- b) L^- est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Si A est une partie convexe (resp. absolument convexe) de E ,

- a) A° est une partie convexe (resp. absolument convexe) de E ,
- b) A^- est une partie convexe (resp. absolument convexe) de E . ■

Définitions. Si A est une partie non vide de l'espace normé E , il est donc licite d'introduire les notions suivantes:

- a) *l'enveloppe linéaire fermée de A* est l'intersection des sous-espaces linéaires fermés de E contenant A ; on a tôt fait de vérifier qu'il s'agit de l'adhérence de $\text{span}(A)$, notée $\overline{\text{span}}(A)$,
- b) *l'enveloppe convexe fermée de A* est l'intersection des parties convexes et fermées de E contenant A ; on a tôt fait de vérifier qu'il s'agit de l'adhérence de $\text{co}(A)$, notée $\overline{\text{co}}(A)$,
- c) *l'enveloppe absolument convexe fermée de A* est l'intersection des parties absolument convexes et fermées de E contenant A ; on a tôt fait de vérifier qu'il s'agit de l'adhérence de $\Gamma(A)$, notée $\overline{\Gamma}(A)$.

Exercice. Etablir que l'adhérence du sous-espace linéaire ϕ de ℓ^∞ est égale à l'ensemble c_0 . □

Exercice. Etablir que l'adhérence du sous-espace vectoriel $D_0(\mathbb{R})$ de l'espace normé $(\text{FB}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$ est égale à l'ensemble $C_{0,0}(\mathbb{R})$. □

2.2 Espaces de Banach

Rappel. Soit E un espace normé.

Une suite e_m de E converge dans E vers e_0 si e_0 appartient à E et si $\|e_m - e_0\| \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$; on dit que e_0 est *limite* de la suite e_m . Une telle limite est unique et on a $\|e_m\| \rightarrow \|e_0\|$.

Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Toute combinaison linéaire de suites convergentes dans E converge dans E vers la combinaison linéaire correspondante des limites.

Une partie de E est fermée si et seulement si elle contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Une suite e_m de E est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tous entiers $r, s \geq M$, on a $\|e_r - e_s\| \leq \varepsilon$.

Toute suite convergente est de Cauchy.

Si une suite de Cauchy contient une sous-suite convergente, alors elle converge.

Une partie A de E est *séquentiellement complète* — en abrégé *sq-complète* — si toute suite de A qui est de Cauchy dans E converge dans E vers un élément de A .

Un *espace de Banach* est un espace normé séquentiellement complet.

Exemples. Nous savons déjà que les espaces normés

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, C_0(K), L^1(A), L^2(A), L^\infty(A)$$

sont séquentiellement complets donc sont des espaces de Banach. \square

Exercices. Etablir que les espaces normés c_0, c, ℓ^1, ℓ^p pour $p \in]1, +\infty[$ et ℓ^∞ sont séquentiellement complets donc sont des espaces de Banach.

Suggestion. Pour c_0 et c , c'est direct. Pour ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ , les démonstrations relatives aux espaces L^1, L^2 et L^∞ peuvent s'adapter tout en se simplifiant considérablement. \square

Définition. Une série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ de l'espace normé E est *absolument convergente* si la série numérique réelle à termes positifs $\sum_{m=1}^{\infty} \|e_m\|$ converge.

Théorème 2.2.1 *Un espace normé est de Banach si et seulement si toutes ses séries absolument convergentes convergent.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, si $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ est une série absolument convergente de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$, elle est de Cauchy car, pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ tels que $r < s$, on a

$$\left\| \sum_{m=1}^r e_m - \sum_{m=1}^s e_m \right\| = \left\| \sum_{m=r+1}^s e_m \right\| \leq \sum_{m=r+1}^s \|e_m\|$$

alors que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \|e_m\|$ converge donc est de Cauchy.

La condition est suffisante. Soit e_m une suite de Cauchy d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ où toute série absolument convergente converge. Pour conclure, il suffit de prouver que cette suite contient une sous-suite convergente. Or de cette suite e_m , nous pouvons extraire une sous-suite $e_{k(m)}$ telle que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p < q$, nous ayons $\|e_{k(p)} - e_{k(q)}\| \leq 2^{-p}$. Cela étant, posons $f_1 = e_{k(1)}$ puis $f_m = e_{k(m)} - e_{k(m-1)}$ pour tout entier $m \geq 2$. D'une part, on vérifie trivialement que la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ est absolument convergente donc converge. D'autre part, pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, on a évidemment $\sum_{m=1}^r f_m = e_{k(r)}$. D'où la conclusion. \blacksquare

2.3 Opérateurs linéaires continus

Théorème 2.3.1 *Si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces linéaires normés et si T est un opérateur linéaire de E dans F , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) T est continu,
- (b) T est continu en 0,
- (c) il existe $C > 0$ tel que $\|T\cdot\|_F \leq C \|\cdot\|_E$.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) est trivial.

(b) \Rightarrow (c). Pour tout voisinage V de $T0 = 0$, il existe un voisinage U de 0 tel que $TU \subset V$. Pour $V = b(1)$, il existe donc $r > 0$ tel que $Tb(r) \subset b(1)$. On a alors

$$\|e\|_E \leq r \Rightarrow \|Te\|_F \leq 1 \text{ donc } \|Te\|_F \leq \frac{1}{r} \|e\|_E, \quad \forall e \in E,$$

ce qui suffit.

(c) \Rightarrow (a). De fait, pour tout $e_0 \in E$ et tout $r > 0$, l'image par T de $b(e_0; r/C)$ est incluse dans $b(Te_0; r)$ vu que

$$\|e - e_0\|_E \leq \frac{r}{C} \Rightarrow \|Te - Te_0\|_F = \|T(e - e_0)\|_F \leq C \|e - e_0\|_E \leq r. \blacksquare$$

Définition. Si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces normés et si T est un opérateur linéaire continu de E dans F , on a bien sûr

$$\sup_{e \neq 0} \frac{\|Te\|_F}{\|e\|_E} = \sup_{0 < \|e\|_E \leq 1} \|Te\|_F = \sup_{\|e\|_E=1} \|Te\|_F$$

et ce nombre, noté $\|T\|$, est la borne inférieure de l'ensemble des nombres $C > 0$ tels que $\|T\cdot\|_F \leq C \|\cdot\|_E$. Ce nombre $\|T\|$ est appelé *la norme de T* ; il est tel que

$$\|Te\|_F \leq \|T\| \|e\|_E, \quad \forall e \in E,$$

et cette majoration ne peut être améliorée.

Notation. Si E et F sont des espaces normés, $L(E, F)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F .

Bien sûr, on écrit plus simplement $L(E)$ à la place de $L(E, E)$.

Théorème 2.3.2 *Si E, F sont des espaces normés, alors $(L(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace normé.*

Si, en outre, F est un espace de Banach, alors $L(E, F)$ est aussi un espace de Banach.

Preuve. Si $T, R \in L(E, F)$ et $c \in \mathbb{K}$, on vérifie de suite que:

- a) cT est un opérateur linéaire de E dans F tel que $\|cT\|$ existe et est égal à $|c| \|T\|$,
- b) $T + R$ est un opérateur linéaire de E dans F tel que $\|T + R\|$ existe et est majoré par $\|T\| + \|R\|$,
- c) $\|T\| = 0$ implique $T = 0$.

Il en résulte que $L(E, F)$ est un espace linéaire sur lequel $\|\cdot\|$ est une norme.

Si F est un espace de Banach, établissons que $L(E, F)$ est un espace de Banach. Soit T_m une suite de Cauchy dans $L(E, F)$. Pour tout $e \in E$, la suite $T_m e$ est alors de Cauchy dans F car on a

$$\|T_r e - T_s e\| = \|(T_r - T_s)e\| \leq \|T_r - T_s\| \|e\| ;$$

désignons par Te sa limite. De la sorte, nous avons introduit une application $T: E \rightarrow F$ dont on a tôt fait de vérifier qu'elle est linéaire. Elle est aussi continue: il existe $C > 0$ tel que $\|T_m\| \leq C$ pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ donc tel que

$$\|Te\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m e\| \leq \lim_m \|T_m\| \|e\| \leq C \|e\|, \quad \forall e \in E,$$

ce qui suffit. ■

Théorème 2.3.3 Soient E, F, G des espaces normés.

Si $T \in L(E, F)$ et $R \in L(F, G)$, alors RT appartient à $L(E, G)$ et on a $\|RT\| \leq \|R\| \|T\|$.

De plus, si la suite T_m converge vers T dans $L(E, F)$ et si la suite R_m converge vers R dans $L(F, G)$, alors la suite $R_m T_m$ converge vers RT dans $L(E, G)$.

En particulier, $L(E)$ est une algèbre normée et même de Banach si E est de Banach.

Preuve. Bien sûr, RT est un opérateur linéaire continu, comme composition de deux tels opérateurs. De plus, pour tout $e \in E$, on a successivement

$$\|RTe\| \leq \|R\| \|Te\| \leq \|R\| \|T\| \|e\|$$

donc $\|RT\| \leq \|R\| \|T\|$.

Cela étant, la deuxième assertion résulte aussitôt de ce que

$$\begin{aligned} \|R_m T_m - RT\| &= \|(R_m - R)T_m - R(T - T_m)\| \\ &\leq \|R_m - R\| \|T_m\| + \|R\| \|T - T_m\|. \blacksquare \end{aligned}$$

Définitions. Si E et F sont des espaces normés, la convergence dans $L(E, F)$ est souvent appelée *convergence forte* ou *convergence en norme*, par opposition à la notion suivante.

La suite T_m de $L(E, F)$ converge *ponctuellement* ou *converge simplement* vers $T \in L(E, F)$ si on a $T_m e \rightarrow Te$ pour tout $e \in E$. Il s'agit d'une notion de convergence plus faible qui jouit cependant d'un certain nombre de propriétés intéressantes.

Exercice. Si E, F, G sont des espaces normés, si les suites T_m, R_m convergent ponctuellement vers T, R dans $L(E, F)$, si la suite S_m converge ponctuellement vers S dans $L(F, G)$ et si la suite c_m converge vers c dans \mathbb{K} , établir que:

- a) la suite $c_m T_m$ converge ponctuellement vers cT dans $L(E, F)$,
 b) la suite $T_m + R_m$ converge ponctuellement vers $T + R$ dans $L(E, F)$.

Cependant la suite $\|T_m\|$ peut ne pas converger vers $\|T\|$: de fait, si on introduit

$$T_m: c_0 \rightarrow c_0 \quad \alpha \mapsto \underbrace{(0, \dots, a_m)}_m, a_{m+1}, \dots,$$

on a tôt fait de vérifier que T_m est un opérateur linéaire continu de c_0 dans lui-même, de norme 1, et que la suite T_m converge ponctuellement vers 0. \square

Théorème 2.3.4 *Si E et F sont des espaces normés, un opérateur surjectif $T \in L(E, F)$ admet un inverse continu si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $\|e\| \leq C \|Te\|$ pour tout $e \in E$.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire vu que

$$\|e\| = \|T^{-1}Te\| \leq \|T^{-1}\| \|Te\|, \quad \forall e \in E.$$

La condition est suffisante. Il est clair que T est injectif; c'est donc une bijection linéaire entre E et F et tout revient à établir que son inverse est continu. Or on a

$$\|T^{-1}f\| \leq C \|TT^{-1}f\| = C \|f\|, \quad \forall f \in F,$$

ce qui suffit. \blacksquare

Définition. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont *équivalentes* si les espaces $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ ont la même topologie, c'est-à-dire s'ils ont les mêmes ouverts.

Cela a donc lieu si et seulement si les opérateurs

$$\text{id}: (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2) \quad \text{et} \quad \text{id}: (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$$

sont continus, $* \rightarrow$ c'est-à-dire si et seulement si id est un isomorphisme entre $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2) \leftarrow *$.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 2.3.5 *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1$. \blacksquare*

2.4 Résolution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$, méthode de Neumann

Théorème 2.4.1 *Soit E un espace de Banach.*

Si $T \in L(E)$ vérifie $\|T\| < 1$, alors $\text{id} - T \in L(E)$ admet un inverse linéaire continu tel que

$$\|(\text{id} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

En fait, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} T^m = (\text{id} - T)^{-1}$$

et les majorations

$$\left\| (\text{id} - T)^{-1} - \sum_{m=0}^M T^m \right\| \leq \frac{\|T\|^{M+1}}{1 - \|T\|}, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0.$$

La série $\sum_{m=0}^{\infty} T^m$ est appelée *série de Neumann de T* .

Preuve. Comme on a $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la série de Neumann de T est absolument convergente dans l'espace de Banach $L(E)$ donc converge dans cet espace. Notons S sa limite. Comme nous avons

$$\left\| \sum_{m=0}^M T^m \right\| \leq \sum_{m=0}^M \|T\|^m \leq \frac{1}{1 - \|T\|}, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0,$$

il vient $\|S\| \leq 1/(1 - \|T\|)$. De plus, pour tout $e \in E$, il vient successivement

$$\begin{aligned} S(\text{id} - T)e &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M T^m(\text{id} - T)e \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} (e - T^{M+1}e) = e \end{aligned}$$

et, de manière analogue, $(\text{id} - T)Se = e$. Pour conclure, il suffit alors de noter que

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} T^m - \sum_{m=0}^M T^m \right\| = \left\| \sum_{m=M+1}^{\infty} T^m \right\| \leq \frac{\|T\|^{M+1}}{1 - \|T\|}. \blacksquare$$

Rappel. Dans une algèbre normée $(A, \|\cdot\|)$, pour tout $a \in A$, la suite $\|a^m\|^{1/m}$ converge vers $\inf\{\|a^k\|^{1/k} : k \in \mathbb{N}_0\}$. (cf. Analyse mathématique, cours de 1CSM&P, § Exemples d'étude de la convergence d'une suite.)

**2.4. Résolution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$,
méthode de Neumann**

41

Remarque. Soit E un espace de Banach. Si $T \in L(E)$ est tel que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} < 1$, alors la série de Neumann de T converge dans l'espace de Banach $L(E)$ car elle est absolument convergente. Cette remarque conduit au résultat suivant. \square

Théorème 2.4.2 *Soit E un espace de Banach.*

Si $T \in L(E)$ est tel que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} < 1$, alors $\text{id} - T \in L(E)$ admet un inverse linéaire continu donné par la série de Neumann de T . \blacksquare

Application. Soit K un opérateur de Volterra: on a donc un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , une fonction k continue sur $[a, b] \times [a, b]$ telle que $k(x, y) = 0$ si $y > x$ et K est défini par $(Kf)(x) = \int_a^x k(x, y)f(y) dy$ pour tout $x \in [a, b]$. Cela étant, on vérifie de suite que, pour tout entier $m \geq 2$, on a

$$(K^m f)(x) = \int_a^x k_m(x, y)f(y) dy, \quad \forall f \in C_0([a, b]),$$

les $k_m \in C_0([a, b] \times [a, b])$ étant définis par la récurrence $k_1 = k$ et, pour tout entier $m \geq 2$,

$$k_m(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < y \leq b \\ \int_y^x k(x, t)k_{m-1}(t, y) dt & \text{si } a \leq y \leq x \leq b \end{cases}$$

On en déduit aisément que

$$|k_m(x, y)| \leq \|k\|_{[a, b] \times [a, b]}^m \cdot \frac{|x - y|^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \forall m \geq 2, \forall x, y \in [a, b].$$

De là, on tire de suite que

$$\|K^m\| \leq \|k\|_{[a, b] \times [a, b]}^m \cdot \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad \forall m \geq 2,$$

donc que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|K^m\|^{1/m} = 0$. Au total, nous venons d'établir le résultat suivant.

Théorème 2.4.3 *Si K est un opérateur de Volterra, l'opérateur $\text{id} - K$ admet un inverse linéaire continu donné par la série de Neumann de K . \blacksquare*

Voici une autre conséquence fort importante du premier théorème de ce paragraphe.

Théorème 2.4.4 *Soit E un espace de Banach.*

L'ensemble \mathcal{G} des éléments de $L(E)$ qui admettent un inverse continu est un ouvert de $L(E)$ et un groupe pour la composition.

De plus, si la suite T_m de \mathcal{G} converge vers $T \in \mathcal{G}$ dans $L(E)$, alors la suite T_m^{-1} converge vers T^{-1} dans $L(E)$.

Preuve. Il est clair que \mathcal{G} est un groupe pour la composition.

Etablissons à présent que \mathcal{G} est un ouvert de $L(E)$. Soit T_0 un élément de \mathcal{G} ; nous avons bien sûr $\|T_0^{-1}\| > 0$. Cela étant, on a $T_0 + b(< 1/\|T_0^{-1}\|) \subset \mathcal{G}$ car, si $T \in L(E)$ vérifie $\|T - T_0\| < 1/\|T_0^{-1}\|$, de

$$T = T_0 - (T_0 - T) = T_0(\text{id} - T_0^{-1}(T_0 - T))$$

avec $T_0^{-1}(T_0 - T) \in L(E)$ et $\|T_0^{-1}(T_0 - T)\| < 1$, on déduit aussitôt que T admet un inverse continu.

Enfin soit T_m une suite de \mathcal{G} qui converge dans $L(E)$ vers $T_0 \in \mathcal{G}$. Pour m suffisamment grand, on a donc $\|T_m - T_0\| < 1/\|T_0^{-1}\|$ et par conséquent

$$\begin{aligned} T_m^{-1} &= (\text{id} - T_0^{-1}(T_0 - T_m))^{-1}T_0^{-1} \\ &= T_0^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (T_0^{-1}(T_0 - T_m))^k T_0^{-1} \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\|T_m^{-1} - T_0^{-1}\| \leq \frac{\|T_0 - T_m\|}{1 - \|T_0^{-1}\| \|T_0 - T_m\|} \|T_0^{-1}\|^2,$$

ce qui suffit. ■

Voici une application de ce dernier résultat, qui sera largement complétée par la suite.

Application. Considérons une équation de Fredholm de seconde espèce: on a un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , une fonction k continue sur $[a, b] \times [a, b]$ et une fonction continue f sur $[a, b]$. Tout revient à trouver $g \in C_0([a, b])$ tel que $g - Kg = f$ pour

$$K: C_0([a, b]) \rightarrow C_0([a, b]) \quad (Kh)(\cdot) = \int_a^b k(\cdot, y)h(y) dy.$$

Si $\text{id} - K$ admet un inverse linéaire continu, on peut effectuer le raisonnement suivant. Vu le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite p_m de polynômes sur \mathbb{R}^2 , qui converge uniformément sur $[a, b] \times [a, b]$ vers k . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, introduisons

$$P_m: C_0([a, b]) \rightarrow C_0([a, b]) \quad (P_m h)(\cdot) = \int_a^b p_m(\cdot, y)h(y) dy;$$

c'est un opérateur linéaire continu de $C_0([a, b])$ dans lui-même et on a tôt fait de vérifier que

$$\begin{aligned} \|(\text{id} - P_m) - (\text{id} - K)\| &= \|P_m - K\| \\ &\leq (b - a) \|p_m - k\|_{[a, b] \times [a, b]}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour m suffisamment grand, $\text{id} - P_m$ admet un inverse linéaire continu et que la suite $(\text{id} - P_m)^{-1}$ converge vers $(\text{id} - K)^{-1}$ dans $L(E)$. On a donc en particulier

$$g_m = (\text{id} - P_m)^{-1}f \rightarrow (\text{id} - K)^{-1}f = g.$$

Qu'a-t-on gagné?

Si on sait résoudre aisément les équations de la forme $(\text{id} - P_m)g_m = f$, on obtient aisément des approximations de g .

Est-ce possible?

Oui car P_m est un opérateur très particulier.

Si p est un polynôme sur \mathbb{R}^2 , on peut évidemment l'écrire sous la forme $p(x, y) = \sum_{j=1}^J q_j(x)r_j(y)$ avec $q_1, \dots, q_J, r_1, \dots, r_J \in C_0([a, b])$ et $J \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $h \in C_0([a, b])$, il vient

$$(Ph)(x) = \sum_{j=1}^J \int_a^b r_j(y)h(y) dy \cdot q_j(x);$$

c'est-à-dire que P est un opérateur linéaire de rang fini de $C_0([a, b])$ dans lui-même.

Quand $\text{id} - K$ admet-il un inverse linéaire continu?

Nous allons étudier cette question en détail au chapitre 5. Cependant notons déjà que nous savons que la réponse est positive si $\|K\| < 1$ ou mieux si $\lim_{m \rightarrow \infty} \|K^m\|^{1/m} < 1$. Or il est clair que $\|K\| \leq (b - a) \|k\|_{[a,b] \times [a,b]}$.

2.5 Opérateurs (relativement) ouverts

Définitions. Soient E, F deux espaces normés.

Un opérateur linéaire T de E dans F est

- a) *relativement ouvert* si l'image par T de tout ouvert de E est ouverte dans $\text{im}(T)$,
- b) *ouvert* si l'image par T de tout ouvert de E est ouverte dans F , c'est-à-dire si et seulement si T est relativement ouvert et surjectif.

Théorème 2.5.1 *Si E et F sont des espaces normés et si T est un opérateur linéaire de E dans F , alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) T est relativement ouvert,
- (b) il existe $\eta > 0$ tel que $b_F(< \eta) \cap \text{im}(T) \subset Tb_E(< 1)$,
- (c) il existe $C > 0$ tel que

$$\inf_{h \in \ker(T)} \|e + h\| \leq C \|Te\|, \quad \forall e \in E.$$

Preuve. (a) \Rightarrow (b) est trivial.

(b) \Rightarrow (c). Pour tout $e_1 \in E$ tel que $\|Te_1\| < \eta$, il existe alors $e_2 \in b_E(< 1)$ tel que $Te_1 = Te_2$. Comme $e_1 - e_2$ appartient à $\ker(T)$, il vient

$$\|Te_1\| < \eta \Rightarrow \inf_{h \in \ker(T)} \|e_1 + h\| \leq \|e_1 + (e_2 - e_1)\| < 1$$

et cette implication entre semi-normes sur E indique que $C = 1/\eta$ convient.

(c) \Rightarrow (a). Pour tout élément e_0 d'un ouvert Ω de E , il existe $r > 0$ tel que $b_E(e_0; r) \subset \Omega$. Dans ces conditions, (c) implique que

$$b_F(Te_0; < r/C) \cap \text{im}(T) \subset Tb_E(e_0; r) \subset T\Omega. \blacksquare$$

Corollaire 2.5.2 *Tout projecteur linéaire d'un espace normé est relativement ouvert.*

Preuve. De fait, si P est un projecteur linéaire de l'espace normé E , il vient

$$\inf_{h \in \ker(P)} \|e + h\| \leq \|Pe\|, \quad \forall e \in E,$$

car $-e + Pe$ appartient à $\ker(P)$. \blacksquare

Proposition 2.5.3 *Soient E, F des espaces normés et soient des opérateurs $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $ST \in \mathcal{L}(E)$.*

- a) *Si S est relativement ouvert et injectif, alors T est continu.*
- b) *Si T est relativement ouvert et surjectif, alors S est continu.*

Preuve. a) De fait, pour tout ouvert Ω de F ,

$$T^{-1}\Omega = T^{-1}S^{-1}S\Omega = (ST)^{-1}S\Omega$$

est un ouvert de E .

b) De fait, pour tout ouvert Ω de E ,

$$S^{-1}\Omega = TT^{-1}S^{-1}\Omega = T(ST)^{-1}\Omega$$

est un ouvert de F . \blacksquare

Proposition 2.5.4 *Soient E, F des espaces normés et soient des opérateurs $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que ST soit relativement ouvert.*

- a) *Si T est continu et surjectif, alors S est relativement ouvert.*
- b) *Si S est continu et injectif, alors T est relativement ouvert.*

Preuve. a) De fait, pour tout ouvert Ω de F , $S\Omega = STT^{-1}\Omega$ est un ouvert dans $\text{im}(ST) = \text{im}(S)$.

b) De fait, pour tout ouvert Ω de E , $T\Omega = S^{-1}ST\Omega$ est un ouvert de $\text{im}(T)$ car $ST\Omega$ étant ouvert dans $\text{im}(ST)$, il existe un ouvert Ω_1 de E tel que $ST\Omega = \Omega_1 \cap \text{im}(ST)$ donc tel que

$$S^{-1}ST\Omega = (S^{-1}\Omega_1) \cap (S^{-1}\text{im}(ST)) = (S^{-1}\Omega_1) \cap \text{im}(T). \blacksquare$$

Définitions. Soient E, F des espaces normés.

a) Un *homomorphisme* entre E et F est un opérateur linéaire continu et relativement ouvert de E dans F .

b) Un *isomorphisme* entre E et F est une bijection linéaire continue et ouverte; c'est donc une bijection linéaire continue et admettant un inverse continu.

c) Une *isométrie* entre E et F est une bijection linéaire de E dans F qui conserve la norme (c'est-à-dire que $\|T\cdot\| = \|\cdot\|$).

d) Les espaces E et F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre E et F . Ils sont *isométriquement isomorphes* s'il existe une isométrie entre E et F .

2.6 Espaces normés de dimension finie

Proposition 2.6.1 *Pour tout espace normé E et tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E) = \text{L}(\mathbb{K}^n, E)$.*

Preuve. De fait, si T est un opérateur linéaire de \mathbb{K}^n dans E , alors, pour tout $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\|Tc\| = \left\| \sum_{j=1}^n c_j T\epsilon_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |c_j| \cdot \|T\epsilon_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|T\epsilon_j\|^2 \right)^{1/2} \cdot |c|. \blacksquare$$

Lemme 2.6.2 *Si $\{e_1, \dots, e_J\}$ est une base de l'espace normé de dimension finie E , alors*

$$T: \mathbb{K}^J \rightarrow E \quad (c_1, \dots, c_J) \mapsto \sum_{j=1}^J c_j e_j$$

est un isomorphisme.

Preuve. Nous savons bien que T est une bijection linéaire. Sa continuité résulte aussitôt de la proposition précédente.

Établissons que son inverse est continu. Comme $S = \{c \in \mathbb{K}^J: |c| = 1\}$ est une partie compacte de \mathbb{K}^J , nous savons que TS est un compact de E . Comme TS ne

contient pas 0, il existe $r > 0$ tel que $b(r) \cap TS = \emptyset$ donc tel que $\inf \{ \|Tc\| : c \in S \} \geq r$. Il s'ensuit que $|\cdot| \leq \frac{1}{r} \|T\cdot\|$ sur \mathbb{K}^J car, pour $c = 0$, c'est trivial et, pour $c \neq 0$, on a

$$\left| \frac{c}{|c|} \right| = 1 \text{ donc } \left\| T \frac{c}{|c|} \right\| \geq r \text{ donc } \|Tc\| \geq r |c|. \blacksquare$$

Théorème 2.6.3 a) *Deux espaces normés ayant même dimension finie sont isomorphes.*

b) *Tout espace normé de dimension finie est de Banach.*

Dès lors, tout sous-espace linéaire de dimension finie d'un espace normé E est un fermé de E .

Preuve. a) est une conséquence directe du lemme précédent.

b) a lieu vu a) et le fait que \mathbb{K}^n est un espace de Banach quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$. \blacksquare

Remarque. Dans la preuve du théorème suivant, nous allons recourir au *théorème des points antipodaux de Borsuk* (cf. Theorem 4.4.2 de [11]). Il s'énonce comme suit: *quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, il n'existe pas d'application continue u de $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ telle que $u(-\cdot) = -u(\cdot)$.* On en déduit aussitôt que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et toute application continue v de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}^n telle que $v(-\cdot) = -v(\cdot)$, il existe $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $v(x) = 0$. De fait, si ce n'est pas le cas, l'application $u(\cdot) = v(\cdot)/|v(\cdot)|$ donne lieu à une contradiction. \square

Théorème 2.6.4 (Gohberg-Krein) *Si L et F sont des sous-espaces linéaires de dimension finie n et $n + 1$ respectivement de l'espace normé E , il existe $f \in F$ tel que $\|f\| = d(f, L) = 1$.*

Preuve. a) *Cas où la norme $\|\cdot\|$ de E est strictement convexe sur $G = L + F$, c'est-à-dire telle que*

$$(g_1, g_2 \in G, \|g_1\| = \|g_2\| = 1, r \in]0, 1[) \implies \|rg_1 + (1-r)g_2\| < 1.$$

Pour tout $f \in F$, on a bien sûr

$$d(f, L) = \inf \{ \|f - l\| : l \in L, \|l\| \leq 2\|f\| \}.$$

Comme $\{l \in L : \|l\| \leq 2\|f\|\}$ est un compact de L , il existe $l_0 \in L$ tel que $d(f, L) = \|f - l_0\|$ et, comme $\|\cdot\|$ est strictement convexe sur G , cet élément l_0 est unique; notons-le Pf .

Prouvons que l'application $P: F \rightarrow L$ ainsi définie est continue. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite convergente $f_m \rightarrow f_0$ dans F telle que $Pf_m \not\rightarrow Pf_0$. La suite f_m étant bornée, il en est de même pour la suite Pf_m . Dès lors, quitte à recourir à

une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite Pf_m converge dans L ; soit l_0 sa limite. Nous avons alors

$$\|f_m - Pf_0\| \rightarrow \|f_0 - Pf_0\| \quad \text{et} \quad \|f_m - Pf_m\| \rightarrow \|f_0 - l_0\| > \|f_0 - Pf_0\|,$$

ce qui entraîne $\|f_m - Pf_0\| < \|f_m - Pf_m\|$ pour m suffisamment grand, ce qui est contradictoire.

Prouvons que l'application P est antipodale. De fait, pour tout $f_0 \in F$, on a successivement

$$\begin{aligned} \|(-f_0) - (-Pf_0)\| &= \|f_0 - Pf_0\| = \inf \{ \|f_0 - l\| : l \in L \} \\ &= \inf \{ \|-f_0 - l\| : l \in L \} = d(-f_0, L). \end{aligned}$$

Dès lors, $* \rightarrow$ le théorème de Borsuk $\leftarrow *$ assure l'existence de $f \in F$ tel que $\|f\| = 1$ et $Pf = 0$, c'est-à-dire tel que $\|f\| = 1 = d(f, L)$.

b) *Cas général.* Soit $\|\cdot\|_2$ une norme hilbertienne sur G puis, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, posons $p_k(\cdot) = \|\cdot\| + \frac{1}{k} \|\cdot\|_2$ sur G . Il s'agit d'une norme strictement convexe sur G car

$$g_1, g_2 \in G, \|g_1\| = \|g_2\| = 1, r \in]0, 1[$$

implique

$$\begin{aligned} \|rg_1 + (1-r)g_2\| + \frac{1}{k} \|rg_1 + (1-r)g_2\|_2 \\ < r(\|g_1\| + \frac{1}{k} \|g_1\|_2) + (1-r)(\|g_2\| + \frac{1}{k} \|g_2\|_2). \end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe $f_k \in F$ tel que $p_k(f_k) = d_k(f_k, L) = 1$. Comme $\|\cdot\|_2$ est équivalent à $\|\cdot\|$ sur G , il existe $0 < r < s$ pour lesquels $r \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq s \|\cdot\|$ donc tels que

$$(1 + \frac{r}{k}) \|\cdot\| \leq p_k(\cdot) \leq (1 + \frac{s}{k}) \|\cdot\|.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite f_k , nous pouvons supposer avoir $f_k \rightarrow f_0$ dans F avec $\|f_0\| = 1$ vu les dernières inégalités établies et

$$\begin{aligned} 1 &\geq d(f_0, L) = \inf \{ \|f_0 - l\| : l \in L \} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf \{ \|f_k - l\| : l \in L \} \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{1}{1 + s/k} p_k(f_k - l) : l \in L \right\} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + s/k} = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Le résultat suivant est assez analogue. Il est moins précis mais s'adresse à des sous-espaces vectoriels plus généraux.

Il joue un rôle essentiel dans la théorie spectrale des opérateurs linéaires compacts.

Lemme 2.6.5 (Riesz) *Si L est un sous-espace vectoriel fermé et propre de l'espace normé E , alors, pour tout $r \in]0, 1[$, il existe $e_r \in E$ tel que $\|e_r\| = 1$ et $d(e_r, L) \geq r$.*

Preuve. Soit e_0 un élément de $E \setminus L$. Comme L est fermé, $d = d(e_0, L)$ est un nombre strictement positif. De $r \in]0, 1[$, on tire l'existence de $l_r \in L$ tel que $\|e_0 - l_r\| \leq d/r$. Posons $e_r = (e_0 - l_r) / \|e_0 - l_r\|$. Bien sûr, on a $\|e_r\| = 1$. De plus, pour tout $l \in L$, on a $\|e_0 - l_r\| l + l_r \in L$ donc

$$\begin{aligned} \|e_r - l\| &= \left\| \frac{e_0}{\|e_0 - l_r\|} - \frac{l_r}{\|e_0 - l_r\|} - l \right\| \\ &= \frac{1}{\|e_0 - l_r\|} \|e_0 - (l_r + \|e_0 - l_r\| \cdot l)\| \geq \frac{d}{\|e_0 - l_r\|} \geq r. \blacksquare \end{aligned}$$

2.7 Produit fini, somme directe

Définition. Soient E, F des espaces normés. Il est clair que

$$\|\cdot\| : E \times F \rightarrow \mathbb{R} \quad (e, f) \mapsto \|e\| + \|f\|$$

est une norme. Le *produit* (sous-entendu *topologique*) des espaces E et F est l'espace normé $(E \times F, \|\cdot\|)$, noté le plus souvent $E \times F$ si aucune confusion sur $\|\cdot\|$ n'est possible.

Théorème 2.7.1 *Si E et F sont des espaces normés,*

- $E \times F$ est un espace normé; il est de Banach si et seulement si E et F le sont,
- les opérateurs canoniques $s_E : E \times F \rightarrow E$ et $s_F : E \times F \rightarrow F$ sont des surjections linéaires continues et ouvertes,
- si G est un espace normé, un opérateur $T \in \mathcal{L}(G, E \times F)$ est continu si et seulement si les opérateurs $s_E T$ et $s_F T$ sont continus. \blacksquare

Définition. Si L et M sont des sous-espaces linéaires complémentaires de l'espace normé E , il est clair que

$$\|\cdot\|\cdot\| : L \oplus M \rightarrow \mathbb{R} \quad (l, m) \mapsto \|l\| + \|m\|$$

est une norme sur $L \oplus M = E$ telle que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|\cdot\|$ sur E . Dès lors,

$$\text{id} : (E, \|\cdot\|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$$

est une bijection linéaire continue mais n'est pas nécessairement un isomorphisme, comme nous allons le voir. S'il s'agit d'un isomorphisme, on dit que E est *somme directe topologique* de L et M .

Théorème 2.7.2 *Si L et M sont des sous-espaces linéaires complémentaires de l'espace normé E , alors E est somme directe topologique de L et M si et seulement si le projecteur linéaire canonique P de E d'image égale à L et de noyau égal à M est continu.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\| \leq C \|\cdot\|$ sur E donc tel que

$$\|Pe\| \leq \|Pe\| + \|(\text{id} - P)e\| = \|e\| \leq C \|e\|, \quad \forall e \in E.$$

La condition est suffisante. De fait, les opérateurs linéaires P et $\text{id} - P$ sont continus: il existe donc $C > 0$ tel que

$$\|e\| = \|Pe\| + \|(\text{id} - P)e\| \leq C \|e\|, \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

Proposition 2.7.3 *Si P est un projecteur linéaire continu de l'espace normé E , alors E est somme directe topologique de $\ker(P)$ et $\text{im}(P)$.* \blacksquare

Définition. Soient L et M deux sous-espaces linéaires de l'espace normé E . On dit que M est un *complément topologique de L dans E* si E est somme directe topologique de L et M , auquel cas L est aussi un complément topologique de M dans E . Cela a donc lieu si et seulement s'il existe un projecteur linéaire continu de E , d'image égale à L et de noyau égal à M . Il s'ensuit que L et M sont nécessairement des sous-espaces linéaires fermés de E .

* \rightarrow Il existe cependant des sous-espaces linéaires fermés d'un espace normé qui n'ont pas de complément topologique.

Ainsi c_0 n'a pas de complément topologique dans ℓ^∞ .

Pour établir cette propriété, on démontre d'abord qu'à tout élément x de $I = \{x \in]0, 1[: x \text{ irrationnel}\}$, on peut associer un élément $\alpha(x)$ de $\ell^\infty \setminus c_0$ dont toutes les composantes appartiennent à $\{0, 1\}$ et tel que, si $x, y \in I$ sont distincts, alors $\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha(x)_j = \alpha(y)_j = 1\}$ est fini. De fait, on vérifie directement que, si $r(m)$ est une numérotation de l'ensemble des nombres rationnels appartenant à $]0, 1[$, on peut poser

$$\alpha(x)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{r(0, x_1 \dots x_m) : m \in \mathbb{N}_0\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela étant, on procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un projecteur linéaire continu $P: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ d'image égale à c_0 . Nous allons en déduire l'existence de $x \in I$ tel que $\alpha(x) - P\alpha(x) = 0$, ce qui est absurde car cela signifie que $\alpha(x)$ est un élément de $\text{im}(P) = c_0$. Comme I est non dénombrable, il suffit pour cela d'établir que, pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble

$$\left\{ x \in I : [\alpha(x) - P\alpha(x)]_j \geq \frac{1}{k} \right\}$$

est dénombrable. Fixons $j, k \in \mathbb{N}_0$. Il est clair que

$$\tau: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{K} \quad \alpha \mapsto [\alpha - P\alpha]_j$$

est une fonctionnelle linéaire continue: il existe donc $C > 0$ tel que $|\langle \cdot, \tau \rangle| \leq C \|\cdot\|$ sur ℓ^∞ . Cela étant, soient $L \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, \dots, x_L \in I$ tels que $|\langle \alpha(x_l), \tau \rangle| \geq 1/k$ pour tout $l = 1, \dots, L$. Pour tout $l = 1, \dots, L$, il existe alors $\alpha^{(l)} \in c_0$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, les nombres $[\alpha(x_1) - \alpha^{(1)}]_m, \dots, [\alpha(x_L) - \alpha^{(L)}]_m$ soient tous nuls sauf un au plus, égal à 1. Comme on a $\alpha^{(l)} - P\alpha^{(l)} = 0$ pour tout $l = 1, \dots, L$, il vient alors successivement

$$\begin{aligned} \frac{L}{k} &\leq \sum_{l=1}^L |\langle \alpha(x_l), \tau \rangle| = \sum_{l=1}^L |\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle| \\ &\leq \left\langle \sum_{l=1}^L \frac{\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle^-}{|\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle|} (\alpha(x_l) - \alpha^{(l)}), \tau \right\rangle \\ &\leq C \left\| \sum_{l=1}^L \frac{\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle^-}{|\langle \alpha(x_l) - \alpha^{(l)}, \tau \rangle|} (\alpha(x_l) - \alpha^{(l)}) \right\| = C, \end{aligned}$$

ce qui suffit. $\leftarrow *$

Proposition 2.7.4 *Si E et F sont des espaces normés, alors un opérateur $T \in L(E, F)$ admet un inverse linéaire continu à droite si et seulement si T est ouvert et tel que $\ker(T)$ admet un complément topologique dans E .*

Preuve. La condition est nécessaire. Si l'opérateur $S \in L(F, E)$ est tel que $TS = \text{id}_F$, alors bien sûr

- a) T est surjectif,
- b) ST est un projecteur linéaire continu, de noyau égal à $\ker(T)$; ainsi $\ker(T)$ admet un complément topologique dans E , à savoir $L = \text{im}(ST)$,
- c) $T|_L: L \rightarrow F$ est alors une bijection linéaire continue d'inverse égal à S ; T est donc relativement ouvert.

La condition est suffisante. Si L est un complément topologique de $\ker(T)$ dans E , alors $T|_L: L \rightarrow F$ est une bijection linéaire continue et ouverte; son inverse convient. ■

Proposition 2.7.5 *Si E et F sont des espaces normés, alors un opérateur $T \in L(E, F)$ admet un inverse linéaire continu à gauche si et seulement si T est injectif, relativement ouvert et tel que $\text{im}(T)$ admet un complément topologique dans F .*

Preuve. La condition est nécessaire. Si l'opérateur $S \in L(F, E)$ est tel que $ST = \text{id}_E$, alors bien sûr

- a) T est injectif,
- b) $T: E \rightarrow \text{im}(T)$ est alors une bijection linéaire continue dont l'inverse, égal à $S|_{\text{im}(T)}$ est continu. Dès lors, $T: E \rightarrow \text{im}(T)$ est un isomorphisme et T est relativement ouvert.
- c) $TS: F \rightarrow F$ est un projecteur linéaire continu de F , d'image égale à $\text{im}(T)$.

La condition est suffisante. Il existe donc un projecteur linéaire continu P de F , d'image égale à $\text{im}(T)$. De plus, $T: E \rightarrow \text{im}(T)$ est un isomorphisme. Dès lors, $T^{-1}P: F \rightarrow E$ est un opérateur linéaire continu. Pour conclure, il suffit alors de noter que $T^{-1}PT = \text{id}_E$. ■

2.8 Espace quotient

Proposition 2.8.1 *Si L est un sous-espace linéaire de l'espace normé E , alors*

$$\|\cdot\|^\sim : E/L \rightarrow \mathbb{R} \quad e_L \mapsto \inf_{l \in L} \|e + l\|$$

est une semi-norme sur E/L .

C'est une norme si et seulement si L est fermé.

Preuve. De fait, les inégalités $\|e_L\|^\sim \geq r > 0$ ont lieu si et seulement si on a $(e + b(< r)) \cap L = \emptyset$. ■

Définition. Si L est un sous-espace linéaire fermé de l'espace normé E , alors l'espace quotient E/L est l'espace normé $(E/L, \|\cdot\|^\sim)$.

Théorème 2.8.2 *Pour tout sous-espace linéaire fermé L de l'espace normé E , la surjection canonique $s_L: E \rightarrow E/L$ est*

- a) *continue et telle que $\|s_L\| \leq 1$; si $L \neq E$, on a même $\|s_L\| = 1$,*
- b) *ouverte; on a même $s_L b(< 1) = \{e_L : \|e_L\|^\sim < 1\}$.*

De plus, si F est un espace normé, un opérateur linéaire T de E/L dans F est continu si et seulement si $Ts_L: E \rightarrow F$ est continu.

Preuve. La première partie est triviale et entraîne évidemment la nécessité de la condition de la deuxième partie.

Inversement si l'opérateur $Ts_L: E \rightarrow F$ est continu, il existe $C > 0$ tel que $\|Ts_L \cdot\|_F \leq C \|\cdot\|_E$ sur E donc tel que

$$\|Te_L\|_F \leq C \|e + l\|_E, \quad \forall l \in L, \forall e \in E,$$

c'est-à-dire tel que

$$\|Te_L\|_F \leq C \|e_L\|^\sim, \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

Théorème 2.8.3 *Si L est un sous-espace linéaire fermé de l'espace normé E , alors toute suite de Cauchy dans E/L contient une sous-suite qui est l'image par la surjection canonique d'une suite de Cauchy dans E .*

En particulier, si L est un sous-espace linéaire fermé de l'espace de Banach E , alors E/L est un espace de Banach.

Preuve. Soit \tilde{e}_m une suite de Cauchy dans E/L . Au moyen d'une extraction à la Cauchy, on peut en extraire une sous-suite $\tilde{e}_{k(m)}$ telle que $\|\tilde{e}_{k(m)} - \tilde{e}_{k(m+1)}\| \sim < 2^{-m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, posons $f_1 = e_{k(1)}$ puis, de proche en proche, déterminons f_{m+1} pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $f_{m+1} \in \tilde{e}_{k(m+1)}$ et $\|f_m - f_{m+1}\| < 2^{-m}$. On vérifie directement que la suite \tilde{f}_m convient.

Le cas particulier est immédiat. ■

Proposition 2.8.4 *Soient L et M des sous-espaces linéaires fermés des espaces normés E et F respectivement.*

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie l'inclusion $TL \subset M$, alors l'opérateur linéaire unique $S \in \mathcal{L}(E/L, F/M)$ tel que $s_M T = S s_L$ est continu et donne lieu à la majoration $\|S\| \leq \|T\|$.

Preuve. De fait, il existe $C > 0$ tel que $\|T \cdot\|_F \leq C \|\cdot\|_E$ sur E donc tel que

$$\inf_{m \in M} \|Te + m\|_F \leq \inf_{g \in TL} \|Te + g\|_F \leq C \inf_{l \in L} \|e + l\|_E \cdot \blacksquare$$

Proposition 2.8.5 *Soient E, F des espaces normés et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur dont le noyau est fermé.*

Alors la bijection linéaire canonique $T^\sim : E/\ker(T) \rightarrow \text{im}(T)$ est continue (resp. ouverte) si et seulement si T est continu (resp. relativement ouvert).

De plus, si T est continu, on a $\|T^\sim\| = \|T\|$.

En particulier, T est un homomorphisme si et seulement si T^\sim est un isomorphisme, auquel cas $\|T^\sim\| = \|T\|$.

Preuve. Tout est immédiat.

Par exemple, si T est continu, le résultat précédent procure $\|T^\sim\| \leq \|T\|$. Mais on a aussi $T = \iota_{\text{im}(T)} \circ T^\sim \circ s_{\ker(T)}$ donc $\|T\| \leq \|\iota_{\text{im}(T)}\| \|T^\sim\| \|s_{\ker(T)}\|$. Au total, il vient $\|T\| = \|T^\sim\|$. ■

Proposition 2.8.6 *Si L est un sous-espace linéaire de dimension finie et M un sous-espace linéaire fermé de l'espace normé E , alors $L + M$ est un sous-espace linéaire fermé de E .*

Preuve. L'image $s_M L$ de L par la surjection canonique de E sur E/M est bien sûr un sous-espace linéaire de dimension finie, donc un fermé de E/M . Pour conclure, il suffit alors de noter que $L + M = s_M^{-1}(s_M L)$ car l'opérateur s_M est continu. ■

2.9 Densité, séparabilité et totalité

Rappel. Une partie D de l'espace normé E est *dense dans* la partie A de E si $D^- \supset A$; elle est *partout dense* si elle est dense dans E . Cela étant, $A \subset E$ est *séparable* s'il contient une partie dénombrable et dense dans A . De plus, si E est séparable, nous savons que toute partie de E est séparable.

Définition. Une partie A de l'espace normé E est *totale dans* E si $\text{span}(A)$ est partout dense.

Proposition 2.9.1 Si A est une partie totale de l'espace normé E , alors

$$\left\{ \sum_{(j)} c_j e_j : e_j \in A, c_j \in \mathbb{K}, c_j \text{ rationnel} \right\}$$

est dense dans E .

Dès lors, s'il existe un ensemble dénombrable et total dans l'espace normé E , E est séparable. ■

Exercice. Etablir que les espaces c_0 , c , ℓ^p pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, \infty[$ sont séparables. Contiennent-ils une partie dénombrable et totale? Si K est un compact de \mathbb{R}^n , établir que l'espace $C_0(K)$ est séparable. Contient-il une partie dénombrable et totale? Etablir que les espaces ℓ^∞ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas séparables.

* \rightarrow Un théorème de M. et S. Krein affirme que, pour un compact séparé K , l'espace $C_0(K)$ est séparable si et seulement si K est métrisable. \leftarrow *□

Proposition 2.9.2 Si L est un sous-espace linéaire fermé de l'espace normé et séparable E , alors l'espace quotient E/L est séparable.

Si les sous-espaces linéaires L et M de l'espace normé E sont séparables et complémentaires topologiques, alors E est séparable. ■

Définition. Une partie $\{e_j : j \in J\}$ de l'espace normé E est *topologiquement libre* si, pour tout $k \in J$, e_k n'appartient pas à l'enveloppe linéaire fermée de $\{e_j : j \in J, j \neq k\}$.

Exemple. La partie $\{e^{2i\pi nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ de $C_0([0, 1])$ est topologiquement libre. De fait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute combinaison linéaire $f(x) = \sum_{(k)} c_k e^{2i\pi kx}$ où n n'apparaît pas, on a

$$\int_0^1 |e^{2i\pi nx} - f(x)|^2 dx = 1 + \sum_{(k)} |c_k|^2 \geq 1$$

donc

$$\|e^{2i\pi nx} - f(x)\|_{[0,1]} \geq 1,$$

ce qui suffit. □

Exemple. L'ensemble $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas topologiquement libre dans l'espace $C_0([0, 1])$. C'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass.

(Pour un raffinement de ce résultat, cf. le théorème de Muntz dans [10], p. 50.) \square

2.10 Complétion

Théorème 2.10.1 (complétion) *Pour tout espace normé $(E, \|\cdot\|)$, il existe un espace de Banach $(\widehat{E}, \|\cdot\|^\wedge)$ et une injection linéaire, continue, relativement ouverte et d'image dense $\widehat{\iota}: E \rightarrow \widehat{E}$ telle que tout opérateur linéaire continu de E dans un espace de Banach F admette une représentation $T = \widehat{T}\widehat{\iota}$ avec $\widehat{T} \in L(\widehat{E}, F)$.*

De plus,

- a) si $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $\iota_1: E \rightarrow E_1$ constituent une autre solution, alors l'opérateur $\widehat{\iota}_1: \widehat{E} \rightarrow E_1$ est un isomorphisme,
- b) l'opérateur \widehat{T} est unique.

Preuve. Tout revient à déterminer de tels espace $(\widehat{E}, \|\cdot\|^\wedge)$ et opérateur $\widehat{\iota}$ car
 a) d'une part, l'unicité de \widehat{T} résulte aussitôt de la continuité de \widehat{T} et de la densité de $\text{im}(\widehat{\iota})$ dans \widehat{E} ,
 b) d'autre part, de l'existence de $\widehat{\iota}_1$ et ι_0 tels que $\iota_1 = \widehat{\iota}_1\widehat{\iota}$ et $\widehat{\iota} = \iota_0\iota_1$, on tire $\widehat{\iota} = \iota_0\iota_1 = \iota_0\widehat{\iota}_1\widehat{\iota}$ et $\iota_1 = \widehat{\iota}_1\widehat{\iota} = \widehat{\iota}_1\iota_0\iota_1$, c'est-à-dire que $\iota_0\widehat{\iota}_1 = \text{id}_{\widehat{E}}$ et $\widehat{\iota}_1\iota_0 = \text{id}_{E_1}$, d'où il s'ensuit que $\widehat{\iota}_1: \widehat{E} \rightarrow E_1$ est un isomorphisme.

Définition de \widehat{E} . L'ensemble \mathcal{C} des suites de Cauchy de E muni des opérations

$$\begin{aligned} +: \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} & ((e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}, (f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}) &\mapsto (e_m + f_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \\ \cdot: \mathbb{K} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} & (c, (e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}) &\mapsto (ce_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

est, comme on le vérifie directement, un espace linéaire dont l'ensemble \mathcal{C}_0 des suites convergentes vers 0 est un sous-espace linéaire.

Posons $\widehat{E} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$; \widehat{E} est un espace linéaire.

Définition de $\|\cdot\|^\wedge$. Pour toute suite e_m de Cauchy dans E , la suite $\|e_m\|$ converge. De plus, sa limite est égale à celle de la suite $\|f_m\|$ si on a $(e_m) \sim (f_m)$ car ceci signifie que la suite $e_m - f_m$ converge vers 0. Nous pouvons donc introduire la fonction

$$\|\cdot\|^\wedge: \widehat{E} \rightarrow \mathbb{R} \quad (e_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \sim \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \|e_m\|.$$

On vérifie alors aussitôt que $\|\cdot\|^\wedge$ est une norme sur \widehat{E} .

L'espace $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ est de Banach. Soit $((e_m^{(j)})_{m \in \mathbb{N}_0})_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy dans l'espace normé $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un entier $M(j) \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_{M(j)}^{(j)} - e_m^{(j)}\| \leq \frac{1}{j}, \quad \forall m \geq M(j).$$

Cela étant, établissons tout d'abord que la suite $(e_{M(j)}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans E . Soit $\varepsilon > 0$. Bien sûr, pour tous $r, s, p \in \mathbb{N}_0$, nous avons

$$\|e_{M(r)}^{(r)} - e_{M(s)}^{(s)}\| \leq \|e_{M(r)}^{(r)} - e_p^{(r)}\| + \|e_p^{(r)} - e_p^{(s)}\| + \|e_p^{(s)} - e_{M(s)}^{(s)}\|.$$

Ensuite il existe N_1 tel que

$$r, s \geq N_1 \Rightarrow \|(e_m^{(r)})_{m \in \mathbb{N}_0} - (e_m^{(s)})_{m \in \mathbb{N}_0}\| \widehat{\leq} \frac{\varepsilon}{2}$$

puis, pour tous $r, s \geq N_1$, il existe N_2 tel que

$$m \geq N_2 \Rightarrow \|e_m^{(r)} - e_m^{(s)}\| \leq \varepsilon.$$

Cela étant, pour tous $r, s \geq N_1$, il vient

$$\|e_{M(r)}^{(r)} - e_{M(s)}^{(s)}\| \leq \frac{1}{r} + \varepsilon + \frac{1}{s}$$

en recourant à un entier $p \geq \sup\{M(r), N_2, M(s)\}$.

Pour conclure, établissons que la suite de Cauchy de départ converge dans \widehat{E} vers $(e_{M(j)}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$. Soit $\varepsilon > 0$. Bien sûr, pour tous $j, r \in \mathbb{N}_0$, nous avons

$$\|e_r^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)}\| \leq \|e_r^{(j)} - e_{M(j)}^{(j)}\| + \|e_{M(j)}^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)}\|.$$

Ensuite, il existe N_1 tel que

$$j, r \geq N_1 \Rightarrow \|e_{M(j)}^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela étant, il vient

$$\|(e_r^{(j)})_{r \in \mathbb{N}_0} - (e_{M(r)}^{(r)})_{r \in \mathbb{N}_0}\| \widehat{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \|e_r^{(j)} - e_{M(r)}^{(r)}\| \leq \frac{1}{j} + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $j \geq N_1$, ce qui suffit.

Définition de $\widehat{\iota}$. On vérifie directement que l'opérateur $\widehat{\iota}: E \rightarrow \widehat{E}$ qui, à tout $e \in E$, associe la classe de la suite constante $(e_m = e)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une injection linéaire, continue et relativement ouverte, dont l'image est dense dans \widehat{E} .

Vérification. Soit T un opérateur linéaire continu de E dans un espace de Banach F .

i) Définition de \widehat{T} . Pour toute suite de Cauchy e_m de E , on vérifie directement que la suite Te_m est de Cauchy donc converge dans F . Comme l'image par T de toute suite convergente vers 0 dans E converge vers 0 dans F , il est clair que, si les suites e_m et $e_{1,m}$ appartiennent à la même classe de \widehat{E} , alors les limites des suites Te_m et $Te_{1,m}$ sont égales. Il est donc licite de définir $\widehat{T}((e_m)_{m \in \mathbb{N}_0})^\sim$ comme étant la limite dans F de la suite Te_m .

ii) $\widehat{T}\widehat{\iota} = T$ est trivial.

iii) $\widehat{T} \in L(\widehat{E}, F)$ est immédiat. ■

2.11 Bornés

Rappel. Soit E un espace normé.

Une partie B de E est *bornée* si $\sup_{e \in B} \|e\| < \infty$, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ tel que $B \subset b(C)$.

Toute partie finie de E est bornée. L'ensemble des éléments d'une suite de Cauchy de E est borné.

Voici quelques propriétés immédiates de ces ensembles:

- a) toute partie d'un borné est bornée,
- b) l'enveloppe absolument convexe d'un borné est bornée,
- c) l'adhérence d'un borné est bornée,
- d) toute réunion finie de bornés est bornée,
- e) toute combinaison linéaire de bornés est bornée,
- f) toute image linéaire continue d'un borné est bornée.

Proposition 2.11.1 *Soient E, F des espaces normés. Si l'image par $T \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une boule de E est bornée, alors T est continu.*

Preuve. On obtient de suite que l'image par T de $b(1)$ est bornée. Il existe donc $C > 0$ tel que

$$\|e\| \leq 1 \Rightarrow \|Te\| \leq C \quad \text{donc} \quad \|Te\| \leq C \|e\|, \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

Corollaire 2.11.2 *Si E, F sont des espaces normés, alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est continu si et seulement si, pour toute suite e_m convergente vers 0 dans E , l'ensemble $\{Te_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est borné.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, on sait même alors que $Te_m \rightarrow 0$.

La condition est suffisante. Il suffit de prouver que $Tb(1)$ est borné. Procédons par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite e_m de $b(1)$ telle que $\|Te_m\| \geq m^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Mais alors il vient $e_m/m \rightarrow 0$ dans E alors que l'ensemble $\{Te_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ n'est pas borné dans F , ce qui est contradictoire. ■

2.12 Précompacts, compacts, extractables

Rappel. Une partie K de l'espace normé E est *précompacte* si, pour tout $r > 0$, il existe une partie finie $\{e_1, \dots, e_J\}$ de E telle que K soit inclus dans $\cup_{j=1}^J b(e_j; r)$. On peut exiger que ces points e_1, \dots, e_J appartiennent à K ou à une partie dense dans K , et que les boules soient remplacées par les boules ouvertes correspondantes.

La caractérisation suivante justifie l'introduction de cette notion: *une partie K d'un espace normé E est précompacte si et seulement si, de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

De plus, nous savons que toute partie précompacte d'un espace normé est séparable.

Rappel. Une partie K de l'espace normé E est *extractable* si, de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite appartient à K .

Elle est *compacte* si, de tout recouvrement ouvert de K , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Par passage aux complémentaires, une partie K de E est compacte si et seulement si toute famille $\{F_j : j \in J\}$ de fermés de K qui a la propriété d'intersection finie — c'est-à-dire que, pour toute partie finie J' de J , on a $\cap_{j \in J'} F_j \neq \emptyset$ — est d'intersection non vide.

En fait, ces notions ne sont pas indépendantes: elles sont liées par l'important résultat suivant.

Pour une partie K d'un espace normé, les assertions suivantes sont équivalentes:

- (a) K est compact,
- (b) K est extractable,
- (c) K est précompact et séquentiellement complet.

Rappelons que, dans un espace normé:

- a) toute partie compacte est fermée,
- b) toute partie fermée d'un compact est compacte,
- c) toute union finie de compacts est compacte,
- d) si les espaces métriques K et H sont compacts et si $f: K \rightarrow H$ est une bijection continue, alors son inverse est continu.

Théorème 2.12.1 *Un espace normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité (ouverte ou fermée) est précompacte, auquel cas toutes ses parties fermées et bornées sont compactes.*

Preuve. La nécessité de la condition est directe.

La condition est suffisante. Comme $b(1)$ est précompact, nous savons qu'il existe des éléments e_1, \dots, e_J de $b(1)$, en nombre fini et tels que $b(1) \subset \cup_{j=1}^J b(e_j; 1/2)$. Pour tout $e \in b(1)$, il existe donc $j(1) \in \{1, \dots, J\}$ tel que $\|e - e_{j(1)}\| < 1/2$ puis $j(2) \in \{1, \dots, J\}$ tel que

$$\|2(e - e_{j(1)}) - e_{j(2)}\| < 1/2 \text{ donc } \|e - e_{j(1)} - 2^{-1}e_{j(2)}\| < 2^{-2}.$$

En continuant de la sorte, on obtient une suite $j(m)$ de $\{1, \dots, J\}$ telle que

$$\left\| e - \sum_{m=1}^M 2^{1-m} e_{j(m)} \right\| < 2^{-M}, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0,$$

Il s'ensuit que la série $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{1-m} e_{j(m)}$ converge vers e . Mais cette série converge également vers

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{N}_0, j(m)=1} 2^{1-m} \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_0, j(m)=J} 2^{1-m} \right) e_J$$

et ainsi e appartient à l'enveloppe linéaire de $\{e_1, \dots, e_J\}$. ■

Proposition 2.12.2 Soient E, F des espaces normés et $T \in L(E, F)$.

L'image par T de tout précompact (resp. de tout compact) de E est un précompact (resp. un compact) de F .

Preuve. Pour les compacts, la propriété est connue: c'est un cas particulier du fait que toute image continue d'un compact est compacte.

Passons aux précompacts. Soient K un précompact de E et $\varepsilon > 0$. Il existe alors une partie finie $\{e_1, \dots, e_J\}$ de K telle que K soit inclus dans l'union des boules $b(e_j; \varepsilon/(\|T\| + 1))$. On en tire aussitôt que TK est inclus dans $\cup_{j=1}^J b(Te_j; \varepsilon)$, ce qui suffit. ■

Proposition 2.12.3 Si E, F sont des espaces normés et K, H des précompacts (resp. des compacts) de E et F respectivement, alors $K \times H$ est un précompact (resp. un compact) de $E \times F$.

Preuve. Si K et H sont précompacts, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des parties finies $\{e_1, \dots, e_J\}$ et $\{f_1, \dots, f_L\}$ de K et H respectivement telles que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^J b(e_j; \varepsilon/2) \text{ et } H \subset \bigcup_{l=1}^L b(f_l; \varepsilon/2).$$

On en déduit aussitôt que

$$K \times H \subset \bigcup_{j=1}^J \bigcup_{l=1}^L b((e_j, f_l); \varepsilon).$$

Si K et H sont compacts, on vérifie directement que $K \times H$ est une partie extractable de $E \times F$. ■

Proposition 2.12.4 *Dans un espace normé, toute somme finie de précompacts (resp. de compacts) est précompacte (resp. compacte).*

Preuve. Cela résulte aussitôt des deux propositions précédentes si on note que l'opérateur $+$: $E \times E \rightarrow E$ est linéaire et continu. ■

Proposition 2.12.5 *Dans un espace normé, les enveloppes convexe et absolument convexe d'un précompact sont précompactes.*

Dès lors, dans un espace de Banach, les enveloppes convexe fermée et absolument convexe fermée d'un précompact sont compactes.

Preuve. Le cas compact résulte aussitôt du cas précompact et du fait que tout précompact séquentiellement complet est compact dans un espace normé.

Comme toute partie d'un précompact est précompacte, il suffit alors pour terminer d'établir que l'enveloppe absolument convexe d'un précompact K d'un espace normé E est précompacte.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors une partie finie $\{e_1, \dots, e_J\}$ de K telle que K soit inclus dans l'union des boules $b(e_j; \varepsilon/2)$. Comme l'enveloppe absolument convexe Γ de $\{e_1, \dots, e_J\}$ est un borné donc un précompact de l'espace de dimension finie $\text{span}(\{e_1, \dots, e_J\})$, c'est aussi un précompact de E et il existe une partie finie $\{f_1, \dots, f_L\}$ de Γ telle que Γ soit inclus dans la réunion des boules $b(f_l; \varepsilon/2)$. D'où la conclusion car on en déduit aussitôt que $\Gamma(K)$ est inclus dans $\cup_{l=1}^L b(f_l; \varepsilon)$. ■

Théorème 2.12.6 *Soit E un espace normé.*

Pour tout précompact K de E et toute partie D dense dans E , il existe une suite e_m de D convergente vers 0 et telle que, pour tout $e \in K$, il existe une suite $r_m(e)$ de $[0, \infty[$ vérifiant

- a) la série $\sum_{m=1}^{\infty} r_m(e)e_m$ converge vers e ,
- b) $\sum_{m=1}^{\infty} r_m(e) = 1$ et même

$$\sup_{e \in K} \sum_{m=M}^{\infty} r_m(e) \rightarrow 0 \quad \text{si } M \rightarrow \infty.$$

En particulier, tout précompact de E est inclus dans l'enveloppe convexe fermée d'une suite convergente vers 0.

Preuve. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, remarquons que $2^{-m}D$ est aussi une partie dense dans E .

Comme K est précompact, il existe $m_1 \in \mathbb{N}_0$ et $f_1, \dots, f_{m_1} \in 2^{-1}D$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} b(f_j; < 2^{-2 \cdot 1}).$$

Cela étant, pour tout $j \in \{1, \dots, m_1\}$, posons $e_j = 2^1 f_j$ et, pour tout $e \in K$, $r_j(e) = 2^{-1}$ si j est le premier entier tel que $\|e - f_j\| < 2^{-2 \cdot 1}$ et $r_j(e) = 0$ sinon. Au total, nous avons

$$\left\| e - \sum_{j=1}^{m_1} r_j(e) e_j \right\| < 2^{-2 \cdot 1}, \quad \forall e \in K.$$

Cela étant, il est aisé de déterminer de proche en proche des $m_k \in \mathbb{N}_0$,

des $e_j \in D$ pour $j \in \{m_{k-1} + 1, \dots, m_k\}$

et des $r_j(e)$ pour $j \in \{m_{k-1} + 1, \dots, m_k\}$ et $e \in K$

au moyen du procédé de récurrence suivant. Si les m_1, \dots, m_k , les e_j pour $j \in \{1, \dots, m_k\}$ et les $r_j(e)$ pour $j \in \{1, \dots, m_k\}$ et $e \in K$ sont déterminés, alors

$$K_k = \left\{ e - \sum_{j=1}^{m_k} r_j(e) e_j : e \in K \right\}$$

est précompact car inclus dans $K - \text{co}(\{0, e_1, \dots, e_{m_k}\})$. Dès lors, il existe $m_{k+1} > m_k$ et des $f_{m_k+1}, \dots, f_{m_{k+1}} \in 2^{-k-1}D$ tels que

$$K_k \subset \bigcup_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} b(f_j; < 2^{-2 \cdot (k+1)}).$$

Comme K_k est inclus dans $b(< 2^{-2 \cdot k})$, nous pouvons supposer que les $f_{m_k+1}, \dots, f_{m_{k+1}}$ appartiennent à $b(< 2^{-2 \cdot k})$. Cela étant, pour tout $j = m_k + 1, \dots, m_{k+1}$, nous posons $e_j = 2^{k+1} f_j$ et, pour tout $e \in K$, $r_j(e) = 2^{-k-1}$ si j est le premier entier parmi $\{m_k + 1, \dots, m_{k+1}\}$ tel que

$$\left\| e - \sum_{l=1}^{m_k} r_l(e) e_l - f_j \right\| < 2^{-2 \cdot (k+1)}$$

et $r_j(e) = 0$ sinon.

La vérification que ces suites e_m et $r_m(e)$ conviennent, est alors directe. ■

Exercice. Si L est un sous-espace linéaire fermé d'un espace de Banach E , établir que tout précompact de E/L est l'image par la surjection canonique d'un précompact de E .

Suggestion. Soit K un précompact de E/L . Vu le théorème précédent, il existe une suite e_m de E telle que $\tilde{e}_m \rightarrow 0$ dans E/L et que K soit inclus dans l'adhérence de $\text{co}(\{\tilde{e}_m : m \in \mathbb{N}_0\})$. Quitte à remplacer chacun des e_m par $f_m \in \tilde{e}_m$ tel que $\|f_m\| \leq \|\tilde{e}_m\| + 1/m$, nous pouvons supposer avoir $e_m \rightarrow 0$. Dès lors l'enveloppe convexe fermée de $\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un précompact de E et, pour conclure, il suffit de vérifier que son image par la surjection canonique contient K — c'est ici qu'on utilise le fait que l'espace normé E est complet. \square

Exercice. Dédurre de l'exercice précédent que, sous les mêmes conditions, tout compact de E/L est l'image par la surjection canonique d'un compact de E . \square

Exercice. Etablir que, dans un espace normé, la somme d'un compact et d'un fermé est fermée. \square

Exercice. Etablir que, dans un espace normé, les enveloppes convexe et absolument convexe d'une réunion finie de compacts respectivement convexes et absolument convexes est compacte. \square

2.13 Quelques théorèmes du point fixe

Définition. Une application $f: A \rightarrow A$ a un point fixe s'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = a$, un tel point a étant appelé *point fixe* de f .

C'est dans le cadre des espaces topologiques que cette notion donne lieu à des résultats importants; nous allons en développer quelques-uns.

Rappelons d'abord le résultat classique suivant.

Théorème 2.13.1 (point fixe, Banach) Toute contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique.

Preuve. Soient (M, d) un espace métrique complet et f une contraction de M , c'est-à-dire une application $f: M \rightarrow M$ pour laquelle il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ pour tous $x, y \in M$.

On vérifie directement que si f a un point fixe, il est unique.

Si x est un point de M , on introduit la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ par la récurrence suivante: $x_1 = x$ et $x_{m+1} = f(x_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. C'est une suite de Cauchy car on a évidemment

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq C^{m-1}d(x, f(x)), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Cette suite converge donc et, pour conclure, il reste à vérifier que sa limite x_0 est un point fixe de f or il vient aussitôt

$$x_0 = \lim_m x_{m+1} = \lim_m f(x_m) = f(x_0). \blacksquare$$

Définition. Un espace topologique T a la propriété du point fixe si toute application continue $f: T \rightarrow T$ a un point fixe.

Cette propriété très exigeante est réalisée dans certains cas particulièrement intéressants.

Voici tout d'abord un résultat admis sans preuve (pour une preuve, nous renvoyons à [5] ou à [25]).

Théorème 2.13.2 (point fixe, Brouwer) *La boule unité fermée de \mathbb{R}^n a la propriété du point fixe.* \blacksquare

Remarque. Pour $n \geq 2$, il s'agit d'une propriété très profonde. Le cas $n = 1$ est aisé (et proposé en exercice). \square

Ce théorème du point fixe peut être généralisé aux compacts convexes de \mathbb{R}^n . Pour réaliser cet objectif, nous avons besoin de quelques résultats auxiliaires, d'intérêt indépendant. \square

Proposition 2.13.3 *Dans \mathbb{R}^n , la distance d'un point à un fermé convexe et non vide est toujours réalisée et cela de manière unique.*

Preuve. Soient x un point et F un fermé convexe et non vide de \mathbb{R}^n . Comme il s'agit de la distance d'un compact $\{x\}$ à un fermé non vide, elle est toujours réalisée. Si x appartient à F , cette distance est égale à 0 et ne peut être réalisée que par x . Si x n'appartient pas à F et si la distance est réalisée en y et en z , on doit avoir $y = z$ sinon $(y + z)/2$ appartient aussi à F et vérifie $|x - (y + z)/2| < |x - y| = |x - z|$, ce qui est contradictoire. \blacksquare

Définition. Si F est un fermé convexe et non vide de \mathbb{R}^n , la projection de x sur F est le point de F qui réalise la distance de x à F .

Critère 2.13.4 *Un point ξ d'un fermé convexe et non vide F de \mathbb{R}^n est la projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur F si et seulement si on a*

$$\langle x - \xi, y - \xi \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

Preuve. La condition est nécessaire. Pour tout $y \in F$ et tout $r \in]0, 1[$, on a $r\xi + (1-r)y \in F$ donc

$$\begin{aligned} |x - \xi|^2 &\leq |x - r\xi - (1-r)y|^2 \leq |x - \xi + (1-r)(\xi - y)|^2 \\ &\leq |x - \xi|^2 + 2(1-r)\langle x - \xi, \xi - y \rangle + (1-r)^2|\xi - y|^2 \end{aligned}$$

donc

$$2\langle x - \xi, y - \xi \rangle \leq (1-r)|\xi - y|^2$$

et la conclusion s'ensuit en faisant tendre r vers 1^- .

La condition est suffisante. De fait, pour tout $y \in F$, on a alors

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x - \xi + \xi - y|^2 \\ &= |x - \xi|^2 + 2\langle x - \xi, \xi - y \rangle + |\xi - y|^2 \geq |x - \xi|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 2.13.5 *Si ξ et η désignent respectivement les projections des points $x, y \in \mathbb{R}^n$ sur le fermé convexe et non vide F de \mathbb{R}^n , on a $|\xi - \eta| \leq |x - y|$.*

Preuve. Cela résulte directement du critère précédent et des égalités suivantes:

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x - \xi + \xi - \eta + \eta - y|^2 \\ &= |\xi - \eta|^2 + 2\langle \xi - \eta, x - \xi \rangle + 2\langle \xi - \eta, \eta - y \rangle + |x - \xi + \eta - y|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Définition. Un *rétracté* d'un espace topologique T est une partie A de T pour laquelle il existe une application continue $u: T \rightarrow A$ telle que $u(a) = a$ pour tout $a \in A$, une telle application étant appelée *rétraction* de T sur A .

Proposition 2.13.6 *Tout fermé convexe et non vide de \mathbb{R}^n est un rétracté de \mathbb{R}^n .*

Preuve. Les deux résultats précédents établissent aussitôt que l'application qui, à tout point de \mathbb{R}^n , associe sa projection sur ce fermé est une rétraction de \mathbb{R}^n sur ce fermé. \blacksquare

Lemme 2.13.7 *Tout rétracté d'un espace topologique ayant la propriété du point fixe, a la propriété du point fixe.*

Preuve. Soient T un espace topologique ayant la propriété du point fixe et $A \subset T$ un rétracté de T . Il existe donc une rétraction $u: T \rightarrow A$.

Cela étant, si l'application $f: A \rightarrow A$ est continue et si ι désigne l'injection canonique de A dans T , alors $\iota \circ f \circ u$ est une application continue de T dans T donc admet un point fixe: il existe $t \in T$ tel que $\iota \circ f \circ u(t) = t$ mais un tel point t appartient en fait à A car il s'écrit aussi $f \circ u(t)$. D'où la conclusion. \blacksquare

Théorème 2.13.8 (point fixe généralisé, Brouwer) *Tout compact convexe non vide de \mathbb{R}^n a la propriété du point fixe.*

Preuve. De fait, tout compact convexe non vide de \mathbb{R}^n est inclus dans une boule compacte b centrée en 0. Vu le théorème du point fixe de Brouwer, il est clair que b a la propriété du point fixe. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que K est un rétracté de b . ■

Lemme 2.13.9 (projection, Schauder) *Si K est un compact non vide de l'espace normé E , alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F_ε de K et une application continue $\pi: K \rightarrow \text{co}(F_\varepsilon)$ telle que $\|e - \pi(e)\| \leq \varepsilon$ pour tout $e \in K$.*

Preuve. Nous savons qu'il existe une partie finie F_ε de K pour laquelle $K \subset F_\varepsilon + b(< \varepsilon)$; soit $F_\varepsilon = \{e_1, \dots, e_J\}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, introduisons la fonction continue

$$\varphi_j: K \rightarrow [0, +\infty[\quad e \mapsto \sup\{\varepsilon - \|e - e_j\|, 0\}.$$

Comme $\varphi = \sum_{j=1}^J \varphi_j$ est une fonction continue sur K et à valeurs > 0 , on vérifie de suite que l'application

$$\pi: K \rightarrow \text{co}(F_\varepsilon) \quad e \mapsto \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_j(e)}{\varphi(e)} e_j$$

convient. ■

Théorème 2.13.10 (point fixe, Schauder) *Si C est un fermé convexe et non vide d'un espace normé et si l'application $f: C \rightarrow C$ est continue et telle que $f(C)$ soit inclus dans un compact convexe, alors f a un point fixe.*

Preuve. Vu le lemme précédent, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe une partie finie F_m de $f(C)^-$ et une application continue $\pi_m: f(C)^- \rightarrow \text{co}(F_m)$ telle que $\|e - \pi_m(e)\| \leq 1/m$ pour tout $e \in f(C)^-$.

Bien sûr, on a $\text{co}(F_m) \subset C$. Dès lors,

$$f_m = \pi_m \circ f|_{\text{co}(F_m)}: \text{co}(F_m) \rightarrow \text{co}(F_m)$$

est une application continue d'un compact convexe de dimension finie dans lui-même et, vu le théorème du point fixe de Brouwer, il existe un point $e_m \in \text{co}(F_m)$ tel que $e_m = f_m(e_m)$. On a donc

$$e_m = f_m(e_m) \in \text{co}(F_m) \subset \text{co}(f(C)^-), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Comme l'adhérence de l'enveloppe convexe de $f(C)^-$ est un compact inclus dans C , la suite $(f_m(e_m) = e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ contient une sous-suite convergente: soit $e_{k(m)} \rightarrow e_0$. En fait, on a alors $e_0 \in C$ et $f(e_0) = e_0$ car

$$\|f(e_0) - e_0\| = \lim_m \|f(e_{k(m)}) - \pi_{k(m)}(f(e_{k(m)}))\| = 0. \blacksquare$$

Corollaire 2.13.11 (point fixe, Schauder) *Dans un espace normé, tout compact convexe et non vide a la propriété du point fixe. ■*

Théorème 2.13.12 (existence, Cauchy-Peano) *Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , tout point (x_0, y_0) de Ω et toute fonction réelle $f \in C_0(\Omega)$, il existe $r > 0$ et $u \in C_1([x_0 - r, x_0 + r])$ réel tels que*

$$\begin{cases} u(x_0) = y_0, \\ (x, u(x)) \in \Omega, \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r], \\ Du(x) = f(x, u(x)), \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]. \end{cases}$$

Preuve. Comme (x_0, y_0) appartient à l'ouvert Ω , il existe $s > 0$ tel que

$$J = [x_0 - s, x_0 + s] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subset \Omega.$$

Cela étant, posons

$$M = 1 + \|f\|_J, \quad r = \frac{s}{M} \quad \text{et} \quad I = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Remarquons que tout revient à établir l'existence d'une fonction réelle $u \in C_0(I)$, à valeurs dans $[y_0 - s, y_0 + s]$ et telle que

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt, \quad \forall x \in I,$$

car une telle fonction appartient nécessairement à $C_1(I)$.

On vérifie de suite que

$$C = \left\{ u \in C_{0, \mathbb{R}}(I) : \begin{array}{l} \|u(x) - y_0\|_I \leq s, \\ |u(x_1) - u(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in I \end{array} \right\}$$

est une partie convexe, bornée et fermée de $C_{0, \mathbb{R}}(I)$. Comme elle est aussi équicontinue sur I , c'est un compact convexe de $C_{0, \mathbb{R}}(I)$.

De plus,

$$T: C \rightarrow C_{0, \mathbb{R}}(I) \quad u \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{\cdot} f(t, u(t)) dt$$

définit une application continue (à établir) telle que $TC \subset C$ (à vérifier).

Le théorème du point fixe de Schauder affirme alors l'existence de $u \in C$ tel que $Tu = u$, ce qui suffit. ■

Définition. Si E est un espace normé, une application continue f de E dans lui-même vérifie la condition de bornation de Leray-Schauder s'il existe $r > 0$ tel que $\|e\| = r$ implique $f(e) \notin \{se : s > 1\}$ — ceci a notamment lieu si $\|e\| = r$ implique $\|f(e)\| \leq r$.

Théorème 2.13.13 (point fixe, Schaefer) Soit E un espace de Banach. Si l'application $f: E \rightarrow E$ est continue, est telle que $f(B)$ soit relativement compact pour tout borné B de E et vérifie la condition de bornation de Leray-Schauder, alors f a un point fixe.

Preuve. La condition de bornation de Leray-Schauder sur f procure $r > 0$ tel que $\|e\| = r$ implique $f(e) \notin \{se : s > 1\}$.

Cela étant, posons $C = \{e \in E : \|e\| \leq r\}$; C est évidemment une partie convexe et fermée de E telle que $f(C)^-$ soit compact. Introduisons l'application

$$\theta: E \rightarrow E \quad e \mapsto \begin{cases} e & \text{si } \|e\| \leq r, \\ re/\|e\| & \text{si } \|e\| > r. \end{cases}$$

Il est clair que cette application θ est continue. Cela étant, $\theta \circ f|_C: C \rightarrow C$ est aussi une application continue et de plus telle que $(\theta \circ f|_C)(C)^-$ soit inclus dans un compact convexe. Dès lors, le théorème du point fixe de Schauder procure un point e de C tel que $\theta(f(e)) = e$. En fait, on a $f(e) \in C$ car $f(e) \notin C$ mène à

$$e = \theta(f(e)) = \frac{r}{\|f(e)\|} f(e)$$

donc à $\|e\| = r$ alors qu'on a $s_0 e = f(e)$ pour $s_0 = \|f(e)\|/r > 1$. ■

2.14 Espaces de Baire

Définition. Un espace métrique est de *Baire* si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Par passage aux complémentaires, il revient au même de dire "si toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense".

Théorème 2.14.1 (Baire) Tout espace métrique complet est de Baire.
En particulier, tout espace de Banach est de Baire.

Preuve. Soit F_m une suite de fermés d'intérieur vide de l'espace métrique complet (M, d) .

Procédons par l'absurde: supposons $F = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$ d'intérieur non vide. Il existe alors $e_0 \in F$ et $r > 0$ tels que $b(e_0; r) \subset F$. Comme F_1 est d'intérieur vide et fermé,

il existe $e_1 \in b(e_0; < r)$ tel que $e_1 \notin F_1$, donc $r_1 \in]0, r/2[$ tel que $b(e_1; r_1) \subset b(e_0; r)$ et $b(e_1; r_1) \cap F_1 = \emptyset$. Comme F_2 est d'intérieur vide et fermé, il existe $e_2 \in b(e_1; < r_1)$ tel que $e_2 \notin F_2$, donc $r_2 \in]0, r_1/2[$ tel que $b(e_2; r_2) \subset b(e_1; r_1)$ et $b(e_2; r_2) \cap F_2 = \emptyset$. En continuant de la sorte, on met en évidence des suites e_m de M et r_m de $]0, +\infty[$ telles que

$$\begin{aligned} 0 &< r_{m+1} < r_m/2 \\ b(e_{m+1}; r_{m+1}) &\subset b(e_m; r_m) \\ b(e_{m+1}; r_{m+1}) \cap F_{m+1} &= \emptyset. \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt que $r_m \rightarrow 0$ et que la suite e_m est de Cauchy donc converge; soit f_0 sa limite. D'une part, f_0 doit appartenir au fermé $b(e_0; r)$ donc à F car chacun des e_m appartient à $b(e_0; r)$. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, f_0 doit appartenir à $b(e_m; r_m)$ car, pour tout $k \geq m$, on a $e_k \in b(e_m; r_m)$; il s'ensuit que f_0 n'appartient à aucun des F_m . D'où une contradiction. ■

* → Signalons le résultat plus général suivant.

Proposition 2.14.2 *Tout produit d'espaces métriques complets est un espace de Baire.*

En particulier, pour tout ensemble J non vide, \mathbb{K}^J est un espace de Baire.

Preuve. Soit $(M_j, d_j)_{j \in J}$ une famille non vide d'espaces métriques complets. Posons $M = \prod_{j \in J} (M_j, d_j)$ et considérons une suite $(F_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fermés de M , d'intérieurs vides. Tout revient à établir que $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ est d'intérieur vide.

Si ce n'est pas le cas, il existe un ouvert non vide Ω_1 inclus dans F . Comme F_1 est d'intérieur vide, Ω_1 n'est pas inclus dans F_1 : il existe donc $m^{(1)} \in \Omega_1 \setminus F_1$ et par conséquent une partie finie J_1 de J et des nombres $r_j^{(1)} \in]0, 1[$ pour les $j \in J_1$ tels que le voisinage fermé

$$V_1 = \prod_{j \in J_1} b_j(m_j^{(1)}; r_j^{(1)}) \times \prod_{j \in J \setminus J_1} M_j$$

de $m^{(1)}$ soit inclus dans Ω_1 et disjoint de F_1 . Comme F_2 est d'intérieur vide, l'ouvert

$$\Omega_2 = \prod_{j \in J_1} b_j(m_j^{(1)}; < r_j^{(1)}) \times \prod_{j \in J \setminus J_1} M_j$$

n'est pas inclus dans F_2 : il existe donc $m^{(2)} \in \Omega_2 \setminus F_2$ et par conséquent une partie finie J_2 de J , disjointe de J_1 et des nombres $r_j^{(2)} \in]0, r_j^{(1)}/2[$ pour les $j \in J_1$ et $r_j^{(2)} \in]0, 2^{-1}[$ pour les $j \in J_2$ tels que le voisinage fermé

$$V_2 = \prod_{j \in J_1 \cup J_2} b_j(m_j^{(2)}; r_j^{(2)}) \times \prod_{j \in J \setminus (J_1 \cup J_2)} M_j$$

de $m^{(2)}$ soit inclus dans Ω_2 et disjoint de F_2 . En continuant de la sorte, on met en évidence une suite $(m^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ de points de M , une suite $(J_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de parties finies et deux à deux disjointes de J et des nombres $r_j^{(k)} \in]0, 2^{-k+1}[$ pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $j \in \cup_{l=1}^k J_l$ tels que les ensembles

$$V_k = \prod_{j \in J_1 \cup \dots \cup J_k} b_j(m_j^{(k)}; r_j^{(k)}) \times \prod_{j \in J \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_k)} M_j$$

soient inclus dans F , emboîtés en décroissant et tels que $V_k \cap F_k = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $j \in J_k$, la suite $(m_j^{(l)})_{l \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans M_j ; soit m_j sa limite. Pour tout $j \in J \setminus \cup_{k=1}^{\infty} J_k$, choisissons $m_j \in M_j$. Il est alors clair que le point m de M ainsi défini appartient à F et n'appartient à aucun de F_m . D'où une contradiction. $\blacksquare \leftarrow *$

Exercice. Adapter la démonstration du théorème de Baire pour établir que, si une partie d'un espace métrique complet est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé, c'est un espace de Baire. \square

Exercice. Adapter la démonstration du théorème de Baire pour établir que toute espace localement compact et séparé est de Baire. \square

Remarque. Le théorème de Baire est un des piliers de l'analyse fonctionnelle. Ses applications sont nombreuses et profondes. Nous en verrons plusieurs dans la suite. Cependant à ce stade, nous devons nous contenter de quelques conséquences surprenantes. \square

Application. Si Ω est une partie ouverte et non vide de \mathbb{R} , il n'existe pas de suite K_m de parties compactes de Ω dont l'union soit égale à l'ensemble des points irrationnels appartenant à Ω .

Suggestion. Procédons par l'absurde. Quitte à remplacer chacun des K_m par $\cup_{j=1}^m K_j$, nous pouvons supposer les K_m emboîtés en croissant. Soit alors r_m une numérotation des points rationnels appartenant à Ω . Cela étant, les ensembles $H_m = K_m \cup \{r_1, \dots, r_m\}$ constituent une suite de compacts d'union égale à Ω . Comme Ω est un espace de Baire, l'un d'entre eux doit contenir un intervalle de \mathbb{R} , ce qui est contradictoire car un tel intervalle doit contenir une infinité de points rationnels distincts. \square

Application. Dédurre de l'application précédente qu'il n'existe pas de fonction $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ continue en tout point rationnel et discontinue en tout point irrationnel de $]-1, 1[$.

Suggestion. Si une fonction $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue en tout point rationnel de $]-1, 1[$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in]-1, 1[$ rationnel, il existe $\eta(x, 1/m) > 0$ tel que

$$(y \in]-1, 1[, |x - y| < \eta(x, 1/m)) \implies |f(x) - f(y)| \leq 1/m.$$

Si, en plus, f est discontinu en tout point irrationnel de $] -1, 1[$,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\left[-1 + \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m} \right] \setminus \bigcup_{\substack{-1 + \frac{1}{m} \leq x \leq 1 - \frac{1}{m} \\ x \text{ rationnel}}} b(x; < \eta(x, 1/m)) \right)$$

est égal à l'ensemble des points irrationnels de $] -1, 1[$. Comme il s'agit d'une réunion dénombrable de compacts, nous sommes arrivés à une contradiction. \square

Remarque. On peut aussi établir que, si $f \in C_{\infty}(\mathbb{R})$ donne lieu à l'égalité $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : D^m f(x) = 0\}$, alors f est un polynôme. (cf. [2]) \square

Application. Il existe une fonction continue et réelle sur $[0, 1]$ qui n'est monotone sur aucun intervalle inclus dans $[0, 1]$.

Suggestion. L'ensemble des intervalles inclus dans $[-1, 1]$ et ayant des extrémités rationnelles est dénombrable; soit $\{I_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ une numérotation de ces intervalles. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_m = \{f \in C_{0,\mathbb{R}}([0, 1]) : f \text{ non monotone sur } I_m\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on vérifie aisément que A_m est une partie ouverte et partout dense de $C_{0,\mathbb{R}}([0, 1])$. Cela étant, vu le théorème de Baire, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ est partout dense. Pour conclure, il suffit alors de constater que les éléments de cette intersection ne sont monotones sur aucun intervalle inclus dans $[0, 1]$. \square

Application. Il existe une fonction continue sur \mathbb{R} qui n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .

Suggestion. Il suffit de prouver l'existence d'une fonction continue sur $[0, 1]$ qui n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit A_m l'ensemble des éléments f de $C_0([0, 1])$ pour lesquels il existe $x \in [0, 1[$ tel que

$$\frac{1}{h} |f(x+h) - f(x)| \leq m, \quad \forall h \in]0, \inf\{1/m, 1-x\}[.$$

Bien sûr, tout $f \in C_0([0, 1])$ admettant une dérivée à droite en un point de $[0, 1[$ appartient à un des A_m . La réunion A de ces ensembles contient donc l'ensemble des $f \in C_0([0, 1])$ dérivables à droite en un point au moins de $[0, 1[$. Pour conclure au moyen du théorème de Baire, il suffit alors de vérifier que chacun des A_m est fermé et de complémentaire partout dense dans $C_0([0, 1])$. \square

Application. Si M est un espace métrique complet et si \mathcal{F} est une partie ponctuellement bornée de $C_0(M)$, alors il existe $x_0 \in M$ et $r > 0$ tels que

$$\sup \{ |f(x)| : f \in \mathcal{F}, d(x, x_0) \leq r \} < \infty.$$

Suggestion. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$F_m = \left\{ x \in X : \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| \leq m \right\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}([0, m])$$

est un fermé de M et la réunion de ces fermés est égale à M . \square

Application. Soit L_m une suite de sous-espaces linéaires de dimension finie d'un espace linéaire E . Si leur union L est un espace linéaire, alors

a) soit il existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $L = L_{m_0}$,

b) soit il en existe une sous-suite $L_{k(m)}$ strictement croissante et telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, L_j soit inclus dans un des $L_{k(m)}$.

Suggestion. Supposons avoir $L_k \neq \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{k\}} L_m$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Il existe alors un premier entier $k \geq 2$ tel que $L_k \not\subset L_1$. Cela étant, $L_1 + L_k$ est un sous-espace linéaire de dimension finie — donc un espace de Banach — dont $\{(L_1 + L_k) \cap L_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un recouvrement dénombrable fermé. Vu le théorème de Baire, il existe alors un premier entier $k(1)$ tel que $(L_1 + L_k) \cap L_{k(1)}$ soit d'intérieur non vide dans $L_1 + L_k$ donc tel que $L_1 + L_k \subset L_{k(1)}$. En continuant de la sorte, on obtient la suite annoncée en b). \square

Application. Il n'existe pas d'espace de Banach ayant une base de Hamel dénombrable infinie.

Suggestion. Sinon $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{span}(\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ serait union dénombrable de fermés d'intérieurs vides. \square

Chapitre 3

Fonctionnelles linéaires continues

3.1 Fonctionnelles linéaires continues

Rappel. Une fonctionnelle linéaire e^* sur l'espace normé E est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $|\langle \cdot, e^* \rangle| \leq C \|\cdot\|$ sur E , auquel cas on peut introduire la notion de norme $\|e^*\|$ de cette fonctionnelle.

Proposition 3.1.1 a) *Si e^* est une fonctionnelle linéaire non nulle sur un espace normé E , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (1) e^* est continu,
- (2) $\ker(e^*)$ est fermé,
- (3) il existe une boule b de E telle que $\langle b, e^* \rangle \neq \mathbb{K}$.

b) *Une fonctionnelle linéaire non nulle e^* sur un espace normé E n'est pas continue si et seulement si son noyau est partout dense dans E .*

Preuve. (1) \Rightarrow (2) est bien connu.

(2) \Rightarrow (3). De fait, tout $e \in E \setminus \ker(e^*)$ est le centre d'une boule b disjointe de $\ker(e^*)$ donc telle que $\langle b, e^* \rangle \neq \mathbb{K}$.

(3) \Rightarrow (1). De fait, si $c \notin \langle b(e_0; r), e^* \rangle$, alors il vient $c - \langle e_0, e^* \rangle \notin \langle b(r), e^* \rangle$ donc

$$\|e\| \leq r \Rightarrow |\langle e, e^* \rangle| \leq |c - \langle e_0, e^* \rangle|,$$

ce qui suffit.

b) La condition est nécessaire. De fait, si $\ker(e^*)$ n'est pas partout dense, il existe $e \in E \setminus (\ker(e^*))^-$ et e est alors le centre d'une boule b telle $\langle b, e^* \rangle \neq \mathbb{K}$.

La condition est suffisante car, si e^* est continu et a un noyau partout dense, on doit avoir $\ker(e^*) = E$, c'est-à-dire $e^* = 0$. ■

Remarque. Le problème de la caractérisation des fonctionnelles linéaires relativement ouvertes sur un espace normé E ne se pose pas car

- a) la fonctionnelle 0 est trivialement relativement ouverte,
- b) toute fonctionnelle linéaire non nulle sur E est ouverte (à faire, en guise d'exercice).

Définition. La dual topologique d'un espace normé E est l'espace de Banach $L(E, \mathbb{K})$, qu'on note plutôt E' . C'est un sous-espace vectoriel de E^* .

Théorème 3.1.2 (structure du dual) a) Pour tout $\beta \in \ell^1$ (resp. $\ell^\infty, \ell^2, \ell^1$),

$$\tau_\beta: c_0 \text{ (resp. } \ell^1, \ell^2, \ell^\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \alpha \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur c_0 (resp. $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$) telle que $\|\tau_\beta\| = \|\beta\|$.

b) En fait, l'application

$$\tau: \ell^1 \text{ (resp. } \ell^\infty, \ell^2) \rightarrow (c_0)' \text{ (resp. } (\ell^1)', (\ell^2)')$$

est une isométrie.

Preuve. a) est aisé et laissé en guise d'exercice.

b) est plus délicat et sera traité aux séances de répétition. ■

Remarque. Si l'espace normé E est de dimension finie, nous savons que toute fonctionnelle linéaire sur E est continue: on a $E' = E^*$. Par contre, si l'espace normé E n'est pas de dimension finie, l'inclusion $E' \subset E^*$ est stricte. Il existe en effet une suite e_m d'éléments de E qui sont linéairement indépendants. Il existe donc une base de Hamel B de E contenant $\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\}$. Cela étant, la fonctionnelle linéaire e^* sur E définie par $\langle e, e^* \rangle = 0$ si $e \in B \setminus \{e_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ et $\langle e_m, e^* \rangle = m \|e_m\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ n'est pas continue car l'image par e^* de la suite bornée $e_m / \|e_m\|$ n'est pas bornée. □

3.2 Théorème de Hahn-Banach, analytique

Lemme 3.2.1 Soit L un sous-espace \mathbb{R} -vectoriel de l'espace \mathbb{R} -vectoriel E . Si $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$p(re) = rp(e) \text{ et } p(e+f) \leq p(e) + p(f), \quad \forall e, f \in E, \forall r \geq 0,$$

et si $l^*: L \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathbb{R} -linéaire et tel que $\langle \cdot, l^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur L , alors il existe un prolongement \mathbb{R} -linéaire $e^*: E \rightarrow \mathbb{R}$ de l^* tel que $\langle \cdot, e^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur E .

Preuve. Soit \mathcal{E} l'ensemble des couples (f^*, F) où F est un sous-espace \mathbb{R} -vectoriel de E contenant L et où f^* est une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire sur F qui prolonge l^* et telle que $\langle \cdot, f^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur F .

Cet ensemble \mathcal{E} n'est pas vide car il contient (l^*, L) . De plus, la relation interne \leq définie par

$$((f_1^*, F_1) \leq (f_2^*, F_2)) \iff (F_1 \subset F_2 \text{ et } f_2^*|_{F_1} = f_1^*)$$

est une relation d'ordre. Enfin toute partie totalement ordonnée A de (\mathcal{E}, \leq) est bien sûr majorée par (f^*, F) où $F = \cup \{G : (g^*, G) \in A\}$ et où $f^*|_G = g^*$ pour tout $(g^*, G) \in A$. Vu le lemme de Zorn, (\mathcal{E}, \leq) a un élément maximal (f^*, F) et, pour conclure, il suffit de prouver que $F = E$.

Si F diffère de E , choisissons un point $e_0 \in E \setminus F$. Cela étant, nous allons établir l'existence d'un élément de \mathcal{E} du type (f_0^*, F_0) tel que $F_0 = F + \text{span}(\{e_0\})$ et $f_0^*|_F = f^*$, ce qui est contradictoire avec la maximalité de (f^*, F) .

Nous savons que tout élément e de F_0 admet une décomposition unique

$$e = f_e + r_e e_0 \text{ avec } f_e \in F \text{ et } r_e \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, f_s^* défini sur F_0 par

$$\langle e, f_s^* \rangle = \langle f_e, f^* \rangle + r_e s, \quad \forall e \in F_0,$$

est bien sûr une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire sur F_0 qui prolonge f^* . Tout revient donc à prouver l'existence de $s \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \cdot, f_s^* \rangle \leq p(\cdot)$ sur F_0 .

Or, pour tous $f_1, f_2 \in F$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle f_1, f^* \rangle + \langle f_2, f^* \rangle &= \langle f_1 + f_2, f^* \rangle \leq p(f_1 + f_2) \\ &\leq p(f_1 - e_0) + p(e_0 + f_2) \end{aligned}$$

donc

$$\langle f_1, f^* \rangle - p(f_1 - e_0) \leq p(e_0 + f_2) - \langle f_2, f^* \rangle, \quad \forall f_1, f_2 \in F.$$

Pour $s_0 = \sup \{ \langle f_1, f^* \rangle - p(f_1 - e_0) : f_1 \in F \}$, il vient alors

$$\langle f, f^* \rangle - s_0 \leq p(f - e_0) \text{ et } \langle f, f^* \rangle + s_0 \leq p(e_0 + f), \quad \forall f \in F.$$

Pour conclure, il suffit alors de noter que

a) pour $r > 0$, il vient successivement

$$\langle f + r e_0, f_{s_0}^* \rangle = r(\langle f/r, f^* \rangle + s_0) \leq r p(f/r + e_0) = p(f + r e_0),$$

b) pour $r < 0$, il vient successivement

$$\langle f + r e_0, f_{s_0}^* \rangle = |r|(\langle f/|r|, f^* \rangle - s_0) \leq |r| p(f/|r| - e_0) = p(f + r e_0). \blacksquare$$

Théorème 3.2.2 (Hahn-Banach) Soient p une semi-norme sur l'espace vectoriel E et L un sous-espace vectoriel de E .

Pour toute fonctionnelle linéaire l' sur L pour laquelle $|\langle \cdot, l' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur L , il existe une fonctionnelle linéaire e' sur E qui prolonge l' et telle que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E .

Preuve.

1. Cas des espaces \mathbb{R} -vectoriels

Vu le lemme, l' admet un prolongement \mathbb{R} -linéaire e' sur E tel que $\langle \cdot, e' \rangle \leq p(\cdot)$ sur E . Pour tout $e \in E$, on a donc

$$\langle e, e' \rangle \leq p(e) \quad \text{et} \quad -\langle e, e' \rangle = \langle -e, e' \rangle \leq p(-e) = p(e),$$

ce qui suffit.

2. Cas des espaces \mathbb{C} -vectoriels

Etablissons d'abord deux résultats auxiliaires.

Proposition 3.2.3 Si e' est une fonctionnelle \mathbb{C} -linéaire sur l'espace \mathbb{C} -vectoriel E , alors

$$\Re e' : E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto \langle e, \Re e' \rangle = \Re \langle e, e' \rangle$$

est une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire telle que

a) $\langle \cdot, e' \rangle = \langle \cdot, \Re e' \rangle - i \langle \cdot, \Im e' \rangle$,

b) si la semi-norme p sur E est telle que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E , alors on a aussi $|\langle \cdot, \Re e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E . ■

Proposition 3.2.4 Si $e'_{\mathbb{R}}$ est une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire sur l'espace \mathbb{C} -vectoriel E , alors

$$e' : E \rightarrow \mathbb{C} \quad e \mapsto \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle$$

est une fonctionnelle \mathbb{C} -linéaire sur E telle que

a) $\Re e' = e'_{\mathbb{R}}$,

b) si la semi-norme p sur E est telle que $|\langle \cdot, e'_{\mathbb{R}} \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E , alors on a aussi $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E .

Preuve. D'une part, pour tous $e \in E$ et $c \in \mathbb{C}$, on a successivement

$$\begin{aligned} \langle ce, e' \rangle &= \langle ce, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ice, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \Re c \cdot \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle + \Im c \cdot \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle + i \Im c \cdot \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \Re c \cdot \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \Re c \cdot \langle e, e' \rangle + i \Im c \cdot \langle e, e' \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tous $e_1, e_2 \in E$, on a successivement

$$\begin{aligned}\langle e_1 + e_2, e' \rangle &= \langle e_1 + e_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie_1 + ie_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \langle e_1, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie_1, e'_{\mathbb{R}} \rangle + \langle e_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie_2, e'_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \langle e_1, e' \rangle + \langle e_2, e' \rangle\end{aligned}$$

Au total, e' est une fonctionnelle \mathbb{C} -linéaire sur E .

Cela étant,

a) est trivial,

b) de fait, pour tout $e \in E$ tel que $\langle e, e' \rangle \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}|\langle e, e' \rangle| &= e^{-i \arg \langle e, e' \rangle} \langle e, e' \rangle \\ &= \left\langle e^{-i \arg \langle e, e' \rangle} e, e'_{\mathbb{R}} \right\rangle \leq p(e).\blacksquare\end{aligned}$$

Etablissons à présent le théorème de Hahn-Banach dans le cas des espaces \mathbb{C} -vectoriels.

Preuve. L'application \mathfrak{R}' est une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire sur l'espace \mathbb{R} -vectoriel sous-jacent à L . Vu le théorème de Hahn-Banach relatif aux espaces \mathbb{R} -vectoriels, il existe donc une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire $e'_{\mathbb{R}}$ sur l'espace \mathbb{R} -vectoriel sous-jacent à E , qui prolonge \mathfrak{R}' et telle que $|\langle \cdot, e'_{\mathbb{R}} \rangle| \leq p(\cdot)$ sur E . On en déduit de suite que la fonctionnelle \mathbb{C} -linéaire

$$e' : E \rightarrow \mathbb{C} \quad e \mapsto \langle e, e' \rangle = \langle e, e'_{\mathbb{R}} \rangle - i \langle ie, e'_{\mathbb{R}} \rangle$$

convient. \blacksquare

Remarque. Le théorème de Hahn-Banach est le deuxième pilier de l'analyse fonctionnelle.

3.3 Premières conséquences

Commençons par énoncer un cas particulier du théorème de Hahn-Banach, suffisant la plupart du temps.

Théorème 3.3.1 *Toute fonctionnelle linéaire continue sur un sous-espace vectoriel d'un espace normé E admet un prolongement linéaire continu sur E , de même norme.* \blacksquare

Voici à présent quelques conséquences aisées mais fort importantes du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 3.3.2 *Pour tout élément non nul e de l'espace normé E , il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e, e' \rangle = \|e\|$ et $\|e'\| = 1$.*

Preuve. On vérifie de suite que

$$l' : \text{span}(\{e\}) \rightarrow \mathbb{K} \quad ce \mapsto c \|e\|$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\text{span}(\{e\})$ telle que $|\langle \cdot, l' \rangle| \leq \|\cdot\|$. Vu le théorème de Hahn-Banach, l' admet un prolongement linéaire e' sur E tel que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq \|\cdot\|$. D'où la conclusion car on a $|\langle e/\|e\|, e' \rangle| = 1$ donc $\|e'\| = 1$. ■

Théorème 3.3.3 a) *Tout sous-espace vectoriel L de dimension finie de l'espace normé E a un complément topologique.*

b) *Tout sous-espace vectoriel L fermé et de codimension finie de l'espace normé E admet un complément topologique.*

Preuve. Soit $\{e_1, \dots, e_J\}$ une base de L . On sait qu'il existe $l'_1, \dots, l'_J \in L'$ tels que $\langle e_j, l'_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, J\}$. Si, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, e'_j est un prolongement linéaire continu de l'_j sur E , on vérifie de suite que

$$P : E \rightarrow E \quad e \mapsto \sum_{j=1}^J \langle e, e'_j \rangle e_j$$

est un projecteur linéaire continu sur E , d'image égale à L .

b) Soit $\{e_1, \dots, e_J\}$ une cobase de L dans E . Pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$,

$$L_j = L + \text{span}(\{e_k : 1 \leq k \leq J, k \neq j\})$$

est un sous-espace vectoriel fermé et de codimension 1 dans E . Il s'ensuit que, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, l'application

$$e'_j : E \rightarrow \mathbb{K} \quad e \mapsto c_{j,e}$$

si $e = l_{j,e} + c_{j,e}e_j$ est la décomposition unique de e selon $L_j + \text{span}(\{e_j\})$ est une fonctionnelle linéaire continue car son noyau $\ker(e'_j) = L_j$ est fermé. Cela étant, on vérifie de suite que

$$P : E \rightarrow E \quad e \mapsto \sum_{j=1}^J \langle e, e'_j \rangle e_j$$

est un projecteur linéaire continu sur E , de noyau égal à L . ■

Proposition 3.3.4 *Pour tout sous-espace vectoriel fermé L de l'espace normé E et tout $e \in E \setminus L$, il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e, e' \rangle = 1$ et $\langle L, e' \rangle = \{0\}$.*

En particulier, une partie D de E est totale dans E si et seulement si 0 est la seule fonctionnelle linéaire continue sur E qui s'annule identiquement sur D .

Preuve. Comme L est un sous-espace vectoriel fermé de codimension 1 dans l'espace vectoriel $L_0 = L + \text{span}(\{e_0\})$,

$$l' : L_0 \rightarrow \mathbb{K} \quad e \mapsto c_e$$

si $e = l_e + c_e e_0$ est la décomposition unique de $e \in L_0$ selon $L + \text{span}(\{e_0\})$, est une fonctionnelle linéaire continue sur L_0 car son noyau est égal à L . Cela étant, tout prolongement linéaire continu de l' sur E convient en guise de e' . ■

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.5 *Si F est un fermé absolument convexe de l'espace normé E , alors, pour tout $e_0 \in E \setminus F$, il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e_0, e' \rangle > 1$ et $|\langle e, e' \rangle| \leq 1$ pour tout $e \in F$.*

Preuve. Il existe $r > 0$ tel que $b(e_0; r) \cap F = \emptyset$ donc tel que

$$b(e_0; r/2) \cap (F + b(r/2)) = \emptyset.$$

Comme $A = F + b(r/2)$ est une partie absolument convexe et absorbante de E , p_A est une semi-norme sur E . Comme on a $b(r/2) \subset A$, p_A est même une semi-norme continue sur E . Enfin il est clair que e_0 n'appartient pas à $b_{p_A}(1)$. Dès lors, toute fonctionnelle linéaire e' sur E telle que $\langle e_0, e' \rangle = p_A(e_0)$ et $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq p_A(\cdot)$ sur E convient. ■

Proposition 3.3.6 *Si le dual E' de l'espace normé E est séparable, alors E est séparable.*

Preuve. Soit $D' = \{e'_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ une partie dénombrable dense de la sphère $\{e' : \|e'\| = 1\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe alors $e_m \in E$ tel que $\|e_m\| = 1$ et $|\langle e_m, e'_m \rangle| \geq 3/4$. Pour conclure, nous allons établir par contradiction que $L = \overline{\text{span}}(\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ est dense dans E . Si ce n'est pas le cas, il existe $e'_0 \in E'$ tel que $\|e'_0\| = 1$ et $\langle l, e'_0 \rangle = 0$ pour tout $l \in L$. Cela étant, il vient

$$\frac{3}{4} \leq |\langle e_m, e'_m \rangle| = |\langle e_m, e'_m - e'_0 \rangle| \leq \|e_m\| \|e'_m - e'_0\|$$

alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|e'_m - e'_0\| \leq \varepsilon$. D'où une contradiction. ■

Remarque. $*$ \rightarrow La réciproque de cette propriété est fautive: $E = \ell^1$ est un espace séparable et son dual ℓ^∞ n'est pas séparable. $\square \leftarrow *$

3.4 Théorème de Hahn-Banach, version géométrique

Théorème 3.4.1 (Mazur) Soient L un sous-espace vectoriel et Ω un ouvert non vide et convexe de l'espace normé E .

Si $\Omega \cap L = \emptyset$, alors il existe un \mathbb{R} -hyperplan fermé H de E tel que $L \subset H$ et $\Omega \cap H = \emptyset$.

Preuve. Quitte à remplacer E par son espace \mathbb{R} -vectoriel sous-jacent, nous pouvons supposer que E est un espace \mathbb{R} -vectoriel.

Choisissons un point e_0 de Ω ; $\Omega - e_0$ est alors une partie ouverte et convexe de E , contenant 0. On a tôt fait de vérifier que, d'une part, l'application

$$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \mapsto \inf \{ r > 0 : e \in r(\Omega - e_0) \}$$

est telle que $\varphi(re) = r\varphi(e)$ et $\varphi(e_1 + e_2) \leq \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$ pour tous $e, e_1, e_2 \in E$ et $r \in [0, +\infty[$, et que, d'autre part, $\Omega - e_0 = \{ e \in E : \varphi(e) < 1 \}$.

Comme L est un sous-espace vectoriel de codimension 1 dans l'espace vectoriel $M = L + \text{span}(\{e_0\})$, nous pouvons définir une fonctionnelle linéaire m' sur M par $\langle e_0, m' \rangle = -1$ et $\langle L, m' \rangle = \{0\}$.

Prouvons que $\langle \cdot, m' \rangle \leq \varphi(\cdot)$ sur M . Il suffit pour cela d'établir que, pour tout $m \in M$ tel que $\varphi(m) < 1$, on a $\langle m, m' \rangle < 1$. Or $\varphi(m) < 1$ avec $m \in M$ a lieu si et seulement si $m \in (\Omega - e_0) \cap M$. Dès lors, il vient

$$\langle m, m' \rangle = \langle -e_0, m' \rangle + \langle m + e_0, m' \rangle = 1 + \langle m + e_0, m' \rangle$$

avec $m + e_0 \in \Omega \cap M$. Pour conclure, prouvons que $\langle m + e_0, m' \rangle < 0$. De fait, si ce n'est pas le cas, l'élément

$$\frac{\langle m + e_0, m' \rangle}{1 + \langle m + e_0, m' \rangle} e_0 + \frac{1}{1 + \langle m + e_0, m' \rangle} (m + e_0)$$

appartient à $\Omega \cap M$ et annule m' , ce qui est contradictoire avec $\Omega \cap L = \emptyset$.

Vu le lemme préparatoire au théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement linéaire e' sur E de m' tel que $\langle \cdot, e' \rangle \leq \varphi(\cdot)$ sur E . En fait e' appartient à E' car $0 \in \Omega - e_0$ est le centre d'une boule $b(r)$ incluse dans l'ouvert $\Omega - e_0$ sur laquelle φ est majoré par 1: on a donc

$$\|e\| \leq r \implies (\langle e, e' \rangle \leq \varphi(e) \leq 1 \text{ et } \langle -e, e' \rangle \leq \varphi(-e) \leq 1),$$

ce qui suffit. Cela étant, $\ker(e')$ est un \mathbb{R} -hyperplan fermé contenant L . De plus, pour tout $e \in \Omega$, on a

$$\langle e, e' \rangle = \langle e_0, e' \rangle + \langle e - e_0, e' \rangle \leq -1 + \varphi(e - e_0)$$

avec $\varphi(e - e_0) < 1$ donc $\langle e, e' \rangle < 0$, ce qui suffit pour conclure. ■

Théorème 3.4.2 (séparation 1) *Si l'ouvert convexe et non vide Ω , ainsi que la partie convexe et non vide A de l'espace normé E sont disjoints, alors il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\langle e, e' \rangle < r \leq \langle f, e' \rangle, \quad \forall e \in \Omega, \forall f \in A.$$

Si, de plus, A est ouvert, alors il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle e, e' \rangle < r < \langle f, e' \rangle, \quad \forall e \in \Omega, \forall f \in A.$$

Preuve. Comme $L = \{0\}$ est un sous-espace \mathbb{R} -vectoriel disjoint de la partie ouverte et convexe $\Omega - A$ de E , il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que $\ker(e') \cap (\Omega - A) = \emptyset$. Comme $\langle \Omega, e' \rangle$ et $\langle A, e' \rangle$ sont des intervalles disjoints de \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{R}$ qui les sépare. D'où la conclusion, quitte à prendre $-e'$ car e' et $-e'$ sont des opérateurs linéaires ouverts. ■

Corollaire 3.4.3 *Pour toute partie convexe et non vide C de l'espace normé E et tout $e \in E \setminus C^-$, il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que $\langle e, e' \rangle \notin (\langle C, e' \rangle)^-$.*

En particulier, pour toute partie non vide A de E , $\overline{\text{co}}(A)$ est l'intersection des demi-espaces réels fermés contenant A .

Preuve. Soit b une boule ouverte de centre 0 dans E pour laquelle $(e+b) \cap C = \emptyset$. Comme $e+b$ est un ouvert convexe et non vide de E , le premier théorème de séparation donne l'existence de $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que $\langle e+b, e' \rangle \cap \langle C, e' \rangle = \emptyset$, ce qui suffit car $\langle e+b, e' \rangle$ est un voisinage de $\langle e, e' \rangle$ dans \mathbb{R} . ■

Théorème 3.4.4 (séparation 2) *Si le compact convexe non vide K et le fermé convexe non vide F de l'espace normé E sont disjoints, alors il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que*

$$\sup_{f \in F} \langle f, e' \rangle < \inf_{e \in K} \langle e, e' \rangle.$$

Preuve. Il existe $r > 0$ tel que $(K + b(< r)) \cap (F + b(< r)) = \emptyset$. Comme $K + b(< r)$ et $F + b(< r)$ sont deux ouverts convexes et non vides de E , le premier théorème de séparation permet aussitôt de conclure. ■

Définition. Un \mathbb{R} -hyperplan d'appui d'une partie non vide A de l'espace normé E est un \mathbb{R} -hyperplan H de E contenant au moins un point de A et tel que tous les points de A soient d'un même côté de H , c'est-à-dire qu'il existe $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{e \in E : \langle e, e' \rangle = r\}$ contienne un point de A au moins et que soit $A \subset \{e \in E : \langle e, e' \rangle \leq r\}$, soit $A \subset \{e \in E : \langle e, e' \rangle \geq r\}$.

On vérifie de suite que, si la partie A de E est d'intérieur non vide et admet un \mathbb{R} -hyperplan d'appui H , alors H est déterminé par une fonctionnelle \mathbb{R} -linéaire continue sur E et dès lors H est fermé.

Proposition 3.4.5 *Si F est une partie convexe, fermée et d'intérieur non vide de l'espace normé E , tout point frontière de F appartient à un \mathbb{R} -hyperplan d'appui.*

Il s'ensuit que F est l'intersection des demi-espaces réels fermés qui le contiennent et qui sont déterminés par ses \mathbb{R} -hyperplans d'appui fermés.

Preuve. Pour tout $e_0 \in F^\bullet$, F° est un ouvert convexe non vide et e_0 un convexe fermé non vide disjoint de F° . D'où la conclusion par le premier théorème de séparation. ■

Proposition 3.4.6 *Tout compact convexe et non vide d'un espace normé est égal à l'intersection des demi-espaces réels fermés qui le contiennent et qui sont déterminés par ses \mathbb{R} -hyperplans d'appui fermés.*

Preuve. Cela résulte aussitôt du deuxième théorème de séparation. ■

3.5 Théorème de Krein-Milman

Définition. Un point extrémal de la partie convexe C de l'espace vectoriel E est un élément e_0 de C qui n'appartient à aucun segment ouvert inclus dans C , c'est-à-dire que, si $e_1, e_2 \in C$ et $r \in]0, 1[$ sont tels que $e_0 = re_1 + (1-r)e_2$, alors $e_1 = e_2$.

Lemme 3.5.1 *Si K est un compact non vide d'un espace normé E , alors tout \mathbb{R} -hyperplan d'appui fermé H de K contient au moins un point extrémal de K .*

Preuve. Appelons variété d'appui de K toute variété \mathbb{R} -vectorielle M de E telle que $K \cap M \neq \emptyset$ et contenant tout segment ouvert inclus dans K qui la rencontre. Bien sûr, tout \mathbb{R} -hyperplan d'appui de K est une variété d'appui de K et toute variété d'appui de K réduite à un point est un point extrémal de K .

Notons \mathcal{E} l'ensemble des variétés d'appui de K , fermées et incluses dans H ; bien sûr, \mathcal{E} n'est pas vide. De plus, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur \mathcal{E} . Enfin toute partie totalement ordonnée A de (\mathcal{E}, \supseteq) est majorée par $M_A = \bigcap \{M : M \in A\}$: en effet, $\{M \cap K : M \in A\}$ est une famille de compacts vérifiant la propriété d'intersection finie, ce qui assure que M_A est non vide, donc une variété d'appui de K .

Vu le lemme de Zorn, (\mathcal{E}, \supseteq) admet un élément maximal; soit M_0 . Pour conclure, il suffit alors de prouver que M_0 est un singleton. Si ce n'est pas le cas, il existe deux

points distincts e_1, e_2 appartenant à M_0 puis $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tels que $\langle e_1, e' \rangle \neq \langle e_2, e' \rangle$. Cela étant,

$$M_0 \cap \left\{ e \in E : \langle e, e' \rangle = \sup_{m \in M_0 \cap K} \langle m, e' \rangle \right\}$$

est assurément un élément de \mathcal{E} , inclus strictement dans M_0 , ce qui est contradictoire avec la maximalité de M_0 .

D'où la conclusion. ■

Théorème 3.5.2 (Krein-Milman) *Tout compact convexe d'un espace normé est égal à l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Preuve. Soit K un compact convexe de l'espace normé E . Désignons par F l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des points extrémaux de K .

D'une part, il est clair que K contient F .

D'autre part, F contient K sinon il existe $e_0 \in K \setminus F$ et le deuxième théorème de séparation procure $e' \in (E_{\mathbb{R}})'$ tel que

$$\sup_{f \in F} \langle f, e' \rangle < \langle e_0, e' \rangle \leq \sup_{e \in K} \langle e, e' \rangle = r.$$

Il s'ensuit que le \mathbb{R} -hyperplan d'appui fermé $\{ e \in E : \langle e, e' \rangle = r \}$ est disjoint de F , ce qui est contradictoire avec le lemme précédent. ■

Proposition 3.5.3 *Si l'enveloppe convexe fermée F du compact K de l'espace normé E est compacte, alors tout élément extrémal de F appartient à K .*

Preuve. Soit e un élément extrémal de F . Pour tout $r > 0$, il existe une partie finie A_r de K telle que $K \subset A_r + b(r)$. Pour tout $a \in A_r$, posons $F_a = \overline{\text{co}}(K \cap b(a; r))$. Bien sûr, F est égal à l'enveloppe convexe de $\cup_{a \in A_r} F_a$. Il existe donc, pour tout $a \in A_r$, un élément e_a de F_a et $r_a \geq 0$ tels que

$$\sum_{a \in A_r} r_a = 1 \text{ et } e = \sum_{a \in A_r} r_a e_a.$$

Comme e est un élément extrémal de F et comme, pour tout $a \in A_r$, e_a appartient à F , il existe $a \in A_r$ tel que $e = e_a$ donc tel que $e \in a + b(r)$ car $a + b(r)$ est un fermé convexe qui contient F_a . On en déduit aussitôt l'appartenance de e à $K + b(r)$ pour tout $r > 0$, ce qui suffit. ■

Rappel. *Tout compact convexe d'un espace vectoriel de dimension finie est égal à l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses éléments extrémaux.*

3.6 Duaux associés

Question. Si L est un sous-espace vectoriel fermé propre d'un espace normé E , quelles sont les relations qui existent entre E' , L' et $(E/L)'$?

Théorème 3.6.1 Soit L un sous-espace vectoriel fermé propre de l'espace normé E .

a) Si R désigne l'opérateur restriction $\cdot|_L: E' \rightarrow L'$ à L , alors l'opérateur $\tilde{R}: E'/\ker(R) \rightarrow L'$ est une isométrie, avec $\ker(R) = L^\perp$.

b) Si s_L désigne la surjection canonique de E sur E/L , alors

$$S: (E/L)' \rightarrow L^\perp \quad x' \mapsto x' \circ s_L$$

est une isométrie.

Preuve. a) Il est clair que R est un opérateur linéaire continu de norme ≤ 1 . Une première application du théorème de Hahn-Banach signale que tout $l' \in L'$ admet un prolongement linéaire continu sur E ; R est donc surjectif. Cela étant, \tilde{R} est une bijection linéaire continue de norme ≤ 1 . Une application plus fine du théorème de Hahn-Banach signale que \tilde{R} est une isométrie: de fait, tout $l' \in L'$ admet un prolongement $e'_l \in E'$ de même norme.

b) Il est clair que, pour tout $x' \in (E/L)'$, $x' \circ s_L$ appartient à L^\perp . Cela étant, il est trivial que S est un opérateur linéaire. Il est surjectif car, pour tout $e' \in L^\perp$, on a $\ker(e') \supset L$, ce qui implique l'existence de $x' \in (E/L)'$ tel que $e' = x' \circ s_L$. Enfin, pour tout $x' \in (E/L)'$, on a successivement

$$\|Sx'\| = \sup_{\|e\|<1} |\langle e, Sx' \rangle| = \sup_{\|e\|<1} |\langle s_L e, x' \rangle| = \sup_{\|\tilde{e}\|<1} |\langle \tilde{e}, x' \rangle| = \|x'\|. \blacksquare$$

3.7 Bidual et réflexivité

Les résultats du Paragraphe 2.3 appliqués au cas particulier $F = \mathbb{K}$ donnent lieu au résultat suivant.

Théorème 3.7.1 Si e^* est une fonctionnelle linéaire sur l'espace normé E , les assertions suivantes sont équivalentes:

- e^* est continu,
- e^* est continu en 0,
- il existe $C > 0$ tel que $|\langle \cdot, e^* \rangle| \leq C \|\cdot\|$. \blacksquare

Définitions. *Le dual topologique* de l'espace normé E est l'espace $L(E, \mathbb{K})$ qu'on note plutôt E' . Il s'agit d'un espace de Banach où

$$\|e'\| = \sup_{\|e\|=1} |\langle e, e' \rangle|, \quad \forall e' \in E'.$$

De plus, pour tout $e' \in E'$, on a

$$|\langle e, e' \rangle| \leq \|e\| \|e'\|, \quad \forall e \in E,$$

cette majoration ne pouvant être améliorée.

Cela étant, nous pouvons introduire *le bidual* de E comme étant le dual de l'espace normé E' ; c'est bien sûr un espace de Banach.

Théorème 3.7.2 *Pour tout espace normé E , l'application*

$$\delta: E \rightarrow E'' \quad e \mapsto \langle e, \cdot \rangle$$

est une injection linéaire telle que $\|\delta e\| = \|e\|$ pour tout $e \in E$.

Preuve. Pour tout $e \in E$, $\langle e, \cdot \rangle$ est en effet une fonctionnelle linéaire sur E' telle que

$$\sup_{\|e'\|=1} |\langle e, e' \rangle| = \|e\|,$$

vu le théorème de Hahn-Banach. ■

Remarque. Si E est un espace normé non complet, il est clair que cet opérateur δ n'est pas surjectif. En fait, ceci peut arriver même si E est un espace de Banach: $* \rightarrow$ ainsi le bidual de c_0 est l'espace ℓ^∞ . $\leftarrow *$ Aussi nous introduisons la définition suivante.

Définition. Un espace normé E est *réflexif* si l'injection canonique $J: E \rightarrow E''$ est surjective.

Bien sûr \mathbb{K}^n est réflexif pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et $* \rightarrow$ tout espace de Hilbert est réflexif. $\leftarrow *$

$* \rightarrow$ Par contre, les espaces ℓ^1 , c_0 , c et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs. $\leftarrow *$

Théorème 3.7.3 *Un espace de Banach est réflexif si et seulement si son dual est réflexif.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Il suffit d'établir que le sous-espace de Banach δE de E'' est égal à E'' ou, ce qui revient au même, que si $e''' \in E'''$ est nul sur δE , alors $e''' = 0$. Or E' étant réflexif, il existe $e' \in E'$ tel que $\langle e', e'' \rangle = \langle e'', e''' \rangle$ pour tout $e'' \in E''$. En particulier, il vient $\langle e', \delta e \rangle = \langle e, e' \rangle = 0$ pour tout $e \in E$ donc $e' = 0$, ce qui suffit. ■

Remarque. Si E est un espace de Banach, on a donc deux suites d'espaces de Banach "emboîtées" en croissant:

$$E \subset E'' \subset E^{(4)} \subset \dots \quad \text{et} \quad E' \subset E''' \subset E^{(5)} \subset \dots$$

et le théorème précédent signale que ces deux suites sont simultanément constantes ou strictement croissantes. \square

Proposition 3.7.4 *Si E est un espace de Banach réflexif et si L est un sous-espace vectoriel fermé de E , alors les espaces de Banach L et E/L sont réflexifs.*

Preuve. Établissons d'abord que l'espace de Banach L est réflexif. Soit l'' un élément de L'' . L'application $.\mid_L: E' \rightarrow L'$ étant linéaire et continue, nous avons $\langle .\mid_L, l'' \rangle \in E''$. Comme E est réflexif, il existe alors $e_{l''} \in E$ tel que $\langle e_{l''}, . \rangle = \langle .\mid_L, l'' \rangle$ sur E' . En fait, on a même $e_{l''} \in L$ car $\langle e' \mid_L, l'' \rangle = 0$ pour tout $e' \in L^\perp$. Cela étant, pour tout $l' \in L'$, la surjectivité de $.\mid_L: E' \rightarrow L'$ procure $e' \mid_L$ tel que $e' \mid_L = l'$ donc tel que

$$\langle l', l'' \rangle = \langle e' \mid_L, l'' \rangle = \langle e_{l''}, e' \rangle;$$

de là on tire $\langle e_{l''}, . \rangle = \langle ., l'' \rangle$ sur L' , ce qui suffit.

Établissons maintenant que l'espace de Banach E/L est réflexif. Nous savons que E' et par conséquent L^\perp sont des espaces de Banach réflexifs. Dès lors $(E/L)'$ et par conséquent E/L sont des espaces de Banach réflexifs. \blacksquare

Chapitre 4

Opérateurs linéaires continus

4.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 4.1.1 *Si E, F sont des espaces normés et si \mathcal{B} est une partie de $L(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) \mathcal{B} est borné,
- (b) \mathcal{B} est uniformément équicontinu sur E ,
- (c) \mathcal{B} est équicontinu en 0.

Preuve. (a) \Rightarrow (b). Comme il existe $C > 0$ tel que $\|T\| \leq C$ pour tout $T \in \mathcal{B}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon/C > 0$ tel que

$$\|e_1 - e_2\| \leq \varepsilon/C \Rightarrow \sup_{T \in \mathcal{B}} \|Te_1 - Te_2\| \leq \varepsilon.$$

(b) \Rightarrow (c) est trivial.

(c) \Rightarrow (a). Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $e \in E$ tel que $\|e\| \leq \eta$, on a $\sup_{T \in \mathcal{B}} \|Te\| \leq 1$. On en tire de suite que $\|T\| \leq 1/\eta$ pour tout $T \in \mathcal{B}$. ■

Définition. Si E et F sont des espaces normés, une partie \mathcal{B} de $L(E, F)$ est *ponctuellement bornée* si, pour tout $e \in E$, $\{Te : T \in \mathcal{B}\}$ est un borné de F .

Théorème 4.1.2 (bornation uniforme, Banach-Steinhaus) *Si l'espace E est de Banach et l'espace F normé, alors toute partie ponctuellement bornée de $L(E, F)$ est bornée.*

Preuve. Soit \mathcal{B} une partie ponctuellement bornée de $L(E, F)$. Alors

$$A = \bigcap \{ T^{-1}b(1) : T \in \mathcal{B} \}$$

est bien sûr une partie absolument convexe et fermée de E . De plus, A est aussi absorbant car, pour tout $e \in E$, il existe $C > 0$ tel que le borné $\{Te : T \in \mathcal{B}\}$ soit inclus dans $b(C)$ donc tel que $e \in CA$. Comme on a $E = \cup_{m=1}^{\infty} mA$, le théorème de Baire assure l'existence de $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $(mA)^\circ \neq \emptyset$. Dès lors, il existe $r > 0$ tel que $b(r) \subset A$. On en déduit aisément que $\|T\| \leq 1/r$ pour tout $T \in \mathcal{B}$. D'où la conclusion. ■

Théorème 4.1.3 *Si E est un espace de Banach, si F est un espace normé et si T_m est une suite de $L(E, F)$ ponctuellement convergente—c'est-à-dire telle que la suite $T_m e$ converge dans F pour tout $e \in E$ —, alors il existe $T \in L(E, F)$ tel que $Te = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m e$ pour tout $e \in E$.*

Preuve. Pour tout $e \in E$, désignons par Te la limite de la suite $T_m e$ dans F ; T apparaît alors comme étant une application de E dans F . On vérifie directement que T est en fait un opérateur linéaire de E dans F . Enfin, vu le théorème de Banach-Steinhaus, $\{T_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un borné de $L(E, F)$; il existe donc $C > 0$ tel que $\|T_m\| \leq C$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, d'où on tire

$$\|Te\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m e\| \leq C \|e\|, \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

Théorème 4.1.4 *Soient E, F des espaces de Banach et T_m une suite bornée de $L(E, F)$.*

Si, pour tout élément d d'une partie partout dense D de E , la suite $T_m d$ converge dans F , alors il existe $T \in L(E, F)$ tel que $T_m e \rightarrow Te$ pour tout $e \in E$.

Preuve. Vu le théorème précédent, comme F est un espace de Banach, il suffit de prouver que, pour tout $e \in E$, la suite $T_m e$ est de Cauchy.

Soient $e \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $C > 0$ tel que $\|T_m\| \leq C$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, il existe $d \in D$ tel que $\|e - d\| \leq \varepsilon/(3C)$ puis M tel que, pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ tels que $r, s \geq M$, $\|T_r d - T_s d\| \leq \varepsilon/3$. Au total, pour tous $r, s \geq M$, il vient

$$\|T_r e - T_s e\| \leq \|T_r e - T_r d\| + \|T_r d - T_s d\| + \|T_s d - T_s e\| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

Remarque. Le théorème de Banach-Steinhaus et ses conséquences que nous venons d'établir, sont considérés comme étant un pilier de l'analyse fonctionnelle.

4.2 Théorème de l'opérateur ouvert

Théorème 4.2.1 (opérateur ouvert) *Soient E un espace de Banach et F un espace normé.*

Si $T: E \rightarrow F$ est un opérateur linéaire continu et si $\text{im}(T)$ n'est pas union dénombrable d'ensembles nulle part denses, alors

- (a) T est surjectif,
- (b) T est ouvert,
- (c) F est un espace de Banach.

Preuve. Pour obtenir (a), il suffit d'établir (b).

(b) i) Etablissons d'abord que, pour tout $r > 0$, $(Tb_E(< r))^-$ est d'intérieur non vide. De fait, comme $\text{im}(T)$ est égal à $\cup_{m=1}^{\infty} mTb_E(< r)$, l'hypothèse signale qu'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $(mTb_E(< r))^- = m(Tb_E(< r))^-$ a un intérieur non vide.

(b) ii) Etablissons ensuite que $Tb_E(< 1) \supset (Tb_E(< 2^{-1}))^-$, ce qui permet aussitôt de conclure vu i). Soit $f_1 \in (Tb_E(< 2^{-1}))^-$. Vu i), il existe $e_1 \in b_E(< 2^{-1})$ tel que $Te_1 \in f_1 + (Tb_E(< 2^{-2}))^- \cap b_F(2^{-1})$. Vu i) à nouveau, il existe $e_2 \in b_E(< 2^{-2})$ tel que $Te_2 \in f_1 - Te_1 + (Tb_E(< 2^{-3}))^- \cap b_F(2^{-2})$. En continuant de la sorte, on met en évidence une suite e_m de E telle que

$$\|e_m\|_E < 2^{-m}$$

$$Te_{m+1} \in f_1 - T\left(\sum_{j=1}^m e_j\right) + (Tb_E(< 2^{-m-2}))^- \cap b_F(2^{-m})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On en déduit aussitôt que la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ converge dans E , que sa limite e appartient à $b(< 1)$ et que $Te = f_1$.

(c) De fait, l'opérateur canonique $\tilde{T}: E/\ker(T) \rightarrow F$ est alors un isomorphisme alors que $E/\ker(T)$ est un espace de Banach. ■

Corollaire 4.2.2 *Si E et F sont des espaces de Banach, toute surjection linéaire continue de E sur F est ouverte. ■*

Corollaire 4.2.3 *Si E et F sont des espaces de Banach, toute bijection linéaire continue de E sur F est un isomorphisme. ■*

Proposition 4.2.4 *Si*

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte d'espaces de Banach où les opérateurs A et B sont continus, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) A admet un inverse linéaire continu à gauche: $\exists A \in L(F, E)$ tel que $LA = \text{id}_E$,
 (2) B admet un inverse linéaire continu à droite: $\exists R \in L(G, F)$ tel que $BR = \text{id}_G$,
 (3) il existe un projecteur linéaire continu P dans F tel que

$$\text{im}(P) = \text{im}(A) = \ker(B).$$

Preuve. (1) \Rightarrow (3). L'opérateur linéaire continu $P = AL$ est évidemment un projecteur. De plus, L étant surjectif, on a $\text{im}(P) = \text{im}(A)$.

(2) \Rightarrow (3). L'opérateur linéaire continu $Q = RB$ est évidemment un projecteur. De plus, R étant injectif, on a $\ker(Q) = \ker(B)$. Cela étant, $P = \text{id}_F - Q$ est un projecteur linéaire continu dans F tel que $\text{im}(P) = \ker(Q) = \ker(B)$.

(3) \Rightarrow (1). La suite étant exacte, l'opérateur A est injectif et l'espace vectoriel $\text{im}(A) = \ker(B)$ est fermé. Cela étant, $A: E \rightarrow \text{im}(A)$ est une bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach; dès lors, $A^{-1}: \text{im}(A) \rightarrow E$ est un opérateur linéaire continu. Cela étant, $L = A^{-1}P$ est un opérateur linéaire continu tel que $LA = A^{-1}PA = \text{id}_E$.

(3) \Rightarrow (2). Par hypothèse, $\ker(P)$ est un complément topologique de $\text{im}(P) = \ker(B)$. Cela étant, $B|_{\ker(P)}: \ker(P) \rightarrow G$ est une bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach. Il s'ensuit que $R = (B|_{\ker(P)})^{-1}: G \rightarrow \ker(P)$ est un opérateur linéaire continu tel que $BR = \text{id}_G$. ■

4.3 Théorème du graphe fermé

Proposition 4.3.1 *Si E et F sont des espaces normés, alors le graphe de tout $T \in L(E, F)$ est une partie fermée de $E \times F$.*

Preuve. De fait, si la suite (e_m, Te_m) du graphe de T converge vers (e, f) dans $E \times F$, la suite e_m de E converge vers e et la suite Te_m de F converge vers f . Pour conclure, il suffit alors de noter que la continuité de T implique $Te_m \rightarrow Te$ donc $Te = f$.

En voici une deuxième démonstration, plus sophistiquée certes, mais susceptible de généralisation: l'opérateur

$$S: E \times F \rightarrow F \quad (e, f) \mapsto Te - f$$

étant continu, son noyau

$$\ker(S) = S^{-1}(\{0\}) = \{(e, f) \in E \times F : Te - f = 0\} = \mathcal{G}(T)$$

est une partie fermée de $E \times F$. ■

Théorème 4.3.2 (graphe fermé) *Si E et F sont des espaces de Banach, tout opérateur linéaire à graphe fermé de E dans F est continu.*

Preuve. Soit T un opérateur linéaire à graphe fermé de E dans F . Son graphe \mathcal{G} est donc un espace de Banach. Comme

$$s_1: \mathcal{G} \rightarrow E \quad (e, Te) \mapsto e$$

est une bijection linéaire continue entre espaces de Banach, c'est un isomorphisme vu le théorème de l'opérateur ouvert. De plus,

$$s_2: \mathcal{G} \rightarrow F \quad (e, Te) \mapsto Te$$

est assurément un opérateur linéaire continu. Pour conclure, il suffit alors de constater que T coïncide avec l'opérateur linéaire continu $s_2 s_1^{-1}$. ■

Remarque. Les théorèmes de l'opérateur ouvert et du graphe fermé constituent un autre pilier de l'analyse fonctionnelle.

Proposition 4.3.3 *Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur l'espace vectoriel E telles que $(E, \|\cdot\|_1)' = (E, \|\cdot\|_2)'$ au sens algébrique, alors ces deux normes sont équivalentes.*

Preuve. La bijection linéaire canonique

$$I: (E, \|\cdot\|_1)' \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)'$$

entre espaces de Banach a bien sûr un graphe fermé donc est continue: il existe $C > 0$ tel que

$$\|e'\|_2 \leq C \|e'\|_1, \quad \forall e' \in (E, \|\cdot\|_1)'$$

donc tel que

$$\begin{aligned} \|e\|_2 &= \sup \{ |\langle e, e' \rangle| : e' \in (E, \|\cdot\|_1)', \|e'\|_2 = 1 \} \\ &\geq \sup \{ |\langle e, e' \rangle| : e' \in (E, \|\cdot\|_1)', \|e'\|_1 \leq 1/C \} \\ &= \frac{1}{C} \|e\|_1, \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Comme I a aussi un inverse continu, on conclut aussitôt. ■

4.4 Opérateurs linéaires compacts

Définitions. Soient E et F des espaces normés.

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est *précompact* si $Tb(1)$ est une partie précompacte de F . Vu le critère de précompacité, il revient au même de dire que, de toute suite bornée e_m de E , on peut extraire une sous-suite $e_{k(m)}$ dont l'image $Te_{k(m)}$ est une suite de Cauchy dans F . Bien sûr, tout opérateur linéaire précompact de E dans F est continu.

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est *compact* si $Tb(1)$ est une partie relativement compacte de F —c'est-à-dire que l'adhérence de $Tb(1)$ est un compact de F . Bien sûr, tout opérateur linéaire compact de E dans F est précompact, la réciproque ayant lieu si F est un espace de Banach.

Exemple. Si E et F sont des espaces normés, tout opérateur linéaire continu de rang fini de E dans F est compact. De fait, si T est un opérateur linéaire continu de rang fini de E dans F , alors $Tb(1)$ est un borné de $\text{im}(T)$ donc $(Tb(1))^-$ est un compact de $\text{im}(T)$ et par conséquent de F . \square

Exemple. Tout opérateur de Fredholm de première espèce est un opérateur linéaire compact. Nous avons en effet établi au paragraphe 2.4 que tout opérateur de Fredholm de première espèce est la limite dans $C_0([a, b])$ d'une suite d'opérateurs linéaires continus de rang fini. \square

Exemple. L'injection canonique de $C_1([a, b])$ dans $C_0([a, b])$ est un opérateur linéaire compact. En fait, l'espace $C_1([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{[a, b]} + \|\text{D}\cdot\|_{[a, b]}$, norme pour laquelle il est de Banach (à établir). Comme, vu le théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \|f\|_1 |x - y|, \quad \forall f \in C_1([a, b]), \forall x, y \in [a, b],$$

on obtient que $Tb(1)$ est une partie équicontinue de $C_0([a, b])$. Comme, en plus, $Tb(1)$ est aussi un borné de $C_0([a, b])$, c'est un précompact, vu le théorème d'Arzela-Ascoli. D'où la conclusion car, dans $C_0([a, b])$, tout précompact est relativement compact. (Adapter cette preuve pour établir l'exemple précédent.) \square

Définition. Si E et F sont des espaces normés, notons $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F et par $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble $\mathcal{K}(E, E)$.

Passons aux propriétés élémentaires des opérateurs linéaires compacts.

Proposition 4.4.1 Soient E, F et G des espaces normés.

- a) L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace linéaire de $L(E, F)$.
- b) i) Pour tout $T \in L(E, F)$ et tout $K \in \mathcal{K}(F, G)$, $KT \in \mathcal{K}(E, G)$.
- b) ii) Pour tout $K \in \mathcal{K}(E, F)$ et tout $T \in L(F, G)$, $TK \in \mathcal{K}(E, G)$.
- c) L'opérateur $\text{id}: E \rightarrow E$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.
- d) Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ admet un inverse linéaire continu, alors E est de dimension finie.
- e) Si l'image de $K \in \mathcal{K}(E, F)$ est fermée dans F , elle est de dimension finie.

Preuve. a) résulte aussitôt de ce que toute combinaison linéaire de compacts est compacte.

b) i) Il existe $r > 0$ tel que $Tb_E(1) \subset b_F(r)$ car T est linéaire continu. De là, $KTb_E(1) \subset rKb_F(1)$ est relativement compact.

b) ii) De fait $T(Kb_E(1))^-$ est compact comme image continue d'un compact.

c) est connu car $b_E(1)$ est précompact si et seulement si $\dim(E) < \infty$.

d) De fait, $T^{-1}T = \text{id}: E \rightarrow E$ est alors un opérateur linéaire compact.

e) Comme $\text{im}(K)$ est un espace de Banach, le théorème de l'opérateur ouvert affirme que la surjection linéaire continue $K: E \rightarrow \text{im}(K)$ est ouverte. Il s'ensuit que $Kb_E(< 1)$ est un ouvert relativement compact de $\text{im}(K)$: il existe donc $r > 0$ tel que $b_{\text{im}(K)}(r) \subset Kb_E(< 1)$, ce qui suffit. ■

Théorème 4.4.2 Si E est un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E, F)$.

En particulier, si E est de Banach, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal fermé de l'algèbre de Banach $L(E)$.

Preuve. Vu la proposition précédente, il suffit d'établir que, si la suite K_m de $\mathcal{K}(E, F)$ converge vers T dans $L(E, F)$, alors T est un opérateur linéaire compact de E dans F .

Soit e_m une suite de $b_E(1)$. Comme $K_1 \in \mathcal{K}(E, F)$, il en existe une sous-suite $e_{1(m)}$ telle que la suite $K_1 e_{1(m)}$ soit de Cauchy dans F . Par extractions successives, nous obtenons une suite de sous-suites $(e_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite de départ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, la suite $K_k e_{k(m)}$ soit de Cauchy dans F . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons $g_m = e_{m(m)}$; il est clair que g_m est une sous-suite de la suite de départ. Pour conclure, établissons que la suite Tg_m est de Cauchy dans F . De fait, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m_0 tel que $\|K_m - T\| \leq \varepsilon/3$ pour tout $m \geq m_0$, puis un entier M tel que $\|K_{m_0} g_r - K_{m_0} g_s\| \leq \varepsilon/3$ pour tous entiers $r, s \geq M$. Au total, pour tous $r, s \geq M$, il vient alors

$$\|Tg_r - Tg_s\| \leq \|(T - K_{m_0})g_r\| + \|K_{m_0}(g_r - g_s)\| + \|(K_{m_0} - T)g_s\| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

4.5 Théorie spectrale (introduction)

Définition. Soit E un espace normé. Le *spectre* $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T - \lambda \text{id}$ n'admette pas d'inverse linéaire continu.

En particulier, on a $\lambda \in \sigma(T)$ si l'une des conditions suivantes n'est pas satisfaite:

- (1) $T - \lambda \text{id}$ n'est pas injectif,
- (2) $T - \lambda \text{id}$ n'est pas surjectif.

Définitions. Soit E un espace normé.

Une *valeur propre* de $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T - \lambda \text{id}$ ne soit pas injectif; on a alors $\ker(T - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$. Tout élément non nul e de cet ensemble est appelé *vecteur propre* de T relatif à la valeur propre λ ; c'est donc un élément non nul e de E tel que $Te = \lambda e$.

Dans ce paragraphe, nous allons envisager quelques propriétés relatives à la surjectivité et à l'injectivité de $K - \lambda \text{id}$ pour $K \in \mathcal{K}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque. Pour aller plus loin dans cette recherche et atteindre ce qui est appelé la *théorie spectrale des opérateurs linéaires compacts*, nous devons sortir du cadre des seuls espaces normés. Ce sera fait au chapitre suivant avec l'introduction des espaces linéaires à semi-normes et en particulier au moyen du dual simple d'un espace normé.

Voici d'abord une propriété facile de $\sigma(K)$.

Théorème 4.5.1 *Si E est un espace de Banach de dimension infinie, alors on a $0 \in \sigma(K)$ pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$.*

Preuve. De fait, $0 \notin \sigma(K)$ entraîne que K a un inverse linéaire continu, ce qui impose $\dim(E) < \infty$. ■

Voici ensuite deux propriétés importantes du noyau et de l'image de $K - \lambda \text{id}$.

Théorème 4.5.2 *Si E est un espace de Banach et si $K \in \mathcal{K}(E)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul, $\ker(K - \lambda \text{id})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .*

Preuve. Posons $F = \ker(K - \lambda \text{id})$; F est alors un espace de Banach tel que $Kf = \lambda f$ pour tout $f \in F$. Il s'ensuit que $T|_F = \lambda \text{id}|_F$ est un opérateur linéaire compact de F dans lui-même, ce qui suffit. ■

Théorème 4.5.3 *Si E est un espace de Banach et si $K \in \mathcal{K}(E)$, alors, pour tout scalaire non nul λ , $\text{im}(K - \lambda \text{id})$ est un sous-espace vectoriel fermé de E donc est un espace de Banach.*

Preuve. Comme $\ker(K - \lambda \text{id})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il admet un complément topologique L dans E . Cela étant, L est un espace de Banach et $(K - \lambda \text{id})|_L: L \rightarrow \text{im}(K - \lambda \text{id})$ une bijection linéaire continue.

Pour conclure, il suffit alors de prouver que $(K - \lambda \text{id})|_L$ est aussi ouvert car il s'agit alors d'un isomorphisme entre un espace de Banach et $\text{im}(K - \lambda \text{id})$. Pour conclure, il suffit donc de prouver l'existence de $C > 0$ tel que $\|l\| \leq C \|(K - \lambda \text{id})l\|$ pour tout $l \in L$. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite l_m de L telle que $\|l_m\| = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $(K - \lambda \text{id})l_m \rightarrow 0$. Quitte à recourir à une sous-suite de l_m , nous pouvons supposer la suite Kl_m convergente, soit $Kl_m \rightarrow e_0$. Cela étant, d'une part, il vient

$$\lambda l_m = (\lambda \text{id} - K)l_m + Kl_m \rightarrow e_0 \text{ dans } E$$

et ainsi e_0 appartient à L et vérifie $\|e_0\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\lambda l_m\| = |\lambda|$. D'autre part, on doit aussi avoir $(K - \lambda \text{id})e_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} (K - \lambda \text{id})(\lambda l_m) = 0$, c'est-à-dire $e_0 = 0$ car $K - \lambda \text{id}$ est injectif sur L . D'où une contradiction. ■

Voici enfin quelques propriétés plus spécifiques des valeurs propres.

Théorème 4.5.4 *Si E est un espace de Banach et si $K \in \mathcal{K}(E)$, alors*

- a) *pour toute valeur propre λ de K , on a $|\lambda| \leq \|K\|$,*
- b) *pour toute valeur propre non nulle λ de K , on a $\text{im}(K - \lambda \text{id}) \neq E$,*
- c) *l'ensemble des valeurs propres de K est soit fini, soit égal à l'ensemble des éléments d'une suite de \mathbb{K} convergente vers 0.*

Preuve. a) De fait, si e est un vecteur propre de la valeur propre λ , on a $e \neq 0$ et $Ke = \lambda e$, donc

$$|\lambda| \|e\| = \|\lambda e\| = \|Ke\| \leq \|K\| \|e\|.$$

b) Supposons $K - \lambda \text{id}$ surjectif.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons $L_m = \ker((K - \lambda \text{id})^m)$. Il est clair que L_m est une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés de E . On a bien davantage: établissons que cette suite est strictement croissante. De fait, comme $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est une valeur propre, K admet un vecteur propre e_1 relatif à la valeur propre λ : on a donc $0 \neq e_1 \in L_1$ et $Ke_1 = \lambda e_1$. Comme $K - \lambda \text{id}$ est surjectif, pour tout entier $m \geq 2$, il existe alors $e_m \in L_m$ tel que $(K - \lambda \text{id})^{m-1}e_m = e_1 \neq 0$. Nous nous trouvons donc dans la situation suivante:

- i) L_m est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels fermés de E ,

- ii) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $KL_m \subset L_m$ car, les opérateurs K et id étant commutatifs, il vient $(K - \lambda \text{id})^m KL_m = K(K - \lambda \text{id})^m L_m = \{0\}$,
 iii) pour tout $m \geq 2$, on a $(K - \lambda \text{id})L_m \subset L_{m-1}$.

Vu le lemme de Riesz, il existe alors une suite l_m telle que $l_m \in L_m$, $\|l_m\| = 1$ et $d(l_m, L_{m-1}) \geq 1/2$ pour tout entier $m \geq 2$. Dès lors, la suite l_m est bornée et cependant, pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ tels que $2 \leq r < s$, il vient

$$\|Ke_s - Ke_r\| = \|\lambda e_s + (K - \lambda \text{id})e_s - Ke_r\| \geq 1/2$$

car $(K - \lambda \text{id})e_s - Ke_r$ appartient assurément à L_{s-1} . D'où une contradiction avec le fait que, de l'image d'une suite bornée par un opérateur linéaire précompact, on peut extraire une sous-suite de Cauchy.

c) Si c) est faux, il existe $r > 0$ tel que

$$\{ \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \geq r, \lambda = \text{valeur propre de } K \}$$

ne soit pas fini donc contient une suite λ_m d'éléments distincts deux à deux. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit e_m un vecteur propre de K relatif à la valeur propre λ_m et posons $L_m = \text{span}(\{e_1, \dots, e_m\})$. Cela étant, remarquons que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tous $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$, nous avons

$$(K - \lambda_m \text{id})(c_1 e_1 + \dots + c_m e_m) = c_1(\lambda_1 - \lambda_m)e_1 + \dots + c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)e_{m-1}.$$

On en déduit directement les trois propriétés suivantes:

- i) L_m est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de dimension finie donc fermés de E ,
 ii) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $KL_m \subset L_m$,
 iii) pour tout $m \geq 2$, on a $(K - \lambda_m \text{id})L_m \subset L_{m-1}$.

On conclut alors comme en b) ci-dessus. ■

Remarque. La théorie spectrale des opérateurs linéaires compacts d'un espace de Banach dans lui-même est bien plus riche que ce qui précède. Cependant, pour obtenir des premières propriétés plus fines, nous allons devoir sortir du cadre des espaces normés et utiliser des propriétés du dual topologique simple E'_s d'un espace normé E — c'est-à-dire E' muni de la topologie simple $\sigma(E', E)$. □

Chapitre 5

Dual topologique

5.1 Espaces topologiques

Il y a trois manières d'introduire la notion d'espace topologique: la première (par les ouverts) est préférée par les topologistes, la troisième (par les voisinages) par les analystes.

Définition. Un *espace topologique* est la donnée d'un ensemble T non vide et d'une famille \mathcal{O} de parties de T qui satisfait aux trois propriétés suivantes:

(\mathcal{O}_1) $\emptyset, T \in \mathcal{O}$,

(\mathcal{O}_2) $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire que \mathcal{O} est stable pour les intersections finies,

(\mathcal{O}_3) $\{\Omega_j : j \in J\} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \cup_{j \in J} \Omega_j \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire que \mathcal{O} est stable pour les unions.

Il est noté (T, \mathcal{O}) ou même tout simplement T si aucune confusion sur \mathcal{O} n'est possible. Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les *ouverts* de l'espace topologique T .

Définition. Une partie F de l'espace topologique (T, \mathcal{O}) est *fermée* si $T \setminus F$ est ouvert.

Etant donné un espace topologique (T, \mathcal{O}) , la donnée des familles \mathcal{O} ou $\mathcal{F} = \{T \setminus \Omega : \Omega \in \mathcal{O}\}$ de parties de T revient évidemment au même.

Cela étant, un espace topologique peut aussi être défini comme étant la donnée d'un ensemble non vide T et d'une famille \mathcal{F} de parties de T qui satisfait aux trois propriétés suivantes:

(\mathcal{F}_1) $\emptyset, T \in \mathcal{F}$,

(\mathcal{F}_2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire que \mathcal{F} est stable pour les unions finies,

(\mathcal{F}_3) $\{F_j : j \in J\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{j \in J} F_j \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire que \mathcal{F} est stable pour les intersections.

Il suffit d'appeler *fermés* les éléments de \mathcal{F} et de qualifier d'*ouverts* les ensembles $T \setminus F$ avec $F \in \mathcal{F}$.

Définition. Une partie V de l'espace topologique (T, \mathcal{O}) est un *voisinage* de $t \in T$ s'il existe un ouvert Ω tel que $t \in \Omega \subset V$.

Cela étant, l'ensemble $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de $t \in T$ satisfait aux cinq conditions suivantes:

(\mathcal{V}_1) pour tout $t \in T$, $\mathcal{V}(t) \neq \emptyset$,

(\mathcal{V}_2) $t \in V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(t)$,

(\mathcal{V}_3) $V \in \mathcal{V}(t)$, $V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(t)$,

(\mathcal{V}_4) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(t) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(t)$,

(\mathcal{V}_5) $V \in \mathcal{V}(t) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}(t)$ tel que, pour tout $w \in W$, on a $V \in \mathcal{V}(w)$.

Inversement, si \mathcal{V} est une application de l'ensemble non vide T dans l'ensemble des parties de $\wp(T)$ telle que, pour tout $t \in T$, $\mathcal{V}(t)$ satisfait aux conditions (\mathcal{V}_1) à (\mathcal{V}_5) , alors l'ensemble

$$\mathcal{O}' = \{ \Omega' \subset T : \forall t \in \Omega', \Omega' \in \mathcal{V}(t) \}$$

définit un espace topologique (T, \mathcal{O}') pour lequel $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que Ω' vérifie les conditions:

(\mathcal{O}'_1) : c'est trivial,

(\mathcal{O}'_2) : de fait, pour tout $t \in \Omega'_1 \cap \Omega'_2$, on a $\Omega'_1, \Omega'_2 \in \mathcal{V}(t)$ donc $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 \in \mathcal{V}(t)$.

(\mathcal{O}'_3) : c'est trivial.

Remarquons ensuite que, pour tout $t \in T$, on a $\mathcal{V}'(t) \subset \mathcal{V}(t)$. De fait, si $V' \in \mathcal{V}'(t)$, il existe $\Omega' \in \mathcal{O}'$ tel que $t \in \Omega' \subset V'$ donc tel que $\Omega' \in \mathcal{V}(t)$ et par conséquent $V' \in \mathcal{V}(t)$.

Établissons enfin que, pour tout $t \in T$, on a $\mathcal{V}(t) \subset \mathcal{V}'(t)$. Soit $V \in \mathcal{V}(t)$. Considérons

$$U = \{ s \in T : V \in \mathcal{V}(s) \}.$$

Comme on a bien sûr $t \in U \subset V$, il suffit pour conclure de prouver que $U \in \mathcal{O}'$. Or, pour tout $s \in U$, on a $V \in \mathcal{V}(s)$. Dès lors, vu (\mathcal{V}_5) , il existe $W \in \mathcal{V}(s)$ tel que $V \in \mathcal{V}(r)$ pour tout $r \in W$. En particulier, on a donc $W \subset U$, ce qui implique $U \in \mathcal{V}(s)$. ■

Cela étant, il y a donc trois manières équivalentes d'introduire la notion d'espace topologique: par les ouverts, par les fermés ou par les voisinages.

Définition. Bien souvent, lors de l'étude d'un espace topologique, on ne souhaite pas privilégier une manière (par les ouverts, par les fermés, par les voisinages) de le définir: on dit alors que l'espace T est muni d'une topologie τ , on écrit (T, τ) ou même T si aucune confusion sur τ n'est possible et on parle des ouverts, des fermés et des voisinages de (T, τ) .

Définitions. Si A est une partie de l'espace topologique (T, τ) ,

- a) $t \in T$ est un *point intérieur* de A si A est un voisinage de t ,
- b) l'*intérieur* de A , noté A° , est l'ensemble des points intérieurs de A . C'est le plus grand ouvert inclus dans A ,
- c) $t \in T$ est un *point adhérent* à A si tout voisinage de t est d'intersection non vide avec A ,
- d) l'*adhérence* de A , notée A^- , est l'ensemble des points adhérents à A . C'est le plus petit fermé contenant A ,
- e) $t \in T$ est un *point frontière* de A si tout voisinage de t est d'intersection non vide avec A et avec $T \setminus A$,
- f) la *frontière* de A , notée A^\bullet , est l'ensemble des points frontière de A . On a donc $A^\bullet = A^- \cap (T \setminus A)^-$ et A^\bullet est un fermé.

La notion d'espace topologique est parfaitement adaptée à l'introduction de la continuité des applications.

Définition. Soient T, S deux espaces topologiques.

Une application $f: T \rightarrow S$ est

- a) *continue en* $t_0 \in T$ si, pour tout voisinage V de $f(t_0)$, il existe un voisinage U de t_0 tel que $f(U) \subset V$,
- b) *continue* si elle est continue en tout point de T .

Théorème 5.1.1 Soient T, R, S des espaces topologiques et des applications $f: T \rightarrow S$ et $g: S \rightarrow R$.

a) L'application f est continue si et seulement si l'image inverse par f de tout ouvert de S est un ouvert de T , donc si et seulement si l'image inverse par f de tout fermé de S est un fermé de T .

b) Si f est continu, alors on a $f(A^-) \subset (f(A))^-$ pour tout $A \subset T$.

c) Si f et g sont continus, alors $g \circ f: T \rightarrow R$ est continu. ■

Définition. Si (T, τ_1) et (T, τ_2) sont deux espaces topologiques, on dit que la topologie de (T, τ_1) est *moins fine* que celle de (T, τ_2) — ou que la topologie de (T, τ_2) est *plus fine* que celle de (T, τ_1) — si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. Cela a donc lieu si et seulement si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, ou encore si et seulement si, pour tout $t \in T$, on a $\mathcal{V}_1(t) \subset \mathcal{V}_2(t)$ donc si et seulement si $\text{id}: (T, \tau_2) \rightarrow (T, \tau_1)$ est une application continue.

5.2 Parties compactes

Définition. Une partie K d'un espace topologique T est *compacte* si, de tout recouvrement ouvert de K , on peut extraire un recouvrement fini.

Théorème 5.2.1 a) *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

b) *Toute union finie de compacts est compacte.*

c) *Toute image continue d'un compact est compacte. ■*

Définition. Un espace topologique T est *séparé* si deux points distincts de T admettent des voisinages disjoints. (Cette propriété est toujours satisfaite dans les espaces métriques mais pas nécessairement dans les espaces topologiques. Donner un exemple.)

Théorème 5.2.2 *Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

Preuve. Si t_1 et t_2 sont des points distincts d'un espace topologique séparé T , remarquons que t_1 a un voisinage fermé ne contenant pas t_2 .

Cela étant, soit K un compact de l'espace topologique séparé T . Si K n'est pas fermé, il existe $t_0 \in K^- \setminus K$. Dès lors,

$$\{ T \setminus V : V = \text{voisinage fermé de } t_0 \}$$

est un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un recouvrement fini: il existe alors des voisinages fermés V_1, \dots, V_J de t_0 , en nombre fini et tels que $K \subset T \setminus (V_1 \cap \dots \cap V_J)$, ce qui est absurde. ■

Théorème 5.2.3 *Si K et H sont des espaces topologiques compacts et si H est séparé, alors toute bijection continue de K dans H a une inverse continue.*

Preuve. De fait, si f est la bijection, l'image par f de tout fermé de K est un compact donc un fermé de H . ■

5.3 Filtres

Remarque. La notion de convergence des suites n'est guère adaptée aux espaces topologiques non métrisables, c'est-à-dire dont la topologie ne peut être associée à une métrique. Il faut généraliser la notion de convergence par exemple au moyen de la notion de filtre. □

Définitions. Soit A un ensemble non vide. Un *filtre sur A* est un ensemble non vide \mathcal{F} de parties de A tel que

$$(\mathcal{F}1) \quad \emptyset \notin \mathcal{F},$$

$$(\mathcal{F}2) \quad A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F},$$

$$(\mathcal{F}3) \quad A_1 \in \mathcal{F}, A_1 \subset A_2 \subset A \Rightarrow A_2 \in \mathcal{F}.$$

On vérifie de suite qu'un ensemble \mathcal{B} de parties non vides de A est tel que

$$\mathcal{F} = \{ B \subset A : \exists B_0 \in \mathcal{B} \text{ tel que } B_0 \subset B \}$$

est un filtre sur A si et seulement si, pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset B_1 \cap B_2$. On dit alors que \mathcal{F} est le *filtre engendré par \mathcal{B}* et que \mathcal{B} est *base du filtre \mathcal{F}* .

Si u est une application de A dans l'ensemble B et si \mathcal{F} est un filtre sur A , on vérifie de suite que $\{ uF : F \in \mathcal{F} \}$ est une base de filtre sur B dont le filtre engendré est appelé *filtre image de \mathcal{F} par u* et noté $u\mathcal{F}$.

Etant donné deux filtres \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sur A , on dit que \mathcal{F}_1 est *plus fin que \mathcal{F}_2* (ou que \mathcal{F}_2 est *moins fin que \mathcal{F}_1*) si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Passons à quelques exemples élémentaires.

Exemples. L'exemple le plus simple mais aussi le plus trivial de filtre sur un ensemble non vide A est l'ensemble des parties de A qui contiennent une partie non vide B de A .

Voici deux exemples supplémentaires nettement plus intéressants.

Si $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de l'ensemble non vide A , on vérifie aisément que l'ensemble des parties de A qui contiennent une queue de cette suite est un filtre sur A , appelé *filtre associé à la suite $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$* .

Soit (T, τ) un espace topologique. Pour tout $t \in T$, l'ensemble $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de t dans (T, τ) est évidemment un filtre sur T , appelé *filtre des voisinages de t* .

Définitions. Soit (T, τ) un espace topologique.

Un filtre \mathcal{F} sur (T, τ) *converge vers $t \in T$* si \mathcal{F} est plus fin que le filtre $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de t , c'est-à-dire si, pour tout $V \in \mathcal{V}(t)$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset V$. On dit alors que t est *limite du filtre \mathcal{F}* . Remarquons de suite que

a) *si un filtre converge dans un espace topologique séparé, sa limite est unique.*

b) *une suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de T converge vers $t \in T$ si et seulement si le filtre associé à cette suite converge vers t .*

Un *point d'adhérence au filtre \mathcal{F}* sur T est un point de T qui appartient à l'adhérence de chacun des éléments de \mathcal{F} . Il suffit évidemment pour cela que ce point appartienne à l'adhérence de chacun des éléments d'une base de \mathcal{F} .

Remarques. Soit \mathcal{F} un filtre sur l'espace topologique (T, τ) .

a) Si \mathcal{F} converge vers $t \in T$, alors t est bien sûr point d'adhérence de \mathcal{F} .

b) Le point $t \in T$ est d'adhérence à \mathcal{F} si et seulement s'il existe un filtre \mathcal{F}_0 sur T à la fois plus fin que \mathcal{F} et que le filtre $\mathcal{V}(t)$ des voisinages de t . \square

Passons à l'étude des liens entre les notions de compact et de filtre.

Théorème 5.3.1 *Un espace topologique séparé (T, τ) est compact si et seulement si tout filtre sur T a un point d'adhérence.*

En particulier, toute suite d'un compact a un point d'accumulation.

Preuve. La condition est nécessaire. Soit \mathcal{F} un filtre sur l'espace compact séparé (T, τ) . L'ensemble $\{A^- : A \in \mathcal{F}\}$ a alors la propriété d'intersection finie; on a donc $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A^- \neq \emptyset$ et tout point de cette intersection convient.

La condition est suffisante. Si l'espace topologique séparé (T, τ) n'est pas compact, c'est qu'il existe un ensemble \mathcal{A} de fermés de T ayant la propriété d'intersection finie et tel que $\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \emptyset$. Cela étant, la famille \mathcal{B} des intersections finies d'éléments de \mathcal{A} est base d'un filtre \mathcal{F} sur T qui n'a évidemment pas de point d'adhérence. \blacksquare

Définition. Un *ultrafiltre* sur un ensemble non vide A est un filtre sur A qui est égal à tout filtre sur A , plus fin que lui.

Une application directe du lemme de Zorn assure que tout filtre sur un ensemble non vide est inclus dans un ultrafiltre sur cet ensemble.

Proposition 5.3.2 *Si \mathcal{F} est un ultrafiltre sur l'ensemble non vide A , alors, pour toute partie B de A , on a $B \in \mathcal{F}$ ou $A \setminus B \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Si on a $B \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\{B \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ est base d'un filtre plus fin que \mathcal{F} donc égal à \mathcal{F} et B appartient à \mathcal{F} .

Si cette condition n'a pas lieu, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $B \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire tel que $A \setminus B \supset F$ et alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$. \blacksquare

Proposition 5.3.3 *Si un ultrafiltre sur un espace topologique a un point d'adhérence, il converge vers ce point.* \blacksquare

Théorème 5.3.4 *Un espace topologique séparé est compact si et seulement si tout ultrafiltre y converge.* \blacksquare

5.4 Théorème de Tychonoff

Définition. Soient (T_1, τ_1) et (T_2, τ_2) deux espaces topologiques.

On vérifie de suite que l'application \mathcal{V} qui, à tout $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$, associe l'ensemble des parties de $T_1 \times T_2$ qui contiennent un ensemble du type $V_1 \times V_2$ avec $V_1 \in \mathcal{V}_1(t_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}_2(t_2)$ définit une topologie τ sur $T_1 \times T_2$.

On vérifie directement qu'une partie de $T_1 \times T_2$ est ouverte pour cette topologie si et seulement si elle est réunion d'ensembles du type $\Omega_1 \times \Omega_2$ avec $\Omega_1 \in \mathcal{O}_1$ et $\Omega_2 \in \mathcal{O}_2$.

On dit que (T, τ) est le *produit topologique* des espaces topologiques (T_1, τ_1) et (T_2, τ_2) .

Cette définition sert de tremplin pour la notion générale de produit d'espaces topologiques.

Définition. Soient J un ensemble non vide et, pour tout $j \in J$, (T_j, τ_j) un espace topologique. Pour tout $t = (t_j)_{j \in J}$ élément de $T = \prod_{j \in J} T_j$, on vérifie directement que l'ensemble $\mathcal{V}(t)$ des parties de T qui contiennent un ensemble du type

$$\left(\prod_{j \in J'} V_j \right) \times \left(\prod_{j \in J \setminus J'} T_j \right)$$

où J' est une partie finie de J et où $V_j \in \mathcal{V}_{\tau_j}(t_j)$ pour tout $j \in J'$, munit T d'une topologie τ par les voisinages; (T, τ) est alors appelé *espace produit topologique* des (T_j, τ_j) pour $j \in J$.

Il est clair que *cet espace est séparé si et seulement si chacun des espaces (T_j, τ_j) est séparé.*

Théorème 5.4.1 (Tychonoff) *Tout produit de compacts séparés est un compact séparé.*

Preuve. Soit \mathcal{F} un ultrafiltre sur l'espace $(T, \tau) = \prod_{j \in J} (T_j, \tau_j)$.

Pour tout $j \in J$, $\{\pi_j(F) : F \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre sur (T_j, τ_j) et même d'un ultrafiltre \mathcal{F}_j qui converge; soit t_j sa limite. Comme t_j est un point adhérent à $\pi_j(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, on obtient que, pour tout voisinage V_j de t_j dans (T_j, τ_j) , $\pi_j^{-1}(V_j) \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ donc que $\pi_j^{-1}(V_j) \in \mathcal{F}$. La conclusion s'ensuit aussitôt. ■

5.5 Espaces vectoriels topologiques

Définition. Un *espace vectoriel topologique* est un espace linéaire E muni d'une topologie τ pour laquelle les applications

$$\begin{aligned} + : (E, \tau) \times (E, \tau) &\rightarrow (E, \tau) & (e, f) &\mapsto e + f \\ \cdot : \mathbb{K} \times (E, \tau) &\rightarrow (E, \tau) & (c, e) &\mapsto ce \end{aligned}$$

sont continues. Explicitement, il revient au même de dire que les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- (1) pour tous $e, f \in E$ et tout voisinage U de $e + f$, il existe des voisinages V de e et W de f tels que $V + W \subset U$,
- (2) pour tous $c_0 \in \mathbb{K}$, $e_0 \in E$ et voisinage U de $c_0 e_0$, il existe $r > 0$ et un voisinage V de e_0 tels que $\{ce : c \in \mathbb{K}, |c - c_0| \leq r, e \in V\} \subset U$.

Théorème 5.5.1 *Dans un espace vectoriel topologique, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que $V + V \subset U$.*

Preuve. Comme $0 + 0 = 0$, il existe en effet des voisinages V_1 et V_2 de 0 tels que $V_1 + V_2 \subset U$; dès lors $V = V_1 \cap V_2$ convient. ■

Théorème 5.5.2 *Dans un espace vectoriel topologique (E, τ) , pour tout voisinage U de 0 et tout élément non nul e , il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $e/m \in U$. En particulier, on a $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} mU$.*

Preuve. Pour tout élément e de E , on a $0.e = 0$. Il existe donc $r > 0$ et un voisinage V de e tels que

$$\{cf : c \in \mathbb{K}, |c| \leq r, f \in V\} \subset U.$$

Ceci implique l'existence de $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $e/m \in U$, ce qui suffit. ■

Théorème 5.5.3 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique, alors, pour tous $e_0 \in E$ et $c_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'application*

$$u : (E, \tau) \rightarrow (E, \tau) \quad e \mapsto c_0 e + e_0$$

est un homéomorphisme.

Preuve. On vérifie de suite que cette application est injective, surjective et d'inverse donné par

$$v : (E, \tau) \rightarrow (E, \tau) \quad e \mapsto \frac{1}{c_0} e - \frac{e_0}{c_0},$$

c'est-à-dire par une application du même type.

Pour conclure, il suffit alors de prouver qu'une telle application est continue. C'est direct: pour tout voisinage U de $c_0e + e_0$, il existe des voisinages V' de c_0e et W de e_0 tels que $V' + W \subset U$ puis $r > 0$ et un voisinage V de e tels que $\{cf : |c - c_0| \leq r, f \in V\} \subset V'$. Au total, pour tout $f \in V$, on a $u(f) = c_0f + e_0 \in V' + W \subset U$. ■

Corollaire 5.5.4 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique,*

- (a) *une partie U de E est un voisinage de $e \in E$ si et seulement si $U - e$ est un voisinage de 0 ,*
- (b) *pour tout $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et tout voisinage U de 0 , cU est un voisinage de 0 .* ■

Remarque. Sur le plan théorique, ce corollaire est fort important: dans un espace vectoriel topologique,

- (a) signale que les voisinages de $e \in E$ s'obtiennent en translatant de e les voisinages de 0 . La connaissance de $\mathcal{V}(0)$ détermine donc la topologie de (E, τ) .
- (b) signale que tout homothétique d'un voisinage de 0 est aussi un voisinage de 0 . □

Voici un renseignement supplémentaire sur les voisinages de 0 .

Définition. Une partie A d'un espace linéaire est *équilibrée* si elle est non vide et telle que $A = \{ce : c \in \mathbb{K}, |c| \leq 1, e \in A\}$.

Théorème 5.5.5 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique, tout voisinage de 0 contient un voisinage de 0 équilibré et fermé.*

Preuve. Si U est un voisinage de $0 = 0 \cdot 0$, alors il existe $r > 0$ et un voisinage V de 0 tels que

$$W = \{ce : c \in \mathbb{K}, |c| \leq r, e \in V\} \subset U$$

or W est équilibré et contient rV , donc est un voisinage de 0 .

Cela étant, pour tout voisinage U de 0 , il existe un voisinage équilibré V de 0 tel que $V + V \subset U$. On a alors $V^- \subset U$ car, pour tout $e \in V^-$, on a $(e + V) \cap V \neq \emptyset$ et il existe donc $f, g \in V$ tel que $e + f = g$ donc tels que $e = g - f \in U$. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que V^- est équilibré, ce qui est direct. ■

Remarque. Au total, la topologie d'un espace vectoriel topologique est donc connue dès que les voisinages équilibrés et fermés de 0 sont connus. □

Arrêtons ici l'étude générale des espaces vectoriels topologiques pour en introduire une famille particulièrement importante pour les applications.

5.6 Espaces localement convexes séparés ou vectoriels à semi-normes

Définition. Un *espace localement convexe* est un espace vectoriel topologique (E, τ) dont tout élément admet une base de voisinages constituée d'ensembles convexes; on dit alors que τ est une *topologie localement convexe*.

Théorème 5.6.1 *Si (E, τ) est un espace vectoriel topologique, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) (E, τ) est un espace localement convexe,
- (b) 0 a une base de voisinages convexes,
- (c) 0 a une base de voisinages absolument convexes.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) et (c) \Rightarrow (b) sont triviaux.

(b) \Rightarrow (a) car tout translaté d'une partie convexe est convexe.

(b) \Rightarrow (c) De fait, pour tout voisinage U de 0, il existe d'une part un voisinage convexe V de 0 inclus dans U et d'autre part un voisinage équilibré W de 0 inclus dans V . Dans ces conditions, on a $W \subset \text{co}(W) \subset V \subset U$ et, pour conclure, il suffit de vérifier que $\text{co}(W)$ est absolument convexe or, avec des notations claires par elles-mêmes,

$$\begin{aligned} & c \sum_{j=1}^J r_j e_j + d \sum_{k=1}^K s_k f_k \\ &= \sum_{j=1}^J |c| r_j \left(\frac{c}{|c|} e_j \right) + \sum_{k=1}^K |d| s_k \left(\frac{d}{|d|} f_k \right) + (1 - |c| - |d|) \cdot 0 \in \text{co}(W). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 5.6.2 *Si U est un voisinage absolument convexe de 0 dans l'espace localement convexe (E, τ) , alors p_U est une semi-norme continue sur E telle que*

$$U^\circ = b_{p_U}(< 1) \subset U \subset b_{p_U}(1) = U^-.$$

Preuve. Comme $E = \cup_{m=1}^{\infty} mU$, p_U est une semi-norme sur E . Il s'agit bien d'une semi-norme continue sur (E, τ) car, pour tous $e_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$e \in e_0 + \varepsilon U \Rightarrow |p_U(e) - p_U(e_0)| \leq p_U(e - e_0) \leq \varepsilon.$$

Il est alors clair que $b_{p_U}(< 1)$ est un ouvert inclus dans U donc dans U° . De plus, pour tout $e \in U^\circ$, il existe un voisinage V de 0 tel que $e + V \subset U$ donc $m \in \mathbb{N}_0$ tel

5.6. Espaces localement convexes séparés ou vectoriels à semi-normes 105

que $(1 + 1/m)e \in U$, ce qui implique $p_U(e) \leq m/(m+1) < 1$. Au total, nous avons $b_{p_U}(< 1) = U^\circ$.

De même, il est clair que $b_{p_U}(1)$ est un fermé contenant U donc U^- . De plus, pour tout $e \in b_{p_U}(1)$ et tout voisinage V de 0, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $-e/m \in V$. On a alors $(1 - 1/m)e \in b_{p_U}(< 1) \subset U$, ce qui implique $(e + V) \cap U \neq \emptyset$. Au total, nous avons $b_{p_U}(1) = U^-$. ■

Remarque. Inversement, soit (E, τ) un espace localement convexe. Pour toute semi-norme continue p sur (E, τ) et tout $r > 0$, les semi-boules $b_p(< r)$ et $b_p(r)$ sont des voisinages absolument convexes de 0, respectivement ouvert et fermé. Cela étant, $U \subset E$ est un voisinage de e si et seulement s'il existe une semi-norme continue p sur (E, τ) et $r > 0$ tels que $b_p(e; r) \subset U$.

Ceci nous amène tout naturellement à considérer les espaces vectoriels munis d'un ensemble de semi-normes. □

Définitions. Si P et Q sont des ensembles de semi-normes sur l'espace vectoriel E , alors

a) P est *plus fort que* Q sur E — on dit aussi que Q est *plus faible que* P — si, pour tout $q \in Q$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_J \in P$ et $C > 0$ tels que

$$q \leq C \sup\{p_1, \dots, p_J\} \text{ sur } E;$$

on écrit $P \geq Q$ ou $Q \leq P$,

b) P est *équivalent* à Q s'il est plus fort et plus faible que Q ; on écrit $P \simeq Q$,

c) P est *filtrant* si, pour tous $p_1, p_2 \in P$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $\sup\{p_1, p_2\} \leq Cp$,

d) P est *séparant* si 0 est le seul élément de E tel que $p(e) = 0$ pour tout $p \in P$,

e) P est un *système de semi-normes* sur E s'il est filtrant et séparant.

Il est clair que tout ensemble P de semi-normes sur un espace vectoriel E est équivalent à un ensemble filtrant Q de semi-normes sur E : il suffit par exemple de prendre

$$Q = \{ \sup\{p_1, \dots, p_J\} : J \in \mathbb{N}_0; p_1, \dots, p_J \in P \}.$$

De plus, dans ce cas, P est séparant si et seulement si Q l'est.

Théorème 5.6.3 Soit P un ensemble de semi-normes sur l'espace linéaire E . Pour tout $e \in E$, désignons par $\mathcal{V}(e)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent un ensemble du type $\bigcap_{j=1}^J b_{p_j}(e; < r_j)$ avec $J \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_J \in P$ et $r_1, \dots, r_J > 0$.

Alors \mathcal{V} définit une topologie localement convexe τ_P sur E (par les voisinages), cette topologie τ_P étant séparée si et seulement si P est séparant.

Preuve. Il est clair que \mathcal{V} définit une topologie sur E .

Que cette topologie τ_P soit vectorielle résulte aussitôt de ce que, avec des notations claires par elles-mêmes, on a

$$p(e_0 + f_0 - e - f) \leq p(e_0 - e) + p(f_0 - f)$$

et

$$p(c_0 e_0 - ce) \leq |c_0| p(e_0 - e) + |c_0 - c| p(e_0 - e) + |c_0 - c| p(e_0).$$

Enfin cette topologie τ_P est localement convexe puisque pour tous $e \in E$, $p \in P$ et $r > 0$, $b_p(e; < r)$ est un ensemble convexe.

L'affirmation relative à la séparation est immédiate. ■

Remarque. Dans l'énoncé précédent, la définition des éléments de $\mathcal{V}(e)$ est assez lourde; le résultat suivant permet de pallier ce handicap: il permet de remplacer l'ensemble de semi-normes P par un ensemble filtrant de semi-normes Q équivalent à P . Cela étant, il suffit de remarquer que si P est filtrant, alors une partie du type $\bigcap_{j=1}^J b_{p_j}(e; < r_j)$ avec $J \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_J \in P$ et $r_1, \dots, r_J > 0$ contient toujours une semi-boule du type $b_p(e; < r)$ avec $p \in P$. □

Théorème 5.6.4 *Si P et Q sont des ensembles de semi-normes sur l'espace vectoriel E , alors*

- a) τ_P est plus fin que τ_Q si et seulement si P est plus fort que Q ,
- ii) τ_P est équivalent à τ_Q si et seulement si P est équivalent à Q .

Preuve. Cela découle aussitôt du résultat comparant semi-boules et semi-normes. ■

Notation. Si (E, τ) est un espace localement convexe, $\text{cs}(E, \tau)$ désigne l'ensemble des semi-normes continues sur (E, τ) .

Théorème 5.6.5 *Si P est un ensemble de semi-normes sur l'espace vectoriel E , alors l'espace localement convexe (E, τ_P) est tel que $\text{cs}(E, \tau_P) \simeq P$. ■*

Théorème 5.6.6 *Si (E, τ) est un espace localement convexe, $\text{cs}(E, \tau)$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur E tel que $\tau_{\text{cs}(E, \tau)} = \tau$.*

De plus, l'espace (E, τ) est séparé si et seulement si $\text{cs}(E, \tau)$ est séparant.

Preuve. Si $p_1, p_2 \in \text{cs}(E, \tau)$, alors $U = b_{p_1}(< 1) \cap b_{p_2}(< 1)$ est un voisinage absolument convexe et ouvert de 0 dans (E, τ) . Dès lors, p_U appartient à $\text{cs}(E, \tau)$ et donne lieu à

$$p_U(e) < 1 \Rightarrow (p_1(e) < 1 \text{ et } p_2(e) < 1)$$

donc est tel que $\sup\{p_1, p_2\} \leq p_U$. Cela étant, $\text{cs}(E, \tau)$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur E . La vérification de $\tau_{\text{cs}(E, \tau)} = \tau$ est directe.

Enfin la propriété relative à la séparation est connue. ■

5.6. Espaces localement convexes séparés ou vectoriels à semi-normes 107

Définition. Un espace à semi-normes (E, P) est un espace vectoriel E muni de la topologie localement convexe τ_P définie par P . Nous savons que

- a) nous pouvons supposer P filtrant, ce que nous faisons systématiquement dans la suite,
- b) (E, P) est séparé si et seulement si P est séparant.

Les résultats qui précèdent établissent qu'il y a équivalence entre les notions d'espace localement convexe et d'espace à semi-normes.

Remarque. Deux points de vue se dégagent donc: espace localement convexe (E, τ) et espace à semi-normes (E, P) . Il s'agit de ne pas les opposer mais au contraire d'en utiliser la complémentarité. Cela sera particulièrement clair lorsque nous parlerons d'un espace localement convexe (E, P) ou de $cs(E, \tau)$.

Théorème 5.6.7 Une semi-norme q sur l'espace à semi-normes (E, P) est continue si et seulement s'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $q \leq Cp$ sur E . ■

La continuité des opérateurs linéaires donc des fonctionnelles linéaires s'exprime de façon particulièrement simple au moyen des semi-normes.

Théorème 5.6.8 Si (E, P) et (F, Q) sont deux espaces à semi-normes et si T est un opérateur linéaire de E dans F , alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- a) T est continu,
- b) T est continu en 0,
- c) pour tout $q \in Q$, il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que

$$q(Te) \leq Cp(e), \quad \forall e \in E.$$

En particulier, une fonctionnelle linéaire e' sur E est continue si et seulement s'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que

$$|\langle e, e' \rangle| \leq Cp(e), \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

* \rightarrow Au point de vue topologique, les espaces localement convexes ont une structure fort riche.

Théorème 5.6.9 Tout espace localement convexe est complètement régulier.

Inversement tout espace complètement régulier séparé est homéomorphe à une partie d'un espace localement convexe séparé.

Preuve. D'une part, si $e_0 \in E$ n'appartient pas au fermé F de l'espace localement convexe E , il existe $p \in \text{cs}(E)$ et $r > 0$ tels que $b_p(e_0; r) \cap F = \emptyset$. On vérifie alors directement que la fonction

$$f: E \rightarrow \mathbb{K} \quad e \mapsto \sup \left\{ 0, \chi_E(e) - \frac{1}{r}p(e_0 - e) \right\}$$

est continue sur E et telle que $0 \leq f \leq \chi_E$, $f(e_0) = 1$ et $f(F) = \{0\}$.

Inversement soit X un espace complètement régulier séparé. Pour tout $x \in X$,

$$\delta_x: C(X) \rightarrow \mathbb{K} \quad f \mapsto f(x)$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C(X)$. Il suffit alors de vérifier que

$$\delta: X \rightarrow C(X)_s^* \quad x \mapsto \delta_x$$

est en fait un homéomorphisme entre X et δX . $\blacksquare \leftarrow *$

La comparaison de topologies localement convexes sur une partie absolument convexe est gérée par les deux résultats suivants qui vont en s'affinant.

Proposition 5.6.10 *Si (E, P) et (E, Q) sont deux espaces à semi-normes et si A est une partie absolument convexe de E , alors*

$$\tau_P|_A \leq \tau_Q|_A \iff \tau_P|_A \leq \tau_Q|_A \text{ en } 0.$$

Preuve. La nécessité de la condition est triviale.

La condition est nécessaire. Soient $e \in A$, $p \in P$ et $r > 0$. Il existe alors $q \in Q$ et $s > 0$ tels que $b_p(r/2) \supset b_q(s) \cap A$. Dès lors, pour tout $f = e + g \in (e + b_q(s)) \cap A$, on a $g \in (2A) \cap b_q(s)$ donc $g \in b_p(r)$ et ainsi on a obtenu

$$(e + b_q(s)) \cap A \subset e + b_p(r). \blacksquare$$

Proposition 5.6.11 (Wengenroth) *Soient (E, P) , (E, Q) des espaces à semi-normes et A une partie absolument convexe de E .*

S'il existe $\pi \in P$ et $\rho > 0$ tels que

$$\tau_P|_{A \cap b_\pi(\rho)} \leq \tau_Q|_{A \cap b_\pi(\rho)} \text{ en } 0,$$

alors on a $\tau_P|_A \leq \tau_Q|_A$.

Preuve. Pour tous $p \in P$ et $r > 0$, il existe $q \in Q$ et $s > 0$ tels que

$$b_q(s) \cap A \cap b_\pi(\rho) \subset b_p(r) \cap b_\pi(\rho/2).$$

Pour conclure, il suffit alors de prouver que $b_q(s) \cap A \subset b_\pi(\rho)$. Or si e appartient à $(b_q(s) \cap A) \setminus b_\pi(\rho)$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^{-n}e \in b_\pi(\rho)$ et $2^{-n+1}e \notin b_\pi(\rho)$. Comme A et $b_q(s)$ sont absolument convexes, cela entraîne

$$2^{-n}e \in b_q(s) \cap A \cap b_\pi(\rho) \subset b_\pi(\rho/2)$$

donc $2^{-n+1}e \in b_\pi(\rho)$, ce qui est contradictoire. D'où la conclusion. ■

Définition. L'espace à semi-normes (E, P) est

- a) *semi-normé* si P est équivalent à une semi-norme sur E ,
- b) *normé* si P est équivalent à une norme sur E ,
- c) à *semi-normes dénombrables* si P est équivalent à un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur E .

Bien sûr tout espace normé est semi-normé et tout espace semi-normé est à semi-normes dénombrables. Si on désire insister sur le fait qu'un espace à semi-normes n'est pas à semi-normes dénombrables, on dit qu'il est à semi-normes non dénombrables.

Convention. Sauf mention explicite du contraire, à partir de maintenant, la notation (E, P) ou même E tout simplement désigne un espace à semi-normes dont P est l'ensemble des semi-normes naturelles soumis aux conditions suivantes:

- a) si (E, P) est un espace semi-normé, P désigne un ensemble réduit à un seul élément p équivalent à P et on écrit plus précisément (E, p) au lieu de (E, P) .
- b) si (E, P) est un espace normé, P désigne un ensemble réduit à une seule norme $\|\cdot\|$ équivalente à P et on écrit plus précisément $(E, \|\cdot\|)$ au lieu de (E, P) .
- c) si (E, P) est à semi-normes dénombrables, P désigne un ensemble dénombrable $\{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ de semi-normes telles que $p_m \leq p_{m+1}$ sur E pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
- d) de toute façon P est toujours supposé filtrant.

5.7 Exemples

Voici d'abord quelques exemples usuels d'espaces localement convexes séparés qui ne sont pas normés.

Exemple. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m : \omega \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sup \{ |x_j| : j = 1, \dots, m \}$$

est une semi-norme sur ω et $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur ω .
L'espace ω est l'espace localement convexe séparé (ω, P) .

Exemple. Pour tout $y \in \omega$,

$$p_y: \phi \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} |y_m x_m|$$

est une semi-norme sur ϕ et $P = \{p_y : y \in \omega\}$ est un système de semi-normes sur ϕ .

L'espace ϕ est l'espace localement convexe séparé (ϕ, P) .

Exemple. Soit F un fermé non compact de \mathbb{R}^n . Il existe alors un entier $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $F \cap \{x : |x| \leq m_0\} \neq \emptyset$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons $K_m = \{x \in F : |x| \leq m + m_0\}$. Cela étant,

$$p_m: C_0(F) \quad f \mapsto \sup \{ |f(x)| : x \in F, |x| \leq m + m_0 \}$$

est alors une semi-norme sur $C_0(F)$ et $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur $C_0(F)$. (Il convient de remarquer que, chacun des K_m est une partie compacte de F et que, pour tout compact K inclus dans F , il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m$.)

L'espace $C_0(F)$ est l'espace localement convexe séparé $(C_0(F), P)$.

On dit qu'on a muni l'espace $C_0(F)$ de la *convergence compacte*.

Exemple. Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Nous savons qu'il existe une suite K_m de compacts réguliers tels que $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et que $\Omega = \cup_{m=1}^{\infty} K_m$. Remarquons que, dès lors, pour tout compact K inclus dans Ω , il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_m$.

a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m: C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \|f\|_{K_m}$$

est une semi-norme sur $C_0(\Omega)$ et $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur $C_0(\Omega)$.

L'espace $C_0(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(C_0(\Omega), P)$.

On dit qu'on a muni l'espace $C_0(\Omega)$ de la *convergence compacte*.

b) Soit $L \in \mathbb{N}_0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m: C_L(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \sup \{ \|D^\alpha f\|_{K_m} : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq L \}$$

est une semi-norme sur $C_L(\Omega)$ et $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur $C_L(\Omega)$.

L'espace $C_L(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(C_L(\Omega), P)$.

c) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m : C_\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \sup \{ \|D^\alpha f\|_{K_m} : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \}$$

est une semi-norme sur $C_\infty(\Omega)$ et $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur $C_\infty(\Omega)$.

L'espace $C_\infty(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(C_\infty(\Omega), P)$.

d) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_m : L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \|f\chi_{K_m}\|_{1,2,\infty}$$

est une semi-norme sur $L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega)$ et $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur $L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega)$.

L'espace $L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega)$ est l'espace localement convexe séparé $(L_{\text{loc}}^{1,2,\infty}(\Omega), P)$.

Remarque. Bien d'autres exemples peuvent être donnés et étudiés. Dans ce cours, ce n'est pas notre propos: c'est la matière d'un cours sur les espaces localement convexes séparés.

Cependant, comme annoncé à la fin du chapitre précédent, afin d'établir des propriétés profondes des opérateurs linéaires compacts d'un espace normé dans lui-même, nous allons recourir à deux espaces localement convexes séparés théoriques particuliers. Ce sont les espaces définis dans les exemples suivants.

Exemples. Soit E un espace localement convexe séparé, de système de semi-normes privilégié P .

Le *dual topologique* de E est l'ensemble E' des fonctionnelles linéaires continues sur E . Nous savons que E' est un espace vectoriel et qu'une fonctionnelle linéaire e' sur E est continue si et seulement si la semi-norme $|\langle \cdot, e' \rangle|$ est continue sur E , donc si et seulement s'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que $|\langle \cdot, e' \rangle| \leq Cp(\cdot)$ sur E .

a) Remarquons bien que, pour tout $e' \in E'$, $|\langle \cdot, e' \rangle|$ est une semi-norme sur E . De plus, pour tout $e \in E$ non nul, il existe $p \in P$ tel que $p(e) \neq 0$ donc, vu le théorème de Hahn-Banach, $e' \in E'$ tel que $\langle e, e' \rangle \neq 0$. Dès lors, les semi-normes

$$\sup \{ |\langle \cdot, e' \rangle| : e' \in A' \}, \quad A' = \text{partie finie de } E',$$

constituent un système de semi-normes P_a sur E , plus faible que P .

L'espace *faible* E_a est l'espace localement convexe séparé (E, P_a) . Souvent sa topologie est notée $\sigma(E, E')$.

Afin d'alléger les expressions, nous référons aux ouverts, fermés, compacts, ... de E_a en les qualifiant de a -ouverts, a -fermés, a -compacts, ...

b) Remarquons que, pour tout $e \in E$, $|\langle e, \cdot \rangle|$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel E' . Cela étant, il est clair que les semi-normes

$$\sup \{ |\langle e, \cdot \rangle| : e \in A \}, \quad A = \text{partie finie de } E,$$

constituent un système de semi-normes P_s sur E' .

Le dual topologique simple E'_s est l'espace localement convexe séparé (E', P_s) . Souvent sa topologie est notée $\sigma(E', E)$.

Afin d'alléger les expressions, nous référons aux ouverts, fermés, compacts, ... de E'_s en les qualifiant de s -ouverts, s -fermés, s -compacts, ...

Vis-à-vis d'un espace normé, les deux derniers exemples que nous venons d'introduire donnent lieu à la situation suivante.

Application. Soit E un espace normé.

1) Nous avons maintenant deux systèmes de semi-normes sur E , à savoir $\|\cdot\|$ et P_a . Il est clair que E_a est muni d'une topologie moins fine que E .

Quand a-t-on la réciproque? Si la réciproque a lieu, il existe des fonctionnelles linéaires continues e'_1, \dots, e'_J , en nombre fini et une constante $C > 0$ telles que

$$\|\cdot\| \leq C \sup \{ |\langle \cdot, e'_j \rangle| : j = 1, \dots, J \}$$

sur E . En particulier, il vient alors

$$\langle e, e'_1 \rangle = \dots = \langle e, e'_J \rangle = 0 \Rightarrow e = 0$$

et, dans ce dernier cas, nous pouvons supposer les e'_1, \dots, e'_J linéairement indépendants. Dans ces conditions, la Proposition 1.9.3 assure l'existence d'éléments e_1, \dots, e_J de E tels que $\langle e_j, e'_k \rangle = \delta_{j,k}$. On en déduit de suite que E est de dimension finie: on a en effet $e = \sum_{j=1}^J \langle e, e'_j \rangle e_j$.

2) Nous avons aussi à présent deux systèmes de semi-normes sur E' , à savoir $\|\cdot\|$ et P_s . Nous savons que $(E', \|\cdot\|)$ est un espace de Banach dont la topologie est plus fine que celle de E'_s .

On établit aussitôt que la réciproque a lieu si et seulement si E est de dimension finie.

5.8 Propriétés générales

Proposition 5.8.1 *Si E est un espace localement convexe séparé, alors,*

a) *l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E ,*

- b) l'adhérence d'une partie (absolument) convexe de E est une partie (absolument) convexe de E ,
- c) l'intérieur d'un sous-espace vectoriel propre de E est vide,
- d) l'intérieur d'une partie (absolument) convexe de E est une partie (absolument) convexe de E .

Preuve. a) Soit L un sous-espace vectoriel de E . D'une part, établissons que $L^- + L^- \subset L^-$. De fait, $L^- \times L^-$ est bien sûr inclus dans $(L \times L)^-$ et, $+$ étant une application continue de $E \times E$ dans E , $+(L \times L)^- \subset L^-$. D'autre part, pour tout $c \in \mathbb{K}$, on a $cL^- \subset L^-$ car $\mathbb{K} \times L^-$ est bien sûr inclus dans $(\mathbb{K} \times L)^-$ et, \cdot étant une application continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E , $\cdot(\mathbb{K} \times L)^- \subset L^-$.

b) s'établit au moyen d'un raisonnement analogue.

c) est trivial.

d) est clair (à traiter en guise d'exercice). ■

Définitions. L'enveloppe linéaire fermée (resp. enveloppe convexe; enveloppe absolument convexe fermée) d'une partie non vide A de l'espace localement convexe séparé E est l'intersection des sous-espaces vectoriels fermés (resp. des parties convexes fermées; des parties absolument convexes et fermées) de E contenant A .

La proposition précédente permet aussitôt d'affirmer qu'il s'agit de l'ensemble $(\text{span}(A))^-$ (resp. $(\text{co}(A))^-$; $(\Gamma(A))^-$) qu'on note plutôt

$$\overline{\text{span}}(A) \quad (\text{resp. } \overline{\text{co}}(A); \overline{\Gamma}(A)).$$

Généralisons à présent aux espaces localement convexes séparés quelques notions introduites dans le cadre des espaces normés.

Définition. Une partie B de l'espace localement convexe séparé E est *bornée* si, pour tout $p \in \text{cs}(E)$, on a

$$\sup_{e \in B} p(e) < \infty.$$

Définitions. Une suite e_m de l'espace localement convexe séparé E est

(a) *convergente* s'il existe $e \in E$ tel que $p(e - e_m) \rightarrow 0$ pour tout $p \in \text{cs}(E)$, auquel cas e est unique et appelé *limite* de la suite,

(b) *de Cauchy* si, pour tout $p \in \text{cs}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$r, s \geq M \Rightarrow p(e_r - e_s) \leq \varepsilon.$$

Bien sûr, toute suite convergente est de Cauchy mais, en général, la réciproque est fautive. Si la réciproque est vraie, on dit que E est *séquentiellement complet* — en abrégé, E est *sq-complet*.

Plus particulièrement, une partie A de E est *séquentiellement complète* — en abrégé, *sq-complète* — si toute suite de Cauchy dans E constituée de points de A converge dans E vers un point de A .

Proposition 5.8.2 *Si B est un borné absolument convexe et séquentiellement complet de l'espace localement convexe séparé (E, P) , alors l'espace $(\text{span}(B), p_B)$ est de Banach et, pour tout $p \in P$, il existe $C_p > 0$ tel que $p \leq C_p p_B$ sur $\text{span}(B)$.*

Preuve. Nous savons déjà que p_B est une semi-norme sur l'espace vectoriel $\text{span}(B)$. De plus, pour tout $p \in \text{cs}(E)$, on a

$$e \in \text{span}(B), p_B(e) < 1 \implies e \in B \implies p(e) \leq \sup_{f \in B} p(f) = C_p$$

donc $p \leq C_p p_B$ sur $\text{span}(B)$. En particulier, p_B est une norme sur $\text{span}(B)$.

Etablissons que l'espace $(\text{span}(B), p_B)$ est séquentiellement complet. Soit e_m une suite de Cauchy dans cet espace. Par une extraction à la Cauchy, nous pouvons en extraire une sous-suite $e_{k(m)}$ telle que $p_B(e_{k(m+1)} - e_{k(m)}) < 2^{-m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. La série $\sum_{m=1}^{\infty} (e_{k(m+1)} - e_{k(m)})$ a bien sûr toutes ses sommes partielles qui appartiennent à $\text{span}(B)$. Vu la première partie de cette preuve, cette série est alors de Cauchy dans E donc converge. Dans ces conditions, la suite

$$e_{k(M+1)} = e_{k(1)} + \sum_{m=1}^M (e_{k(m+1)} - e_{k(m)})$$

converge dans E vers un élément qui s'écrit $e_{k(1)} + e$ avec $e \in CB$ pour tout $C > 1$. En fait, la convergence a lieu dans l'espace $(\text{span}(B), p_B)$ car on a

$$\begin{aligned} e_{k(1)} + e - e_{k(1)} - \sum_{m=1}^M (e_{k(m+1)} - e_{k(m)}) \\ = 2^{-M} \sum_{m=M+1}^{\infty} 2^{-m+M} 2^m (e_{k(m+1)} - e_{k(m)}) \in 2^{-M} B \end{aligned}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$. ■

Définition. Un *disque de Banach* d'un espace localement convexe séparé E est un borné absolument convexe B de E tel que l'espace normé $(\text{span}(B), \|\cdot\|_B)$ soit de Banach.

Le résultat précédent affirme donc que tout borné absolument convexe et séquentiellement complet d'un espace localement convexe séparé E est un disque de Banach de E .

Notations. Si B est un disque de Banach de l'espace localement convexe séparé E , la norme p_B est plutôt notée $\|\cdot\|_B$ et l'espace $(\text{span}(B), \|\cdot\|_B)$ est plutôt noté E_B .

Définition. Un *tonneau* d'un espace localement convexe séparé est une partie absolument convexe, absorbante et fermée de cet espace.

Proposition 5.8.3 *Dans un espace localement convexe séparé, un tonneau absorbe tout disque de Banach.*

Preuve. Soient T un tonneau et B un disque de Banach de l'espace localement convexe séparé E . L'ensemble $T \cap E_B$ est alors une partie absolument convexe et absorbante de l'espace de Banach E_B , qui est fermée pour la topologie induite par E , donc fermée dans E_B . De $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} m(T \cap E_B)$ et du théorème de Baire, on tire de suite que $T \cap E_B$ a un intérieur non vide dans E_B , donc contient un multiple de B , ce qui suffit. ■

Définition. Soit (E, P) un espace localement convexe séparé. La *polaire* A^Δ d'une partie A non vide de E est l'ensemble

$$A^\Delta = \left\{ e' \in E' : \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle| \leq 1 \right\}.$$

Il est clair que $\{0\}^\Delta = E'$ et $E^\Delta = \{0\}$.

L'*antipolaire* A'^∇ d'une partie A' non vide de E' est l'ensemble

$$A'^\nabla = \left\{ e \in E : \sup_{e' \in A'} |\langle e, e' \rangle| \leq 1 \right\}.$$

Il est clair que $\{0\}^\nabla = E$ et $E'^\nabla = \{0\}$.

Proposition 5.8.4 *Soit (E, P) un espace localement convexe séparé.*

Pour toute partie non vide A de E , A^Δ est une partie absolument convexe et fermée de E' , telle que

$$p_{A^\Delta}(e') = \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle|, \quad \forall e' \in \text{span}(A^\Delta).$$

Pour toute partie non vide A' de E' , A'^∇ est une partie absolument convexe et fermée de E telle que

$$p_{A'^\nabla}(e) = \sup_{e' \in A'} |\langle e, e' \rangle|, \quad \forall e \in \text{span}(A'^\nabla).$$

Preuve. Comme

$$A^\Delta = \bigcap_{e \in A} \{ e' \in E' : |\langle e, e' \rangle| \leq 1 \},$$

il est clair que A^Δ est une partie absolument convexe et fermée de E'_s . De plus, pour tout $e' \in \text{span}(A^\Delta)$, on a successivement

$$\begin{aligned} p_{A^\Delta}(e') &= \inf \{ r > 0 : e' \in rA^\Delta \} \\ &= \inf \left\{ r > 0 : e' \in r \left\{ f' \in E' : \sup_{e \in A} |\langle e, f' \rangle| \leq 1 \right\} \right\} \\ &= \inf \left\{ r > 0 : \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle| \leq r \right\} = \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle|. \end{aligned}$$

Le cas de A' se traite de la même manière. ■

Théorème 5.8.5 (bipolaires) *Soit E un espace localement convexe séparé.*

Pour toute partie non vide A de E , $A^{\Delta\nabla}$ est l'enveloppe absolument convexe fermée de A .

Pour toute partie non vide A' de E , $A'^{\nabla\Delta}$ est l'enveloppe absolument convexe s -fermée de A' .

Preuve. Il est clair que $A \subset A^{\Delta\nabla}$; $A^{\Delta\nabla}$ contient donc $\bar{\Gamma}(A)$. L'inclusion inverse résulte aussitôt du Théorème 3.3.5, valable en fait dans tout espace localement convexe séparé.

Le cas de l'ensemble A' se traite de même si on note que $(E'_s)' = \{ \delta_e : e \in E \}$ (cf. le Théorème 5.10.1 qu'on peut établir dès maintenant). ■

Définition. Un filtre \mathcal{F} sur un espace localement convexe séparé (E, τ) est de *Cauchy* si, pour tout $p \in \text{cs}(E, \tau)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sup_{e_1, e_2 \in F} p(e_1 - e_2) \leq \varepsilon.$$

Exemple. Si $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace localement convexe séparé (E, τ) , alors le filtre associé à cette suite est un filtre de Cauchy. □

Proposition 5.8.6 *Dans un espace localement convexe séparé,*

- a) *tout filtre convergent est de Cauchy,*
- b) *tout filtre de Cauchy et moins fin qu'un filtre convergent, converge vers la même limite.* ■

Proposition 5.8.7 *Si $(E, \{p_k : k \in \mathbb{N}_0\})$ est un espace localement convexe séparé, il est complet si et seulement s'il est séquentiellement complet.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Soit \mathcal{F} un filtre de Cauchy sur E . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe alors $A_m \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sup_{e_1, e_2 \in A_m} p_m(e_1 - e_2) \leq \frac{1}{m}$$

et nous pouvons bien sûr choisir à chaque fois A_{m+1} de telle sorte que $A_m \supset A_{m+1}$. Cela étant, choisissons une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que $e_m \in A_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Il est clair que cette suite est de Cauchy donc converge; soit e_0 sa limite. On vérifie alors directement que \mathcal{F} converge vers e_0 . ■

Proposition 5.8.8 *Soit (E, τ) un espace localement convexe séparé.*

a) *Toute partie complète de E est fermée.*

En particulier, tout sous-espace de Fréchet de E est fermé.

b) *Si E est complet, toute partie fermée de E est complète.*

c) *Si Q est un système de semi-normes sur E tel que $\text{cs}(E, \tau) \leq Q$ et si, pour tout $q \in Q$, $b_q(1)$ est un fermé de (E, τ) , alors toute partie complète de (E, τ) est complète dans (E, Q) . ■*

Théorème 5.8.9 *Une partie K d'un espace localement convexe séparé est compacte si et seulement si elle est précompacte et complète.*

Preuve. La condition est nécessaire. Nous savons que tout compact est précompact. De plus, tout filtre de Cauchy \mathcal{F} sur K a un point d'adhérence dont on a tôt fait de vérifier qu'il est limite de \mathcal{F} .

La condition est suffisante. Il suffit d'établir que tout ultrafiltre \mathcal{F} sur le précompact complet K converge. Or, pour tout $p \in \text{cs}(E, \tau)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $\{e_1, \dots, e_J\}$ de K telle que $K \subset \bigcup_{j=1}^J b_p(e_j; r)$. Comme \mathcal{F} est un ultrafiltre, il existe alors $F \in \mathcal{F}$ et $j \in \{1, \dots, J\}$ tels que $F \subset b_p(e_j; r)$, c'est-à-dire que \mathcal{F} est de Cauchy, ce qui suffit. ■

5.9 Premières propriétés de l'espace E_a

Théorème 5.9.1 (Mackey) *Une partie d'un espace localement convexe séparé est bornée si et seulement si elle est a -bornée.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Soit B une partie a -bornée de l'espace localement convexe séparé E . Procédons en plusieurs étapes.

Étape 1. Établissons que B^Δ est un tonneau de E'_s . Nous savons déjà que B^Δ est une partie absolument convexe et s -fermée de E' . Il est aussi absorbant dans E' car, pour tout $e' \in E'$, on a $C_{e'} = \sup_{e \in B} |\langle e, e' \rangle| < \infty$ donc $e' \in C_{e'} B'$.

Étape 2. Pour tout $p \in P$, établissons que $b_p^\Delta(1)$ est une partie absolument convexe, bornée et séquentiellement complète de E'_s (cette propriété peut être largement améliorée, cf. le Théorème d'Alaoglu 5.10.3). Nous savons que $b_p^\Delta(1)$ est absolument convexe. Il est s -borné car, pour tout $e \in E$, on a $\sup \{ |\langle e, e' \rangle| : e' \in b_p^\Delta(1) \} = p(e) < \infty$. Enfin $b_p^\Delta(1)$ est s -séquentiellement complet: cela résulte aussitôt du Théorème de Banach-Steinhaus.

Étape 3. Dès lors, pour tout $p \in \text{cs}(\cdot)E$, il existe $C_p > 0$ tel que $b_p^\Delta(1) \subset C_p B^\Delta$ et dès lors

$$\sup_{e \in B} p(e) = \sup_{e \in B} \sup_{e' \in b_p^\Delta(1)} |\langle e, e' \rangle| \leq \sup_{e' \in C_p B^\Delta} \sup_{e \in B} |\langle e, e' \rangle| = C_p.$$

D'où la conclusion. ■

Théorème 5.9.2 *Pour tout espace localement convexe séparé E , on a $(E_a)' = E'$.*

Preuve. Comme E est muni d'une topologie plus fine que E_a , il est clair que $(E_a)' \subset E'$. Inversement, pour tout $e' \in E'$, $|\langle \cdot, e' \rangle|$ est une semi-norme continue sur E_a donc e' appartient à $(E_a)'$. ■

Théorème 5.9.3 *Toute partie fermée et absolument convexe d'un espace localement convexe séparé est a -fermée.*

Preuve. Cela résulte aussitôt d'un corollaire du deuxième théorème de séparation. ■

5.10 Premières propriétés de l'espace E'_s

Théorème 5.10.1 *Pour tout espace localement convexe séparé E , on a $(E'_s)' = \{ \delta_e : e \in E \}$.*

Preuve. Par définition, il est clair que l'inclusion $\{ \delta_e : e \in E \} \subset (E'_s)'$ a lieu.

De plus, si e'' est une fonctionnelle linéaire continue sur E'_s , il existe une partie finie A de E et $C > 0$ tels que

$$|\langle \cdot, e'' \rangle| \leq C \sup_{e \in A} |\langle e, \cdot \rangle| \text{ sur } E'.$$

Comme E' est une partie séparante de E^* , la Proposition 1.9.5 affirme qu'il existe $e_0 \in \text{span}(\{e_1, \dots, e_J\})$ tel que $e'' = \delta_{e_0}|_{E'}$, ce qui suffit. ■

Définitions. Une partie K de l'espace vectoriel E est *précompacte pour la semi-norme p* sur E si, pour tout $r > 0$, il existe une partie finie A de E telle que $K \subset \cup_{e \in A} b_p(e; r)$.

Une partie K de l'espace localement convexe séparé E est *précompacte* si elle est précompacte pour tout $p \in \text{cs}(E)$.

Théorème 5.10.2 (précompacité réciproque) Soient A une partie non vide de l'espace localement convexe séparé E et B' une partie non vide de E' .

Afin d'alléger les notations, posons $A' = A^\Delta$ et $B = B'^\nabla$. Nous savons déjà que A' et B sont des parties absolument convexes et fermées de E'_s et E_a respectivement.

De plus, A est inclus dans $\text{span}(B)$ et est borné (resp. précompact) pour la semi-norme p_B si et seulement si B' est inclus dans $\text{span}(A')$ et est borné (resp. précompact) pour $p_{A'}$.

Preuve. Rappelons tout d'abord que, pour tout $e \in \text{span}(B)$, on a

$$p_B(e) = \sup_{e' \in B'} |\langle e, e' \rangle|$$

et que, pour tout $e' \in \text{span}(A')$, on a

$$p_{A'}(e') = \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle|.$$

Cela étant, la propriété relative à la bornation est directe. De fait, A est inclus dans $\text{span}(B)$ et y est borné pour la semi-norme p_B signifie que

$$\sup_{e \in A} \sup_{e' \in B'} |\langle e, e' \rangle| = \sup_{e' \in B'} \sup_{e \in A} |\langle e, e' \rangle| < \infty,$$

c'est-à-dire que B' est inclus dans $\text{span}(A')$ et y est borné pour $p_{A'}$.

Passons à la propriété relative à la précompacité.

La condition est nécessaire. Fixons $r > 0$. Il existe alors une partie finie $\{a_1, \dots, a_J\}$ de A telle que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^J b_{p_B}(a_j; r/3).$$

Cela étant, posons

$$C = \{(\langle a_1, b' \rangle, \dots, \langle a_J, b' \rangle) : b' \in B'\}.$$

Il est clair que C est un borné de \mathbb{K}^J donc un précompact de cet espace. Dès lors, il existe une partie finie $\{b'_1, \dots, b'_L\}$ de B' telle que

$$C \subset \{(\langle a_1, b'_l \rangle, \dots, \langle a_J, b'_l \rangle) : l = 1, \dots, L\} + b(r/3).$$

Cela étant, pour tout $b' \in B'$, il existe $l \in \{1, \dots, L\}$ tel que

$$|(\langle a_1, b' \rangle, \dots, \langle a_J, b' \rangle) - (\langle a_1, b'_l \rangle, \dots, \langle a_J, b'_l \rangle)| \leq r/3$$

donc tel que, pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} |\langle a, b' - b'_l \rangle| &\leq |\langle a - a_j, b' \rangle| + |\langle a_j, b' - b'_l \rangle| + |\langle a_j - a, b'_l \rangle| \\ &\leq 2 \sup_{b' \in B'} |\langle a - a_j, b' \rangle| + r/3 \end{aligned}$$

et cette dernière majorante est $\leq r$ si on choisit $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $a \in b_{p_B}(a_j; r/3)$. Au total, nous avons obtenu que

$$B' \subset \bigcup_{l=1}^L b_{p_{A'}}(b_k; r).$$

La suffisance de la condition s'établit de même. ■

Théorème 5.10.3 (Alaoglu) *Si (E, τ) est un espace localement convexe séparé, alors, pour tout $p \in \text{cs}(E)$, l'ensemble $b_p^\Delta(1)$ est une partie compacte et absolument convexe de E'_s .*

Preuve. Vu le théorème de Tychonoff

$$K = \prod_{e \in E} \{c \in \mathbb{K} : |c| \leq p(e)\}$$

est un espace topologique compact et séparé. De plus, on vérifie aussitôt que l'application

$$\delta: b_p^\Delta(1) \rightarrow K \quad e' \mapsto (\langle e, e' \rangle)_{e \in E}$$

est injective, continue et relativement ouverte. Tout revient donc à établir que $\delta b_p^\Delta(1)$ est une partie fermée de K .

Soit ξ un élément de l'adhérence de $\delta b_p^\Delta(1)$ dans K .

D'une part, pour tous $\varepsilon > 0$, $e \in E$ et $c \in \mathbb{K}$, il existe $e' \in b_p^\Delta(1)$ tel que

$$\begin{cases} |\langle e, e' \rangle - \xi_e| \leq \varepsilon \\ |\langle ce, e' \rangle - \xi_{ce}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

d'où on tire $|\xi_{ce} - c\xi_e| \leq \varepsilon(1 + |c|)$ donc $\xi_{ce} = c\xi_e$. D'autre part, pour tous $\varepsilon > 0$ et $e_1, e_2 \in E$, il existe $e' \in b_p^\Delta(1)$ tel que

$$\begin{cases} |\langle e_1, e' \rangle - \xi_{e_1}| \leq \varepsilon \\ |\langle e_2, e' \rangle - \xi_{e_2}| \leq \varepsilon \\ |\langle e_1 + e_2, e' \rangle - \xi_{e_1 + e_2}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

d'où on tire $|\xi_{e_1 + e_2} - \xi_{e_1} - \xi_{e_2}| \leq 3\varepsilon$ donc $\xi_{e_1 + e_2} = \xi_{e_1} + \xi_{e_2}$. Au total, nous venons d'établir qu'il existe une fonctionnelle linéaire e^* sur E telle que $\xi_e = \langle e, e^* \rangle$ pour tout $e \in E$. Pour conclure, il suffit alors de noter que

$$|\langle e, e^* \rangle| = |\xi_e| \leq p(e), \quad \forall e \in E. \blacksquare$$

5.11 Adjoint d'un opérateur linéaire continu

Remarques. Si E est un espace localement convexe séparé, il est clair que
a) pour tout sous-espace vectoriel L de E , on a

$$L^\Delta = \{ e' \in E' : \langle L, e' \rangle = \{0\} \}.$$

b) pour tout sous-espace vectoriel M de E' , on a

$$M^\nabla = \{ e \in E : \langle e, M \rangle = \{0\} \}.$$

Théorème 5.11.1 *Soit E un espace localement convexe séparé.*

a) *Si L est un sous-espace vectoriel de E , alors L^Δ est un sous-espace vectoriel fermé de E'_s et $L^{\Delta\nabla}$ est l'adhérence de L dans E .*

b) *Si M est un sous-espace vectoriel de E' , alors M^∇ est sous-espace vectoriel fermé de E et $M^{\nabla\Delta}$ est l'adhérence de M dans E'_s .*

Preuve. Bien sûr, L^Δ et M^∇ sont des sous-espaces vectoriels fermés de E'_s et E respectivement. Cela étant,

a) $L^{\Delta\nabla}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E . Comme il contient trivialement L , on a déjà $L^- \subset L^{\Delta\nabla}$. Inversement, pour tout $e \in E \setminus L^-$, une conséquence du deuxième théorème de séparation procure $e' \in E'$ tel que

$$\sup_{l \in L^-} |\langle l, e' \rangle| \leq 1 \text{ et } \langle e, e' \rangle = 1.$$

En fait, e' appartient alors à L^Δ car on a $|\langle cl, e' \rangle| \leq 1$ pour tous $l \in L$ et $c \in \mathbb{K}$. D'où la conclusion car ceci signifie que e n'appartient pas à $L^{\Delta\nabla}$.

b) s'établit de même. \blacksquare

Théorème 5.11.2 Si E, F sont des espaces normés et si $T \in L(E, F)$, alors T^*F' est inclus dans E' et

$$T': F' \rightarrow E' \quad f' \mapsto T^*f'$$

est un opérateur linéaire continu tel que $\|T'\| = \|T\|$.

Preuve. Pour tout $f' \in F'$, il vient

$$|\langle e, T^*f' \rangle| = |\langle Te, f' \rangle| \leq \|Te\| \|f'\| \leq \|T\| \|f'\| \|e\|$$

pour tout $e \in E$; T^*f' appartient donc à E' . (On pouvait aussi dire que $\langle T\cdot, f' \rangle$ est la composition de deux opérateurs linéaires continus.) On en déduit de suite que $T' = T^*|_{F'}$ est un opérateur linéaire continu de F' dans E' tel que $\|T'\| \leq \|T\|$. En fait, l'égalité a lieu car il vient successivement

$$\begin{aligned} \|T'\| &= \sup_{\|f'\| \leq 1} \|T^*f'\| = \sup_{\|f'\| \leq 1} \sup_{\|e\| \leq 1} |\langle e, T^*f' \rangle| \\ &= \sup_{\|e\| \leq 1} \sup_{\|f'\| \leq 1} |\langle Te, f' \rangle| = \sup_{\|e\| \leq 1} \|Te\| = \|T\|. \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 5.11.3 Soient E, F deux espaces normés.

Si T est un opérateur linéaire continu de E dans F , alors

- $\ker(T') = \text{im}(T)^\Delta$ et $\ker(T')$ est un fermé de F'_s ,
- $\ker(T) = \text{im}(T')^\nabla$,
- $\text{im}(T)$ est dense dans F si et seulement si T' est injectif,
- T est injectif si et seulement si $\text{im}(T')$ est dense dans E'_s .

Preuve. a) De fait, il vient successivement

$$\begin{aligned} f' \in \ker(T') &\iff \langle e, T^*f' \rangle = 0, \quad \forall e \in E \\ &\iff \langle Te, f' \rangle = 0, \quad \forall e \in E \\ &\iff f' \in \text{im}(T)^\Delta. \end{aligned}$$

b) De fait, il vient successivement

$$\begin{aligned} e \in \ker(T) &\iff \langle Te, f' \rangle = 0, \quad \forall f' \in F', \\ &\iff \langle e, T^*f' \rangle = 0, \quad \forall f' \in F' \\ &\iff e \in \text{im}(T')^\nabla. \end{aligned}$$

c) Nous savons en effet qu'un sous-espace vectoriel L de F est dense si et seulement si 0 est la seule fonctionnelle linéaire continue sur F qui s'annule identiquement sur L , c'est-à-dire si et seulement si $L^\Delta = \{0\}$.

d) De la même manière, $\text{im}(T')$ est dense dans E'_s si et seulement si $\text{im}(T')^\nabla = \{0\}$. ■

Théorème 5.11.4 *Si E et F sont des espaces de Banach, alors $T \in L(E, F)$ est surjectif si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $\|T'f'\| \geq C \|f'\|$ pour tout $f' \in F'$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Vu le théorème de l'opérateur ouvert, toute surjection linéaire continue entre espaces de Banach est un opérateur ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $b_F(r) \subset Tb_E(1)$. Par conséquent, pour tout $f' \in F'$, il vient successivement

$$\begin{aligned} \|f'\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, f' \rangle| \leq \sup_{\|e\| \leq 1/r} |\langle Te, f' \rangle| \\ &\leq \frac{1}{r} \sup_{\|e\| \leq 1} |\langle e, T'f' \rangle| = \frac{1}{r} \|T'f'\|. \end{aligned}$$

La condition est suffisante. Dans un premier temps, si $f_0 \in F$ n'appartient pas à l'adhérence de $\{Te : \|e\| \leq 1\}$, le théorème de séparation procure l'existence de $f'_0 \in F'$ tel que

$$\begin{cases} |\langle Te, f'_0 \rangle| \leq 1, & \forall e \in b_E(1), \\ |\langle f_0, f'_0 \rangle| > 1. \end{cases}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} 1 < |\langle f_0, f'_0 \rangle| &\leq \|f_0\| \|f'_0\| \leq \|f_0\| C \|T'f'_0\| \\ &\leq C \|f_0\| \sup_{\|e\| \leq 1} |\langle Te, f'_0 \rangle| \leq C \|f_0\|. \end{aligned}$$

De la sorte, nous venons d'établir l'inclusion suivante

$$\left\{ f \in F : \|f\| \leq \frac{1}{C} \right\} \subset \{Te : \|e\| \leq 1\}^-.$$

Dans un second temps, nous allons déduire de cette inclusion que

$$\left\{ f \in F : \|f\| \leq \frac{1}{2C} \right\} \subset \{Te : \|e\| \leq 1\},$$

ce qui permet de conclure aussitôt. Pour tout $f \in F$ tel que $\|f\| \leq 1/(2C)$, la boule $b_F(f; 1/(4C))$ est d'intersection non vide avec $Tb_E(1)$: il existe donc $e_1 \in E$ tel que $\|e_1\| \leq 2^{-1}$ et $\|f - Te_1\| \leq 1/(4C)$. Par récurrence, on obtient alors une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de E telle que $\|e_m\| \leq 2^{-m}$ et $\|f - T(e_1 + \dots + e_m)\| \leq 2^{-m-1}/C$. On en déduit que la série absolument convergente $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ converge dans E et que sa limite e_0 vérifie $\|e_0\| \leq 1$ et $Te_0 = f$, ce qui suffit. ■

Théorème 5.11.5 Soient E et F des espaces de Banach.

Si $T \in L(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes:

- (a) $\text{im}(T)$ est un fermé de F ,
- (b) $\text{im}(T')$ est un fermé de E'_s ,
- (c) $\text{im}(T')$ est un fermé de E' .

Preuve. (a) \Rightarrow (b). De $\ker(T) = \text{im}(T')^\nabla$, on déduit que $\ker(T)^\Delta$ est l'adhérence dans E'_s du sous-espace vectoriel $\text{im}(T')$; pour conclure, il suffit donc de prouver l'inclusion $\ker(T)^\Delta \subset \text{im}(T')$.

Soit e' un élément de $\ker(T)^\Delta$. Comme $Te_1 = Te_2$ implique alors $\langle e_1, e' \rangle = \langle e_2, e' \rangle$, nous pouvons définir une fonctionnelle l' sur $\text{im}(T)$ par $\langle Te, l' \rangle = \langle e, e' \rangle$ pour tout $e \in E$. En fait, l' est une fonctionnelle linéaire sur $\text{im}(T)$. C'est même une fonctionnelle linéaire continue sur $\text{im}(T)$ car $T: E \rightarrow \text{im}(T)$, étant une surjection continue entre espaces de Banach, est un opérateur ouvert: il existe donc $C > 0$ tel que

$$\inf_{h \in \ker(T)} \|e + h\| \leq C \|Te\|, \quad \forall e \in E,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} |\langle Te, l' \rangle| &= \inf_{h \in \ker(T)} |\langle T(e + h), l' \rangle| = \inf_{h \in \ker(T)} |\langle e + h, e' \rangle| \\ &\leq \inf_{h \in \ker(T)} \|e + h\| \|e'\| \leq C \|e'\| \|Te\|, \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Cela étant, vu le théorème de Hahn-Banach, l' admet un prolongement linéaire continu f' sur F et, pour conclure, il suffit de constater que $T'f'$ est égal à e' .

(b) \Rightarrow (c) est trivial puisque E'_s a une topologie moins fine que E' .

(c) \Rightarrow (a). Désignons par L l'adhérence de $\text{im}(T)$ dans F et par S l'opérateur T considéré de E dans L . Dans ces conditions, S est un opérateur linéaire continu de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach L et son image est dense dans L . Il s'ensuit que $S': L' \rightarrow E'$ est une injection linéaire continue. De plus, on a $\text{im}(S') = \text{im}(T')$: d'une part, pour tout $f' \in F'$, $l' = f'|_L$ appartient à L' et donne lieu à $T'f' = S'l'$; d'autre part, vu le théorème de Hahn-Banach, tout $l' \in L'$ a un prolongement linéaire continu f' sur F , auquel cas

$$\langle e, S'l' \rangle = \langle Se, l' \rangle = \langle Te, f' \rangle = \langle e, T'f' \rangle, \quad \forall e \in E.$$

Cela étant, $S': L' \rightarrow \text{im}(S') = \text{im}(T')$ est une bijection linéaire continue entre espaces de Banach donc un isomorphisme, vu le théorème de l'opérateur ouvert: il existe $C > 0$ tel que $\|l'\| \leq C \|S'l'\|$ pour tout $l' \in L'$. Vu le théorème précédent, nous obtenons que S est surjectif. Or $\text{im}(S) = \text{im}(T)$ donc $\text{im}(T)$ est un fermé de F . ■

Corollaire 5.11.6 *Si E et F sont des espaces de Banach, alors un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjectif si et seulement si T' est injectif et a une image fermée dans E' . ■*

Remarque. Nous sommes maintenant en mesure de revenir à la théorie spectrale des opérateurs linéaires compacts d'un espace de Banach dans lui-même et d'établir la caractérisation fondamentale de leur spectre, à savoir que les éléments non nuls du spectre sont des valeurs propres de l'opérateur, auxquelles correspondent à chaque fois un nombre fini de vecteurs propres linéairement indépendants.

5.12 Théorie spectrale (suite)

Dans ce qui suit, nous allons étudier la nature du spectre d'un opérateur linéaire compact d'un espace de Banach E dans lui-même. Le résultat suivant va y jouer un rôle important.

Théorème 5.12.1 *Si E et F sont des espaces de Banach, alors l'opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si et seulement si $T^* : F' \rightarrow E'$ est compact.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit f'_m une suite de $b_{F'}(1)$. Cela étant,

$$\left\{ f'_m|_{\overline{Tb_E(1)}} : m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

est un ensemble de fonctions

- a) ponctuellement borné sur le compact $K = \overline{Tb_E(1)}$,
- b) équicontinu sur le compact K .

Vu le théorème d'Arzela-Ascoli, c'est une partie précompacte de l'espace $C_0(K)$. Il existe par conséquent une sous-suite $f'_{k(m)}$ de la suite de départ qui converge uniformément sur le compact K donc sur l'ensemble $Tb_E(1)$. Comme

$$\|T^* f'_{k(r)} - T^* f'_{k(s)}\| = \sup_{\|e\| \leq 1} |\langle Te, f'_{k(r)} - f'_{k(s)} \rangle|,$$

la suite $T^* f'_{k(m)}$ est donc de Cauchy dans l'espace de Banach E' . D'où la conclusion.

La suffisance de la condition s'établit de la même façon. ■

Lemme 5.12.2 *Si L est un sous-espace linéaire fermé de l'espace localement convexe séparé E , alors le sous-espace linéaire L^Δ de E' est tel que $\dim(L^\Delta) \geq \dim(E/L)$.*

Preuve. De fait, si $e_1, \dots, e_J \in E$ sont en nombre fini et tels que les classes $e_{1,L}, \dots, e_{J,L}$ soient linéairement indépendantes, alors, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, e_j n'appartient pas au sous-espace linéaire fermé

$$L_j = L + \text{span}(\{e_1, \dots, [e_j], \dots, e_J\})$$

de E et il existe $e'_j \in E'$ tel que $\langle e_j, e'_j \rangle = 1$ et $\langle L, e'_j \rangle = \{0\}$. Il suffit alors de constater que les e'_1, \dots, e'_J appartiennent à L^Δ et sont linéairement indépendants pour pouvoir conclure. ■

Théorème 5.12.3 *Si E est un espace de Banach et si $K \in \mathcal{K}(E)$, alors, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul, les espaces linéaires*

$$\ker(K - \lambda \text{id}), \quad E/\text{im}(K - \lambda \text{id}), \quad \ker(K^* - \lambda \text{id}), \quad E'/\text{im}(K^* - \lambda \text{id})$$

sont de dimension finie et ont même dimension.

Preuve. (1) On a

$$\dim(E'/\text{im}(K^* - \lambda \text{id})) \leq \dim(\ker(K - \lambda \text{id})).$$

Vu le théorème 5.11.5, $L = \text{im}(K^* - \lambda \text{id})$ est un sous-espace linéaire fermé de E'_s . Comme

$$\begin{aligned} L^\Delta &= \{ \delta_e : e \in E, \langle e, (K^* - \lambda \text{id})E' \rangle = \{0\} \} \\ &= \{ \delta_e : e \in E, \langle (K - \lambda \text{id})e, E' \rangle = \{0\} \} \\ &= \{ \delta_e : e \in \ker(K - \lambda \text{id}) \} \end{aligned}$$

est en bijection linéaire avec $\ker(K - \lambda \text{id})$, l'inégalité annoncée résulte alors aussitôt du lemme.

(2) On a

$$\dim(\ker(K - \lambda \text{id})) \leq \dim(E/\text{im}(K - \lambda \text{id})).$$

Si $\text{im}(K - \lambda \text{id}) = E$, la partie b) du Théorème 4.5.4 assure que λ n'est pas une valeur propre de K . Par conséquent, $\ker(K - \lambda \text{id}) = \{0\}$ et l'inégalité est prouvée dans ce cas.

Considérons à présent le cas $\text{im}(K - \lambda \text{id}) \neq E$; procédons par l'absurde. Supposons avoir l'inégalité (*) suivante

$$\dim(E/\text{im}(K - \lambda \text{id})) < \dim(\ker(K - \lambda \text{id})).$$

Vu le Théorème 4.5.2, $\ker(K - \lambda \text{id})$ est un espace linéaire de dimension finie. Dès lors, $\text{im}(K - \lambda \text{id})$ est un sous-espace linéaire fermé de codimension finie de E . Il

existe donc un projecteur linéaire continu P de E tel que $\text{im}(P) = \ker(K - \lambda \text{id})$ et un complément topologique M de $\text{im}(K - \lambda \text{id})$ dans E . De plus, l'inégalité (*) donne $\dim(M) < \dim(\text{im}(P)) < \infty$ et dès lors il existe une surjection linéaire compacte $T: \text{im}(P) \rightarrow M$ et $e_0 \in \text{im}(P)$ non nul tel que $Te_0 = 0$. Cela étant, $S = K + TP$ est un opérateur linéaire compact de E dans E tel que

$$(S - \lambda \text{id})e_0 = (K - \lambda \text{id})e_0 = 0;$$

λ est donc une valeur propre de S et on doit avoir $\text{im}(S - \lambda \text{id}) \neq E$. Cependant il vient

$$\begin{aligned} \text{im}(S - \lambda \text{id}) &= (K - \lambda \text{id} + TP)\ker(P) + (K - \lambda \text{id} + TP)\ker(K - \lambda \text{id}) \\ &= (K - \lambda \text{id})\ker(P) + TP\ker(K - \lambda \text{id}) \end{aligned}$$

avec

$$(K - \lambda \text{id})\ker(P) = \text{im}(K - \lambda \text{id})$$

(car $\ker(P)$ est un complément topologique de $\ker(K - \lambda \text{id}) = \text{im}(P)$) et

$$TP\ker(K - \lambda \text{id}) = TP\text{im}(P) = T\text{im}(P) = M$$

donc $\text{im}(S - \lambda \text{id}) = E$, ce qui est contradictoire.

(3) On a

$$\dim(E/\text{im}(K - \lambda \text{id})) \leq \dim(\ker(K^* - \lambda \text{id})).$$

De fait, $\text{im}(K - \lambda \text{id})$ est un sous-espace linéaire fermé de E donnant lieu à l'égalité $\text{im}(K - \lambda \text{id})^\Delta = \ker(K^* - \lambda \text{id})$. C'est donc une conséquence directe du lemme.

(4) On a

$$\dim(\ker(K^* - \lambda \text{id})) \leq \dim(E'/\text{im}(K^* - \lambda \text{id})).$$

C'est une conséquence directe de (2) car $K^* \in \mathcal{K}(E')$.

Au total, nous avons établi que ces quatre espaces linéaires ont la même dimension. D'où la conclusion car nous savons que $\ker(K - \lambda \text{id})$ est un espace linéaire de dimension finie. ■

Théorème 5.12.4 *Si E est un espace de Banach et si $K \in \mathcal{K}(E)$, alors tout élément non nul de $\sigma(K)$ est une valeur propre de K et de K^* .*

De plus, $\sigma(K)$ est un compact dénombrable de \mathbb{K} ; il est soit fini soit égal à l'ensemble des éléments d'une suite de \mathbb{K} convergente vers 0 uni à $\{0\}$. ■

Exercice. Soient E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ et $K \in \mathcal{K}(E)$. Etablir que $T(\text{id} - K) = \text{id}$ a lieu si et seulement si $(\text{id} - K)T = \text{id}$, auquel cas $\text{id} - K$ admet un inverse continu et $\text{id} - (\text{id} - K)^{-1}$ est compact. □

Exercice. Etablir que

$$K: \ell^1 \rightarrow \ell^1 \quad \alpha \mapsto (a_1/2^1, a_2/2^2, a_3/2^3, \dots)$$

est un opérateur linéaire compact. Quel est son spectre? □

5.13 Premiers exemples

[20, pages 112–113]

Exemple. Désignons par $L^2(A; \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -sous-espace de Banach des éléments réels de $L^2(A)$.

Soit $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1]; \mathbb{R})$.

a) Etablir que, pour tout $f \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ et presque tout $x \in [0, 1]$, la fonction $k(x, \cdot)f(\cdot)$ est intégrable sur $[0, 1]$.

b) Etablir que, pour tout $f \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$, $\int_0^1 k(x, y)f(y) dy$ appartient à l'espace $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$.

c) Etablir que

$$K: L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \quad f \mapsto \int_0^1 k(\cdot, y)f(y) dy$$

est un opérateur linéaire continu tel que

$$\|K\|^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |k(x, y)|^2 dx dy.$$

d) Si $J \in \mathbb{N}_0$ et $a_1, \dots, a_J, b_1, \dots, b_J \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$, établir que la fonction $\sum_{j=1}^J a_j(x)b_j(y)$ est une telle fonction k . Etablir que, dans ce cas, on a $\dim(\text{im}(K)) \leq J$.

e) Etablir que K est un opérateur linéaire compact.

f) Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, établir que

i) soit l'équation $Kg - \lambda g = f$ a une solution unique pour tout élément $f \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$,

ii) soit l'équation $Kg - \lambda g = f$ n'a aucune solution pour certains éléments f de $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ et une infinité de solutions pour tous les autres.

g) Déterminer K^* . □

Exemple. En guise de fonction k dans l'exemple précédent, considérer

$$k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (1-x)y & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ (1-y)x & \text{si } x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Etablir que, pour tout $f \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$, on a

$$(Kf)(x) = -Cx + \int_0^x yf(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy$$

avec $C = \int_0^1 yf(y) dy$, donc $(Kf)(0) = (Kf)(1) = 0$.

b) En déduire directement que, pour tout $f \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$, Kf appartient à $C_1([0, 1]; \mathbb{R})$ et vérifie

$$[D(Kf)]_x = -C + \int_x^1 f(y) dy.$$

c) Etablir que

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \{(n\pi)^{-2} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

et que

$$\ker(K - (n\pi)^{-2}\text{id}) = \text{span}(\sin(n\pi x)), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Suggestion. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre non nulle de K et si f est un vecteur propre de K pour λ , on a $Kf = \lambda f$ donc

$$\begin{cases} f \in C_\infty([0, 1]; \mathbb{R}), \\ \lambda D^2 f + f = 0, \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases}$$

En déduire que K n'a pas de valeur propre $\lambda < 0$ et que ses seules valeurs propres $\lambda > 0$ sont les nombres $(n\pi)^{-2}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, de vecteur propre $\sin(n\pi x)$.

d) Etablir que $\{\sin(n\pi x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ est une base orthonormée totale de l'espace $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$.

c) Discuter les équations

$$Kg - g = \sum_{(m)} c_m \sin(m\pi x) \quad \text{et} \quad Kg - g = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(m\pi x).$$

(en mettant bien en évidence ce qui se passe si λ est une valeur propre.)

Exemple. [20, pages 112–113]

Si H désigne la restriction de l'opérateur K de l'exercice précédent à l'espace $C_0([0, 1])$, établir que H est à valeurs dans $C_0([0, 1])$ et qu'il s'agit d'un opérateur linéaire compact de cet espace dans lui-même.

5.14 Exemples (suite)

[23, pages 198–200]

Considérons l'opérateur de Fredholm K de noyau

$$k(x, y) = \sin(xy) \text{ sur l'intervalle } [0, 1/2].$$

De $0 \leq \sin(xy) \leq \sin(1/4) \leq 1/4$ pour tous $x, y \in [0, 1/2]$, on tire de suite l'inégalité $\|K\| \leq 1/8$. Dès lors, l'opérateur $\text{id} - K$ admet un inverse continu donné par la série de Neumann $\sum_{m=0}^{\infty} K^m$.

Cependant, pour $f \in C_0([0, 1/2])$, on peut calculer une solution approchée de l'équation $g - Kg = f$ en recourant au développement de Taylor

$$\sin(xy) = xy - \frac{x^3y^3}{6} + \frac{x^5y^5}{120} - \dots$$

Ainsi, si nous désignons par K_1 l'opérateur de Fredholm de noyau xy sur $[0, 1/2]$, nous obtenons directement

$$\begin{aligned} \|Kf - K_1f\| &\leq \sup_{x \in [0, 1/2]} \int_0^{1/2} |\sin(xy) - xy| |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1/2]} \int_0^{1/2} \frac{x^3y^3}{6} dy \cdot \|f\| = \frac{1}{3072} \|f\| \end{aligned}$$

donc $\|K - K_1\| \leq 1/3072$. Comme K_1 est un opérateur linéaire de rang fini, on résout aisément l'équation $h - K_1h = f$. En effet, en tout $x \in [0, 1/2]$, elle devient

$$f(x) = h(x) - \int_0^{1/2} xyh(y) dy = h(x) - Cx \text{ donc } h(x) = f(x) + Cx$$

avec

$$C = \int_0^{1/2} yh(y) dy = \int_0^{1/2} y(f(y) + Cy) dy$$

donc

$$C = \frac{24}{23} \int_0^{1/2} yf(y) dy.$$

Il s'agit d'une bonne solution approchée vu que

$$h - g = h - (\text{id} - K)^{-1}f = (\text{id} - K)^{-1}((\text{id} - K) - (\text{id} - K_1))h$$

entraîne

$$\begin{aligned} \|h - g\| &\leq \frac{1}{1 - \|K\|} \cdot \|K - K_1\| \cdot \|h\| \\ &\leq \frac{1}{1 - 1/8} \cdot \frac{1}{3072} \cdot \|h\| < 3,73 \cdot 10^{-4} \|h\|. \end{aligned}$$

Si on souhaite une meilleure approximation de la solution, on peut recourir à l'opérateur de Fredholm K_2 de noyau

$$k_2(x, y) = xy - \frac{x^3 y^3}{6},$$

qui est aussi un opérateur linéaire de rang fini.

5.15 Résolution d'équations différentielles

Dans ce paragraphe, nous allons voir sur des exemples simples relatifs à des équations différentielles comment peuvent apparaître des opérateurs de Fredholm ou de Volterra.

5.15.1 Problème avec conditions initiales

Etant donné un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} , des fonctions $a_0, a_1, f \in C_0([a, b])$ et des nombres $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, nous recherchons une fonction $g \in C_2([a, b])$ telle que

$$\begin{cases} D_t^2 g + a_1(t)D_t g + a_0(t)g(t) = f(t) \text{ sur } [a, b], \\ g(a) = z_0, \\ Dg(a) = z_1. \end{cases}$$

Analyse. Si g est solution de cette équation différentielle, alors $h = D^2 g$ est tel que

$$\begin{aligned} \int_a^t h(u) du &= D_t g - z_1, \\ \int_a^t du \int_a^u h(v) dv &= g(t) - z_0 - z_1(t - a) \\ &= \int_a^t (t - u)h(u) du. \end{aligned}$$

De plus, l'équation différentielle donne lieu à l'évaluation suivante de $f(t)$

$$h(t) + a_1(t) \left(z_1 + \int_a^t h(u) du \right) + a_0(t) \left(z_0 + z_1(t - a) + \int_a^t (t - u)h(u) du \right).$$

Synthèse. Inversement on vérifie de suite que si l'équation

$$h(t) - \int_a^t k(t, s)h(s) ds = l(t)$$

avec

$$\begin{aligned} k(t, s) &= -a_1(t) - a_0(t) \cdot (t - s) \\ l(t) &= f(t) - z_0 a_0(t) - z_1 (a_1(t) + a_0(t) \cdot (t - a)) \end{aligned}$$

admet une solution $h \in C_0([a, b])$, alors l'équation différentielle admet une solution g décrite par

$$g(t) = z_0 + z_1(t - a) + \int_a^t (t - u)h(u) du.$$

Conclusion. Le problème considéré a toujours une solution unique car l'équation intégrale considérée est une équation de Volterra de seconde espèce.

5.15.2 Problème avec conditions aux limites

Etant donné un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , des fonctions $a_0, f \in C_0([a, b])$ et des nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, nous recherchons une fonction $g \in C_2([a, b])$ telle que

$$\begin{cases} D_t^2 g + a_0(t)g(t) = f(t) \text{ sur } [a, b], \\ g(a) = \alpha, \\ g(b) = \beta. \end{cases}$$

Analyse. On vérifie directement que la fonction

$$h(t) = - \int_a^b l(t, u)f(u) du$$

où

$$l(t, u) = \begin{cases} \frac{(b-t)(u-a)}{b-a} & \text{si } a \leq u \leq t \\ \frac{(t-a)(b-u)}{b-a} & \text{si } t \leq u \leq b \end{cases}$$

appartient à $C_2([a, b])$ et vérifie

$$\begin{cases} D_t^2 h = f(t) \text{ sur } [a, b], \\ h(a) = h(b) = 0. \end{cases}$$

(cf. exercice p. 6)

Dès lors la fonction

$$p(t) = \alpha \frac{b-t}{b-a} + \beta \frac{t-a}{b-a} - \int_a^b l(t, u)f(u) du$$

appartient à $C_2([a, b])$ et vérifie

$$\begin{cases} D_t^2 p = f(t) \text{ sur } [a, b] \\ p(a) = \alpha, \\ p(b) = \beta. \end{cases}$$

Cela étant, si g est une solution de l'équation considérée, on doit avoir

$$g(t) = \alpha \frac{b-t}{b-a} + \beta \frac{t-a}{b-a} - \int_a^b l(t, u) \cdot (f(u) - a_0(u)g(u)) du$$

c'est-à-dire l'équation intégrale (*)

$$g(t) - \int_a^b k(t, s)g(s) ds = q(t)$$

si on pose

$$\begin{aligned} k(t, s) &= a_0(s)l(t, s) \\ q(t) &= \alpha \frac{b-t}{b-a} + \beta \frac{t-a}{b-a} - \int_a^b l(t, u)f(u) du. \end{aligned}$$

Synthèse. Inversement on vérifie directement que toute solution de l'équation intégrale (*) est solution de l'équation différentielle considérée.

Conclusion. Il s'agit cette fois d'une équation de Fredholm. On obtient aisément

$$\|K\| \leq \|a_0\| \cdot \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Pour $\|a_0\| < 8/(b-a)^2$, on est donc sûr de l'existence et de l'unicité d'une solution. Sinon la situation est plus délicate et laissée ... pour un autre cours?

Chapitre 6

Quelques compléments sur les espaces localement convexes

Convention. Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, $E = (E, P)$ et $F = (F, Q)$ désignent deux espaces localement convexes séparés.

6.1 Espaces ultrabornologiques

Définition. L'espace E est *ultrabornologique* si toute semi-norme sur E qui est bornée sur les compacts absolument convexes de E , est continue; il revient au même de dire: si toute partie absolument convexe de E qui absorbe les compacts absolument convexes de E , est un voisinage de 0.

Proposition 6.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) E est ultrabornologique,
- (b) toute semi-norme sur E qui est bornée sur les bornés absolument convexes complétants de E , est continue,
- (c) toute semi-norme sur E qui est bornée sur toutes les suites très convergentes vers 0, est continue.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) car tout compact absolument convexe est borné et complet, donc complétant.

(b) \Rightarrow (c). Soit q une semi-norme sur E qui est bornée sur les suites très convergentes vers 0 de E et soit B un borné absolument convexe complétant de E . Alors q est borné sur toute suite qui converge vers 0 dans E_B , donc est borné sur tout borné de E_B et en particulier sur B .

(c) \Rightarrow (a). Il suffit d'établir que toute suite très convergente vers 0 dans E est incluse dans un compact absolument convexe de E . Cela résulte aussitôt du résultat suivant. ■

Proposition 6.1.2 *Si la suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E et si, pour tout $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m e_m$ converge dans E , alors*

$$K = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} c_m e_m : \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| < \infty \right\}$$

est absolument convexe, compact et extractable dans E . C'est aussi l'enveloppe absolument convexe fermée de $\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\}$.

Preuve. Désignons par L l'espace vectoriel ℓ^1 muni du système dénombrable de semi-normes $\{\pi_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ où, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, π_m est défini par

$$\pi_m(x) = \sum_{j=1}^m |x_j|, \quad \forall x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1.$$

Cela étant, établissons que l'ensemble absolument convexe

$$H = \left\{ x \in L : \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| \leq 1 \right\}$$

est extractable donc compact dans L . Soit $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de H . Comme pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $\{x_j^{(m)} : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un borné de \mathbb{K} , on peut extraire au moyen d'une extraction diagonale une sous-suite $(x^{(k(m))})_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que $x_j^{(k(m))} \rightarrow x_j$ dans \mathbb{K} pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. En fait, la suite $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ainsi construite appartient à H car, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sum_{j=1}^J |x_j^{(k(m))}| \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

Il est alors clair que la suite $(x^{(k(m))})_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers x dans L .

Pour conclure, il suffit alors d'établir que

$$T: H \rightarrow E \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$$

est une application continue. Pour tous $p \in P$ et $r > 0$ et quels que soient $x, y \in H$, il vient

$$\begin{aligned} p(Tx - Ty) &\leq \sum_{m=1}^M |x_m - y_m| p(e_m) + \sum_{m=M+1}^{\infty} |x_m - y_m| p(e_m) \\ &\leq \sup_{m \leq M} p(e_m) \cdot \pi_M(x - y) + 2 \sup_{m > M} p(e_m) \end{aligned}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$. Or il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sup_{m > M} p(e_m) \leq r/4$ donc tel que

$$\left. \pi_M(x - y) \leq \frac{r}{2(1 + \sup_{m \in \mathbb{N}_0} p(e_m))} \right\} \Rightarrow p(Tx - Ty) \leq r.$$

Enfin comme il est clair que

$$\Gamma(\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\}) \subset K \subset \bar{\Gamma}(\{e_m : m \in \mathbb{N}_0\}),$$

la conclusion est triviale car K , étant compact, est fermé. ■

Exemple. *Tout espace de Fréchet est ultrabornologique.* Soit q une semi-norme sur l'espace de Fréchet E , bornée sur tout compact absolument convexe de E . Soit $\{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ un système de semi-normes sur E , équivalent à $\text{cs}(E)$. Si q n'est pas continu sur E , il existe une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de E telle que $p_m(e_m) \leq 1/m^2$ et $q(e_m) \geq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, la suite $(me_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers 0 dans E . De plus, on vérifie directement que la série $\sum_{m=1}^{\infty} mc_m e_m$ est de Cauchy donc converge dans E pour tout $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1$. Dès lors, la proposition précédente signale que $\bar{\Gamma}(\{me_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ est un compact absolument convexe de E sur lequel q n'est pas borné. D'où une contradiction. □

6.2 Espaces bornologiques

Définition. L'espace E est *bornologique* si toute semi-norme sur E qui est bornée sur les bornés de E est continue. Bien sûr, E est bornologique si et seulement si toute partie absolument convexe et bornivore de E est un voisinage de 0.

Vu les propriétés des suites Mackey convergentes, E est bornologique si et seulement si toute semi-norme sur E qui est bornée sur les suites Mackey convergentes vers 0, est continue.

Exemples. (1) *Tout espace ultrabornologique est bornologique.*

(2) *Tout espace localement convexe séparé métrisable est bornologique.* Soit $(E, \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ un tel espace et soit q une semi-norme sur E , bornée sur les

bornés de E . Si q n'est pas une semi-norme continue sur E , il existe une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de E telle que $p(e_m) \leq 1/m$ et $q(e_m) \geq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, on vérifie aisément que $(me_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite bornée de E sur laquelle q n'est pas borné. D'où une contradiction. \square

6.3 Espaces tonnelés

Rappel. Une fonction réelle f sur l'espace topologique T est *semi-continue inférieurement* (en abrégé *s.c.i.*) sur T si, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]r, +\infty[)$ est un ouvert de T .

Pour toute partie \mathcal{F} ponctuellement bornée de $C_0(T; \mathbb{R})$, $\sup \{ f : f \in \mathcal{F} \}$ est bien sûr une fonction s.c.i. sur T .

Proposition 6.3.1 *Si q est une semi-norme sur E , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) $b_q(1)$ est un fermé de E ,
- (b) q est une fonction s.c.i. sur E ,
- (c) il existe une partie \mathcal{F} de $C_0(E; \mathbb{R})$ telle que $q = \sup \{ f : f \in \mathcal{F} \}$.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) est trivial.

(b) \Rightarrow (c). Il suffit de prouver que, pour tout $e_0 \in E$ et tout $r < q(e_0)$, il existe $f \in C_0(E; \mathbb{R})$ tel que $f \leq q$ et $r \leq f(e_0)$. Pour $r \leq 0$, c'est trivial: $f = 0$ convient. Pour $r > 0$, on procède comme suit: il existe $p \in \text{cs}(E)$ tel que $b_p(e_0; 1) \subset q^{-1}(]r, +\infty[)$ et alors

$$f = r\chi_E - r \inf \{ p(\cdot - e_0), \chi_E \}$$

convient.

(c) \Rightarrow (a) a lieu car $b_q(1) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(] - \infty, 1])$. ■

Définition. L'espace E est *tonnelé* si toute semi-norme s.c.i. sur E est continue.

Vu le résultat précédent,

- a) l'espace E est tonnelé si et seulement si tout tonneau de E est voisinage de 0.
- b) toute semi-norme s.c.i. sur E est bornée sur tout borné absolument convexe complétant de E car nous savons qu'un tonneau absorbe tous les disques de Banach.

Exemples. 1) *Tout espace ultrabornologique est tonnelé.*

2) *Tout espace localement convexe et séparé de Baire est tonnelé.* De fait, pour tout tonneau T d'un tel espace E , on a $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} mT$ et ainsi un des mT est voisinage de 0, ce qui suffit. \square

6.4 Espaces quasi-tonnelés

Définition. L'espace E est *quasi-tonnelé* si toute semi-norme sur E qui est s.c.i. et bornée sur les bornés est continue; il revient au même de dire si tout tonneau bornivore de E est voisinage de 0.

Exemples. 1) *Tout espace bornologique est quasi-tonnelé.*

2) *Tout espace tonnelé est quasi-tonnelé.* \square

Proposition 6.4.1 *Tout espace quasi-tonnelé et séquentiellement complet est tonnelé.*

Preuve. Soient T un tonneau et B un borné d'un espace quasi-tonnelé et séquentiellement complet. Comme $\bar{\Gamma}(B)$ est un borné absolument convexe séquentiellement complet donc un disque de Banach, il est absorbé par le tonneau T . Dès lors T absorbe B , ce qui suffit. \blacksquare

6.5 Espaces à réseau

Définition. L'espace E est à *réseau* s'il a un *réseau*, c'est-à-dire un ensemble

$$\mathcal{R} = \{ A_{n_1, \dots, n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0 \}$$

de parties de E telles que

($\mathcal{R}1$) chaque élément de \mathcal{R} est absolument convexe,

($\mathcal{R}2$) $E = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ et, pour tout $k \geq 2$ et tous $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$,

$$A_{n_1, \dots, n_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n_1, \dots, n_k, n},$$

($\mathcal{R}3$) pour toute suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{N}_0 , il existe une suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ telle que, pour toute suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ vérifiant $e_k \in A_{n_1, \dots, n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$ converge dans E et est telle que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k e_k \in A_{n_1, \dots, n_{k_0}}, \quad \forall k_0 \in \mathbb{N}_0.$$

Remarque. Dans la définition d'un réseau \mathcal{R} , on peut supposer avoir $r_k \downarrow 0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < 1$ car on vérifie directement qu'on peut remplacer la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ par toute suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ vérifiant $s_k \in]0, r_k[$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ vu qu'alors on a

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} s_k e_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k \left(\frac{s_k}{r_k} e_k \right)$$

pour tout $k_0 \in \mathbb{N}_0$ avec $(s_k/r_k)e_k \in A_{n_1, \dots, n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. \square

Exemples. 1) *Tout espace de Banach* $(E, \|\cdot\|)$ *est à réseau*: il suffit de poser

$$A_{n_1, \dots, n_k} = b(n_1), \quad \forall k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0.$$

2) *Tout espace de Fréchet* $(E, \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\})$ *est à réseau*: il suffit de poser

$$A_{n_1, \dots, n_k} = b_{p_1}(n_1) \cap \dots \cap b_{p_k}(n_k), \quad \forall k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0. \square$$

Proposition 6.5.1 *Soit* E *un espace à réseau.*

a) *Si* Q *est un système de semi-normes sur* E , *plus faible que* $\text{cs}(E)$, *alors* (E, Q) *est aussi un espace à réseau.*

b) *Tout sous-espace vectoriel séquentiellement fermé* L *de* E *est à réseau.*

c) *Si* T *est un opérateur linéaire séquentiellement continu de* E *dans* F , *alors le sous-espace* $\text{im}(T)$ *de* F *est à réseau.*

En particulier, pour tout sous-espace vectoriel fermé L *de* E , *l'espace quotient* E/L *est à réseau.*

Preuve. Soit \mathcal{R} un réseau de E .

a) De fait, \mathcal{R} est aussi un réseau de (E, Q) .

b) De fait, $\{A \cap L : A \in \mathcal{R}\}$ est un réseau sur L .

c) De fait, $\{TA : A \in \mathcal{R}\}$ est un réseau sur $\text{im}(T)$. ■

Proposition 6.5.2 *Soit* $(E_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ *une suite d'espaces localement convexes séparés tels que* $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$.

Si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, *on a* $\text{cs}(E)|_{E_m} \leq \text{cs}(E_m)$ *sur* E_m *et si chacun des* E_m *est à réseau, alors* E *est à réseau.*

Preuve. Si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\left\{ A_{k, n_1, \dots, n_k}^{(m)} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

est un réseau de E_m , on vérifie aussitôt que les ensembles

$$A_n = E_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

et

$$A_{n_1, \dots, n_k} = A_{n_2, \dots, n_k}^{(n_1)}, \quad \forall k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0, k \geq 2,$$

constituent un réseau sur E . ■

Exercice. Etablir que tout produit dénombrable d'espaces à réseau est un espace à réseau. □

Mentionnons aussi l'information suivante.

Exercice. Si E est métrisable, établir que l'espace E'_b est à réseau.

Suggestion. En fait, si $E = (E, \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\})$, alors les ensembles

$$A_{n_1, \dots, n_k} = \{e' : |\langle \cdot, e' \rangle| \leq n_1 p_{n_1}(\cdot)\}, \quad \forall k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0,$$

constituent un réseau de E'_b . □

6.6 Théorème du graphe sq-fermé

Théorème 6.6.1 (localisation, De Wilde) *Si T est un opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé de E de Fréchet dans F à réseau, alors il existe une semi-boule b de E et $n \in \mathbb{N}_0$ tels que $Tb \subset A_n$.*

Preuve. Comme F est égal à $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, il vient $E = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-1}A_n$ et, vu le théorème de Baire, il existe un entier n_1 tel que $T^{-1}A_{n_1}$ ne soit inclus dans aucune réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Une récurrence aisée permet alors de déterminer une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{N}_0 telle que $T^{-1}A_{n_1, \dots, n_k}$ ne soit jamais inclus dans une réunion de fermés d'intérieur vide: si les n_1, \dots, n_k sont déterminés, l'égalité $T^{-1}A_{n_1, \dots, n_k} = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-1}A_{n_1, \dots, n_k, n}$ assure l'existence de n_{k+1} .

Cela étant, soit $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $]0, +\infty[$ dont l'existence est assurée par la notion de réseau.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $r_k(T^{-1}A_{n_1, \dots, n_k})^-$ est alors un fermé absolument convexe d'intérieur non vide et il existe une semi-boule b_k de E centrée en 0, incluse dans cet ensemble. Si b_k s'écrit $b_{p_{m(k)}}(s_k)$, nous pouvons supposer la suite $(m(k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ strictement croissante et avoir $s_k \downarrow 0$.

Etant donné $e \in b_1$, on a $e \in r_1(T^{-1}A_{n_1})^-$ et il existe $e_1 \in T^{-1}A_{n_1}$ tel que $e - r_1 e_1 \in b_2$. Par récurrence, on obtient une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de E telle que $e_{k_0} \in T^{-1}A_{n_1, \dots, n_{k_0}}$ et $e - \sum_{k=1}^{k_0} r_k e_k \in b_{k_0+1}$ pour tout $k_0 \in \mathbb{N}_0$. Au total, la série $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$ converge vers e dans E alors que la suite $(T(\sum_{k=1}^M r_k e_k) = \sum_{k=1}^M r_k T e_k)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge dans F car F est à réseau. Si f désigne la limite de la série $\sum_{k=1}^{\infty} r_k T e_k$, on a $Te = f$ car T est séquentiellement fermé. Au total, nous avons ainsi établi que $Tb_1 \subset A_{n_1}$, ce qui suffit. ■

Théorème 6.6.2 (graphe sq-fermé, De Wilde) *Tout opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé d'un espace ultrabornologique dans un espace à réseau est continu.*

Preuve. Soit T un opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé de E ultrabornologique dans F ayant le réseau $\{A_{n_1, \dots, n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0\}$.

a) Supposons d'abord que E est un espace de Fréchet.

Soit b une semi-boule de F centrée en 0. On vérifie alors directement que les ensembles

$$\begin{aligned} A'_n &= nb, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ A'_{n_1, \dots, n_k} &= (n_1 b) \cap A_{n_2, \dots, n_k}, \quad \forall k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0, k \geq 2, \end{aligned}$$

constituent également un réseau de F : pour les conditions $(\mathcal{R}1)$ et $(\mathcal{R}2)$, c'est trivial. Pour la condition $(\mathcal{R}3)$, on vérifie que si la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $]0, +\infty[$ convient pour la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, alors la suite $(r'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ définie par $r'_1 > 0$, $r'_k = r_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$ convient pour la suite $(n'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ où $n'_k = n_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$, pour autant que $\sum_{k=1}^{\infty} r'_k \leq 1$, ce qui peut facilement être réalisé: il suffit d'exiger que $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < 1$.

Cela étant, le théorème de localisation procure une semi-boule b_0 de E et $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tels que $Tb_0 \subset n_0 b$, ce qui suffit.

b) Passons au cas général: E est ultrabornologique.

Pour tout disque de Banach B de E , E_B est un espace de Banach et $T|_{E_B} : E_B \rightarrow F$ est un opérateur linéaire dont le graphe est séquentiellement fermé car

$$\left. \begin{array}{l} e_m \rightarrow e_0 \text{ dans } E_B \\ Te_m \rightarrow f_0 \text{ dans } F \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_m \rightarrow e_0 \text{ dans } E \\ Te_m \rightarrow f_0 \text{ dans } F \end{array} \right\} \Rightarrow Te_0 = f_0$$

donc est continu vu a). Dès lors TB est un borné de F .

Il s'ensuit que, pour tout $q \in \text{cs}(F)$, $q(T \cdot)$ est une semi-norme sur E qui est bornée sur les disques de Banach de E . Comme E est ultrabornologique, $q(T \cdot)$ est donc une semi-norme continue sur E , ce qui suffit. ■

Théorème 6.6.3 (opérateur ouvert) *Toute surjection linéaire continue entre espaces de Fréchet est ouverte.*

En particulier toute bijection linéaire continue entre espaces de Fréchet est un isomorphisme.

Preuve. Soit $T : E \rightarrow F$ une surjection linéaire continue entre deux espaces de Fréchet. L'opérateur $T^\sim : E/\ker(T) \rightarrow F$ est alors une bijection linéaire continue entre deux espaces de Fréchet et il suffit d'appliquer le théorème du graphe séquentiellement fermé pour obtenir que $T^{\sim -1} : F \rightarrow E/\ker(T)$ est continu, ce qui suffit. ■

Appendice A

L'axiome du choix et quelques formes équivalentes

Un *espace préordonné* est un ensemble non vide A muni d'un *préordre*, c'est-à-dire d'une relation interne \leq telle que

$$\begin{aligned} a &\leq a, \\ (a \leq b, b \leq c) &\implies (a \leq c). \end{aligned}$$

Il est noté (A, \leq) ou même tout simplement A si aucune confusion sur \leq n'est possible.

Un *espace ordonné* est un ensemble non vide A muni d'un *ordre*, c'est-à-dire d'un préordre \leq tel que

$$(a \leq b, b \leq a) \implies (a = b).$$

Un élément a de l'espace préordonné A est *maximal* (resp. *minimal*) si

$$a \leq b \implies b \leq a \quad (\text{resp. } b \leq a \implies a \leq b).$$

Une partie B de l'espace préordonné (A, \leq) est *totalelement ordonnée* si, pour tous $a, b \in B$, l'une des deux majorations $a \leq b$, $b \leq a$ a lieu.

Soit B une partie de l'espace préordonné (A, \leq) . L'élément a de A est un *majorant* (resp. un *minorant*) de B si on a $b \leq a$ (resp. $a \leq b$) pour tout $b \in B$.

Un *espace bien ordonné* est un espace ordonné où toute partie non vide contient un minorant.

Cela étant, on peut établir (cf. [5], pp 4–9) que les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) Axiome du choix: *tout produit non vide d'ensembles non vides est non vide*, c'est-à-dire que, si J est un ensemble non vide et si, pour tout $j \in J$, A_j est un

ensemble non vide, alors l'ensemble $\prod_{j \in J} A_j$ est non vide,

(2) Théorème de maximalité de Hausdorff: *tout espace préordonné contient un sous-espace totalement ordonné maximal,*

(3) Lemme de Zorn: *si toute partie totalement ordonnée de l'espace préordonné A est majorée, alors A contient un élément maximal,*

(4) Théorème du bon ordre de Zermelo: *tout ensemble non vide peut être muni d'un bon ordre.*

Appendice B

Espaces de Hilbert

Convention. Dans cet appendice, à partir du paragraphe B.2 et sauf mention explicite du contraire, H désigne un espace de Hilbert.

B.1 Définition générale

Définition. Un espace *pré-hilbertien* $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — on écrit aussi L si aucune confusion sur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est possible — est la donnée d'un espace vectoriel L et d'un *produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur L , c'est-à-dire d'une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{K} \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$$

qui jouit des cinq propriétés suivantes:

- $\langle f, f \rangle \geq 0$
- $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$
- $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
- $\langle cf, g \rangle = c \langle f, g \rangle, \quad \forall c \in \mathbb{K}$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

Bien sûr, pour tous $J, K \in \mathbb{N}_0$, tous c_1, \dots, c_J et $d_1, \dots, d_K \in \mathbb{K}$ et tous f_1, \dots, f_J et $g_1, \dots, g_K \in L$, on a alors

$$\left\langle \sum_{j=1}^J c_j f_j, \sum_{k=1}^K d_k g_k \right\rangle = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K c_j \overline{d_k} \langle f_j, g_k \rangle.$$

Théorème B.1.1 Si $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace pré-hilbertien, l'application

$$\|\cdot\| : L \rightarrow [0, +\infty[\quad f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

est une norme sur L pour laquelle on a

a) la loi du parallélogramme

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

b) la formule de polarisation

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 i^j \|f + i^j g\|^2 \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C},$$

c) l'inégalité de Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad \forall f, g \in L.$$

Preuve. On obtient directement a) et b) en recourant partout à $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$. De plus, il est clair que

$$\begin{cases} \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \\ \|cf\| = |c| \|f\|, \quad \forall c \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Etablissons à présent l'inégalité de Schwarz. Pour tous $c, d \in \mathbb{K}$ et $f, g \in L$, il vient

$$\begin{aligned} 0 \leq \|cf + dg\|^2 &= \langle cf + dg, cf + dg \rangle \\ &\leq |c|^2 \|f\|^2 + c\bar{d} \langle f, g \rangle + \bar{c}d \langle g, f \rangle + |d|^2 \|g\|^2 \end{aligned}$$

donc, plus particulièrement pour $c = \|g\|^2$ et $d = -\langle f, g \rangle$,

$$0 \leq \|g\|^2 (\|f\|^2 \|g\|^2 - |\langle f, g \rangle|^2),$$

ce qui permet de conclure aussitôt.

Cela étant, l'inégalité de Minkowski

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

résulte de ce que

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque. Vu l'inégalité de Schwarz, pour tout élément f d'un espace préhilbertien L , $\langle \cdot, f \rangle$ est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace normé L . Cette remarque sera sensiblement améliorée au paragraphe B.6. \square

Proposition B.1.2 *Si, dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$, la loi du parallélogramme*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2), \quad \forall f, g \in E,$$

a lieu, alors E est un espace pré-hilbertien.

Plus précisément,

a) *si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2)$$

est alors un produit scalaire sur E tel que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ pour tout $f \in E$.

b) *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^3 i^j \|f + i^j g\|^2$$

est alors un produit scalaire sur E tel que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ pour tout $f \in E$.

Preuve. Nous allons établir ce résultat dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ s'établit de manière tout à fait analogue.

i) Il est clair qu'on a

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &\geq 0, \quad \forall f \in E, \\ \langle f, f \rangle &= 0 \iff f = 0, \\ \langle f, g \rangle &\in \mathbb{R} \quad \text{donc} \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}, \quad \forall f, g \in E. \end{aligned}$$

ii) Prouvons à présent que, pour tous $f, g, h \in E$,

$$\langle f + g, h \rangle = \frac{1}{4}(\|f + g + h\|^2 - \|f + g - h\|^2)$$

est égal à

$$\langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle = \frac{1}{4}(\|f + h\|^2 - \|f - h\|^2 + \|g + h\|^2 - \|g - h\|^2).$$

Vu la loi du parallélogramme, il vient

$$\begin{aligned} \|f + g + h\|^2 &= 2\|f + h\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f + h - g\|^2, \\ \|f + g - h\|^2 &= 2\|f - h\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f - h - g\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \|f + g + h\|^2 - \|f + g - h\|^2 \\ &= 2\|f + h\|^2 - 2\|f - h\|^2 - \|f + h - g\|^2 + \|f - h - g\|^2. \end{aligned}$$

Une nouvelle application de la loi du parallélogramme donne

$$\begin{aligned} \|f + h - g\|^2 &= 2\|h - g\|^2 + 2\|f\|^2 - \|h - g - f\|^2 \\ \|f - h - g\|^2 &= 2\|h + g\|^2 + 2\|f\|^2 - \|h + g + f\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \|f + g + h\|^2 - \|f + g - h\|^2 \\ &= 2\|f + h\|^2 - 2\|f - h\|^2 - 2\|h - g\|^2 + 2\|h + g\|^2 \\ &\quad + \|f + g - h\|^2 - \|f + g + h\|^2, \end{aligned}$$

ce qui suffit.

iii) Enfin établissons que, pour tous $f, g \in E$ et $r \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle rf, g \rangle = r \langle f, g \rangle.$$

C'est trivial pour $r = 0$.

Remarquons que c'est aussi trivial pour $r = 1$. Vu ii), une récurrence directe établit alors que l'égalité a lieu pour tout $r \in \mathbb{N}_0$. On en déduit aussitôt que l'égalité a aussi lieu pour tout $r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}_0$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$ car si c'est vrai pour r , c'est bien sûr vrai pour $-r$. On conclut alors directement par continuité. ■

Définition. Un espace pré-hilbertien est donc un espace normé; c'est un *espace de Hilbert* s'il est séquentiellement complet.

Tout espace de Hilbert est donc un espace de Banach.

Exemples. Il est clair que les espaces \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , ℓ^2 et $L^2(E)$ munis de leurs produits scalaires canoniques sont des espaces de Hilbert. □

B.2 Suites orthogonales

Définition. Deux éléments f et g de l'espace de Hilbert H sont *orthogonaux* et on écrit $f \perp g$ si $\langle f, g \rangle = 0$. Il est clair qu'on a alors $g \perp f$ également.

Proposition B.2.1 Dans un espace de Hilbert H ,

- a) toute combinaison linéaire d'éléments orthogonaux à $f \in H$ est aussi orthogonale à f .
 b) si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de H converge dans H vers f et si chacun des f_m est orthogonal à $g \in H$, alors f est orthogonal à g . ■

Théorème B.2.2 (Pythagore) Soit H un espace de Hilbert.

- a) Pour tout nombre fini d'éléments f_1, \dots, f_J de H orthogonaux deux à deux, on a

$$\left\| \sum_{j=1}^J f_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^J \|f_j\|^2.$$

- b) Si $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite d'éléments de H qui sont orthogonaux deux à deux, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ converge dans H si et seulement si la série numérique réelle à termes positifs $\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|^2$ converge, auquel cas on a

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} f_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|^2.$$

Preuve. a) est immédiat vu que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^J f_j \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^J f_j, \sum_{k=1}^J f_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \langle f_j, f_k \rangle = \sum_{j=1}^J \langle f_j, f_j \rangle = \sum_{j=1}^J \|f_j\|^2. \end{aligned}$$

- b) Vu a), pour tous $r, s \in \mathbb{N}_0$ tels que $r < s$, il vient

$$\left\| \sum_{m=r}^s f_m \right\|^2 = \sum_{m=r}^s \|f_m\|^2,$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ est de Cauchy dans H si et seulement si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|^2$ est de Cauchy. La conclusion est alors immédiate. ■

B.3 Suites orthonormées

Définition. Une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace de Hilbert H est *orthonormée* si ses éléments sont normés et orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si et seulement si on a $\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$.

Théorème B.3.1 Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée de l'espace de Hilbert H .

a) Si $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de \mathbb{K} , alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m f_m$ converge dans H si et seulement si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge, auquel cas il vient

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m f_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2.$$

b) Pour tout $f \in H$, il existe une suite $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{K} et $g \in H$ tels que

- i) $g \perp f_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,
- ii) la série $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge,
- iii) $f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m f_m + g$.

En fait, cette décomposition est unique et on a

$$\begin{cases} c_m = \langle f, f_m \rangle, & \forall m \in \mathbb{N}_0, \\ \|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle f, f_m \rangle|^2 + \|g\|^2. \end{cases}$$

Preuve. a) est un cas particulier du théorème de Pythagore car les $c_m f_m$ sont orthogonaux deux à deux et tels que $\|c_m f_m\| = |c_m|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

b) Si une telle décomposition existe, elle est unique et c_m est égal à $\langle f, f_m \rangle$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ car on a alors

$$\langle f, f_m \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j, f_m \right\rangle + \langle g, f_m \rangle = \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^J c_j \langle f_j, f_m \rangle = c_m.$$

Cela étant, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons

$$g_M = f - \sum_{m=1}^M \langle f, f_m \rangle f_m.$$

On vérifie de suite que, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, la fonction g_M est orthogonale aux f_1, \dots, f_M ; cela implique l'égalité

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^M |\langle f, f_m \rangle|^2 + \|g_M\|^2, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0.$$

Il s'ensuit qu'on a $\sum_{m=1}^M |\langle f, f_m \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ et ceci assure que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \langle f, f_m \rangle f_m$ converge dans H . Dès lors, la suite $(g_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge dans H vers un élément g tel que

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, f_m \rangle f_m + g.$$

Enfin, vu la continuité du produit scalaire, g est orthogonal à chacun des f_m . D'où la conclusion. ■

B.4 Suites orthonormées totales

Définition. La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace de Hilbert H est *totale* si 0 est le seul élément de H qui soit orthogonal à chacun des f_m .

Théorème B.4.1 Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée totale de l'espace de Hilbert H .

a) **Développement en série de Fourier.** On a

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, f_m \rangle f_m, \quad \forall f \in H.$$

b) **Formules de Parseval.** On a

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle f, f_m \rangle|^2, \quad \forall f \in H,$$

et

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, f_m \rangle \overline{\langle g, f_m \rangle}, \quad \forall f, g \in H.$$

Preuve. a) et la première formule de Parseval résultent aussitôt du paragraphe précédent et du fait que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est totale.

La deuxième formule de Parseval est alors une conséquence immédiate de la continuité du produit scalaire car on a successivement

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=1}^M \langle f, f_j \rangle f_j, \sum_{k=1}^M \langle g, f_k \rangle f_k \right\rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \langle f, f_m \rangle \overline{\langle g, f_m \rangle} = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, f_m \rangle \overline{\langle g, f_m \rangle}. \blacksquare \end{aligned}$$

Critère B.4.2 (Totalité) Une suite orthonormée $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de l'espace de Hilbert H est totale dans cet espace si et seulement si, pour tout $f \in H$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ et des nombres $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{K}$ tels que

$$\left\| f - \sum_{m=1}^M c_m f_m \right\| \leq \varepsilon.$$

Preuve. La nécessité de la condition résulte aussitôt du théorème précédent.

La condition est suffisante. Soit g un élément de H , orthogonal à chacun des f_m . Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ et des $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{K}$ tels que

$$\left\| g - \sum_{m=1}^M c_m f_m \right\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{m=1}^M |c_m|^2 \leq \varepsilon^2$$

donc tels que $\|g\| \leq \varepsilon$, ce qui suffit pour conclure. ■

B.5 Sous-espaces orthogonaux

Théorème B.5.1 *Si C est une partie convexe et fermée de l'espace de Hilbert H , alors la distance de tout $f \in H$ à C est réalisée en un point unique de C .*

Preuve. Soit $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de C telle que $\|f - g_m\| \rightarrow d(f, C)$. Une telle suite est de Cauchy car, vu la loi du parallélogramme,

$$\begin{aligned} \|g_r - g_s\|^2 &= \|(g_r - f) + (f - g_s)\|^2 \\ &= 2\|g_r - f\|^2 + 2\|g_s - f\|^2 - 4\|(g_r + g_s)/2 - f\|^2 \\ &\leq 2\|g_r - f\|^2 + 2\|g_s - f\|^2 - 4d^2(f, C) \end{aligned}$$

où le second membre tend vers 0. Cette suite converge donc; soit g_f sa limite — on a alors $g_f \in C$ et il est clair, vu la preuve que nous venons d'effectuer, que g_f ne dépend pas de la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ choisie et réalise $d(f, C)$. ■

Définition. Soit H un espace de Hilbert. Le sous-espace orthogonal L^\perp d'un sous-espace vectoriel L de H est défini selon

$$L^\perp = \{ f \in H : \langle f, l \rangle = 0, \forall l \in L \}$$

Il s'agit bien sûr d'un sous-espace vectoriel fermé de H tel que $L^\perp = L^{-\perp}$.

Théorème B.5.2 *Tout sous-espace vectoriel fermé L d'un espace de Hilbert H admet L^\perp comme complément topologique.*

Tout $f \in H$ admet donc une décomposition unique $f = l_f + g_f$ avec $l_f \in L$ et $g_f \in L^\perp$, où en fait l_f est l'élément unique de L réalisant la distance de f à L .

De plus, H/L est isométriquement isomorphe à L^\perp donc est un espace de Hilbert.

Preuve. On a $L \cap L^\perp = \{0\}$ car $\|f\| = 0$ implique $f = 0$.

On a aussi $L + L^\perp = H$. De fait, vu le Théorème B.5.1, nous savons que, pour tout $f \in H$, la distance de f à L est réalisée en un point unique $l_f \in L$. Pour

conclure, il suffit de prouver que $g_f = f - l_f$ appartient à L^\perp . Or, pour tous $h \in L$ et $c \in \mathbb{K}$, on a $\|g_f + ch\| \geq \|g_f\|$ donc

$$\|g_f\|^2 \leq \|g_f\|^2 + \bar{c} \langle g_f, h \rangle + c \langle h, g_f \rangle + |c|^2 \|h\|^2$$

et, en particulier pour $c = -t \langle g_f, h \rangle$ avec $t > 0$,

$$0 \leq t |\langle g_f, h \rangle|^2 (t \|h\|^2 - 2),$$

ce qui, si on fait tendre t vers 0, exige $\langle g_f, h \rangle = 0$.

Cela étant, le projecteur associé $P: H \rightarrow H$ est continu car on a

$$\|g_f\| = \|f - l_f\| = d(f, L) \leq \|f\|, \quad \forall f \in H.$$

Il s'ensuit que $\tilde{P}: H/L \rightarrow L^\perp$ est une bijection continue et ouverte mais on a mieux: c'est une isométrie vu que

$$\|\tilde{f}\|_{H/L} = \inf_{l \in L} \|f + l\| = \|f - l_f\| = \|g_f\| = \|\tilde{P}\tilde{f}\|_{L^\perp}, \quad \forall f \in H. \blacksquare$$

Proposition B.5.3 *Pour tout sous-espace vectoriel L d'un espace de Hilbert H , on a $L^{\perp\perp} = L^-$.*

Preuve. Il est clair que L^- est inclus dans $L^{\perp\perp}$. Inversement, tout $f \in H$ s'écrit de manière unique $f = l_f + g_f$ avec $l_f \in L^-$ et $g_f \in L^\perp$. Cela étant, $f \in L^{\perp\perp}$ implique $f \perp L^\perp$ donc $g_f = 0$ et ainsi $f = l_f$ appartient à L^- . \blacksquare

Corollaire B.5.4 *Un sous-espace vectoriel L d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si $L^\perp = \{0\}$.* \blacksquare

B.6 Fonctionnelles linéaires continues

La représentation des fonctionnelles linéaires continues sur un espace de Hilbert est régie par le résultat suivant.

Théorème B.6.1 (Riesz) *Une fonctionnelle τ sur un espace de Hilbert H est linéaire et continue si et seulement s'il existe un élément f_τ de H tel que $\tau(\cdot) = \langle \cdot, f_\tau \rangle$, auquel cas cet élément f_τ est unique.*

Preuve. La suffisance de la condition résulte aussitôt de la notion de produit scalaire et de la formule de Schwarz. L'unicité de la représentation est claire.

La condition est nécessaire. Si $\ker(\tau) = H$, alors $f_\tau = 0$ convient. Sinon, soit g un élément non nul de $\ker(\tau)^\perp$. Pour tout $f \in H$, on a bien sûr

$$f - \frac{\tau(f)}{\tau(g)}g \in \ker(\tau)$$

donc, par produit scalaire avec $g \in \ker(\tau)^\perp$,

$$\langle f, g \rangle = \frac{\|g\|^2}{\tau(g)}\tau(f)$$

et ainsi

$$f_\tau = \frac{\overline{\tau(g)}}{\|g\|^2}g$$

convient. ■

Remarque. Soit L un espace pré-hilbertien. En tant qu'espace normé, il a un complété \hat{L} . On vérifie alors de suite que \hat{L} est un espace de Hilbert $(\hat{L}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tel que $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$ pour tous $f, g \in L$. Ainsi L "apparaît" comme étant un sous-espace linéaire dense d'un espace de Hilbert. Dès lors l'énoncé suivant couplé au théorème de Riesz règle en quelque sorte la représentation des fonctionnelles linéaires continues sur un espace pré-hilbertien.

Proposition B.6.2 *Soit L un sous-espace linéaire d'un espace de Hilbert H .*

Alors L^- est un espace de Hilbert et toute fonctionnelle linéaire continue sur L admet un prolongement linéaire continu unique sur L^- , de même norme. ■

B.7 Convergence faible

Proposition B.7.1 *De toute suite bornée d'un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite a -convergente.*

En particulier, tout espace de Hilbert est a -sq-complet.

Preuve. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite bornée d'un espace de Hilbert H . Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, la suite $(\langle f_M, f_m \rangle)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est bornée. Par extraction diagonale, on peut donc extraire une sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que la suite $(\langle f_M, f_{k(m)} \rangle)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge pour tout $M \in \mathbb{N}_0$.

Etablissons qu'en fait, pour tout $f \in H$, la suite $(\langle f, f_{k(m)} \rangle)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge. Cela est clair pour tout élément f de $L = \text{span}(\{f_m : m \in \mathbb{N}_0\})$. Etablissons-le pour tout $f \in L^-$. La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ étant bornée, il existe $C > 0$ tel que $\|f_m\| \leq C$ pour

tout $m \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l \in L$ tel que $\|f - l\| \leq \varepsilon/(3C)$ et cela entraîne

$$\begin{aligned} |\langle f, f_{k(r)} - f_{k(s)} \rangle| &\leq |\langle f - l, f_{k(r)} \rangle| + |\langle l, f_{k(r)} - f_{k(s)} \rangle| + |\langle l - f, f_{k(s)} \rangle| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + |\langle l, f_{k(r)} - f_{k(s)} \rangle|, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. Enfin tout $f \in H$ admet une décomposition unique $f = l_f + g_f$ avec $l_f \in L^-$ et $g_f \in L^\perp$, ce qui suffit pour conclure.

Pour tout $f \in H$, désignons par $\tau(f)$ la limite de la suite $(\langle f, f_{k(m)} \rangle)_{m \in \mathbb{N}_0}$. Il est clair que τ est une fonctionnelle linéaire sur H telle que $|\tau(\cdot)| \leq C \|\cdot\|$. Le théorème de Riesz permet alors de conclure aussitôt. ■

Exercice. Dans un espace de Hilbert, établir qu'une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers f si et seulement si elle converge faiblement vers f et donne lieu à $\|f_m\| \rightarrow \|f\|$.

Suggestion. La nécessité de la condition est connue. La suffisance de la condition résulte aussitôt de ce que

$$\begin{aligned} \|f_m\|^2 - \|f_m - f\|^2 - \|f\|^2 &= \langle f_m, f_m \rangle - \langle f_m - f, f_m - f \rangle - \langle f, f \rangle \\ &= \langle f_m - f, f \rangle + \langle f, f_m - f \rangle. \square \end{aligned}$$

Théorème B.7.2 (Banach, Saks) Si la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ d'un espace de Hilbert converge faiblement vers f , alors il en existe une sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ telle que la suite des moyennes $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{k(m)}$ converge en norme vers f .

Preuve. Quitte à remplacer chaque f_m par $f_m - f$, il est clair qu'il suffit d'établir le résultat dans le cas où $f = 0$.

La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ étant faiblement bornée est bornée; posons

$$C = \sup \{ \|f_m\| : m \in \mathbb{N}_0 \}.$$

Cela étant, construisons une sous-suite $(k(m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ de proche en proche de la manière suivante. Nous posons $k(1) = 1$ puis, si les $k(1), \dots, k(m-1)$ sont obtenus, nous prenons pour $k(m)$ le premier entier $> k(m-1)$ tel que

$$|\langle f_{k(j)}, f_{k(m)} \rangle| \leq \frac{1}{m}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Dans ces conditions, il vient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{k(j)} \right\|^2 &\leq \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m |\langle f_{k(j)}, f_{k(l)} \rangle| \\ &\leq \frac{1}{m^2} \left(\sum_{j=1}^m \|f_{k(j)}\|^2 + 2 \sum_{j=2}^m \sum_{l=1}^{j-1} |\langle f_{k(j)}, f_{k(l)} \rangle| \right) \\ &\leq \frac{1}{m^2} (mC^2 + 2(m-1)) \leq \frac{C^2 + 2}{m}, \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure. ■

B.8 Opérateurs linéaires continus

Rappel. Si H et K sont des espaces de Hilbert, nous savons que l'espace $L(H, K)$ des opérateurs linéaires continus de H dans K muni de la norme

$$\|T\| = \sup \{ \|Tf\|_K : \|f\|_H = 1 \} = \sup \{ |\langle Th, k \rangle| : \|h\|_H = \|k\|_K = 1 \}$$

est un espace de Banach.

Définition. Si H et K sont des espaces de Hilbert, la notion d'opérateur adjoint de $T \in L(H, K)$ est plutôt introduite comme suit. Pour tout $k \in K$, $\langle T \cdot, k \rangle$ est une fonctionnelle linéaire continue sur H . Vu le théorème de Riesz, il existe donc un élément unique $T'k$ de H tel que $\langle T \cdot, k \rangle = \langle \cdot, T'k \rangle$. Cela étant, l'adjoint T' de T est défini comme étant une application de K dans H .

On vérifie aussitôt qu'il s'agit d'un opérateur linéaire continu de K dans H tel que $\|T'\| = \|T\|$.

Exercice. Si K et H sont des espaces de Hilbert, établir qu'un opérateur linéaire $T: H \rightarrow K$ est continu si et seulement s'il existe un opérateur linéaire $R: K \rightarrow H$ tel que $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Rg \rangle$ pour tous $f \in H$ et $g \in K$.

Suggestion. La nécessité de la condition vient d'être établie.

Etablissons sa suffisance. Si T n'est pas continu, il existe une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de H telle que $\|f_m\| = 1$ et $\|Tf_m\| \geq m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Mais alors, de

$$|\langle Tf_m, g \rangle| = |\langle f_m, Rg \rangle| \leq \|Rg\|, \quad \forall g \in K,$$

nous tirons que la suite $(Tf_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est faiblement bornée donc bornée. D'où une contradiction. □

Proposition B.8.1 Si H et K sont des espaces de Hilbert, l'application

$$': L(H, K) \rightarrow L(K, H) \quad T \mapsto T'$$

est antilinéaire, isométrique et telle que

$$T'' = T \quad \text{et} \quad \|T'T\| = \|T\|^2 = \|TT'\|.$$

Preuve. Avec des notations claires par elles-mêmes, on vérifie directement que

$$(cT)' = \bar{c}T', \quad (T + R)' = T' + R' \quad \text{et} \quad \|T\| = \|T'\|.$$

De plus, on a $T'' = T$ vu que

$$\langle T''h, k \rangle = \overline{\langle k, T''h \rangle} = \overline{\langle T'k, h \rangle} = \langle h, T'k \rangle = \langle Th, k \rangle.$$

Ainsi l'application $'$ est une isométrie antilinéaire. Pour conclure, il suffit alors de noter, par exemple, que

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{\|h\|_H=1} \|Th\|^2 = \sup_{\|h\|_H=1} \langle Th, Th \rangle = \sup_{\|h\|_H=1} \langle h, T'Th \rangle \\ &\leq \|T'T\| \leq \|T'\| \|T\| = \|T\|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Rappel. Si H est un espace de Hilbert, nous savons que l'espace $L(H)$ des opérateurs linéaires continus de H dans H muni de la norme

$$\|T\| = \sup \{ \|Tf\| : \|f\| = 1 \}$$

est une algèbre de Banach.

Théorème B.8.2 *Si H est un espace de Hilbert, l'application*

$$': L(H) \rightarrow L(H) \quad T \mapsto T'$$

est antilinéaire, isométrique et telle que

$$T'' = T, \quad \|T'T\| = \|T\|^2 = \|TT'\| \quad \text{et} \quad (TR)' = R'T'. \blacksquare$$

Voici deux résultats généraux; nous n'en utiliserons plus tard que des cas particuliers qui s'étendent aux \mathbb{R} -espaces de Hilbert (cf. Proposition B.9.5).

Proposition B.8.3 *Si H est un \mathbb{C} -espace de Hilbert et si $T \in L(H)$ est tel que $\langle Tf, f \rangle = 0$ pour tout $f \in H$, alors $T = 0$.*

Preuve. De

$$0 = \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle = 2(\langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle)$$

et

$$0 = \langle T(if+g), if+g \rangle - \langle T(if-g), if-g \rangle = 2i(\langle Tf, g \rangle - \langle Tg, f \rangle),$$

on tire aussitôt $\langle Tf, g \rangle = 0$ pour tous $f, g \in H$, ce qui suffit. \blacksquare

Proposition B.8.4 *Si H est un \mathbb{C} -espace de Hilbert et si $T \in L(H)$ et $C > 0$ sont tels que $|\langle Tf, f \rangle| \leq C \|f\|^2$ pour tout $f \in H$, alors on a*

$$|\langle Tf, g \rangle| + |\langle f, Tg \rangle| \leq 2C \|f\| \|g\|, \quad \forall f, g \in H.$$

Preuve. Pour tous $f, g \in H$, de

$$2(\langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle) = \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle,$$

on tire

$$\begin{aligned} 2|\langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle| &\leq C(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) \\ &\leq 2C(\|f\|^2 + \|g\|^2). \end{aligned}$$

En remplaçant f par $re^{i\varphi}f$ et g par g/r avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ et en multipliant ensuite par $e^{i\theta}$ ce qui figure entre les barres de module dans le premier membre, on obtient

$$|e^{i\gamma} \langle Tf, g \rangle + e^{i\omega} \langle Tg, f \rangle| \leq C(r^2 \|f\|^2 + \|g\|^2 / r^2)$$

pour tous $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$. Ceci donne aussitôt lieu à

$$\begin{aligned} |\langle Tf, g \rangle| + |\langle Tg, f \rangle| &\leq C \inf_{r>0} (r^2 \|f\|^2 + \|g\|^2 / r^2) \\ &\leq 2C \|f\| \|g\|. \blacksquare \end{aligned}$$

B.9 Opérateurs hermitiens

Définition. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur *hermitien* — on dit aussi *symétrique* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — de H dans H est un opérateur linéaire continu tel que $T = T'$.

Remarque. Vu l'Exercice B.8, si H est un espace de Hilbert, un opérateur linéaire $T: H \rightarrow H$ est hermitien si et seulement si on a $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$ pour tous $f, g \in H$. \square

Exemple. L'exemple fondamental des opérateurs hermitiens est donné par $r \operatorname{Id}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Définition. Un projecteur linéaire P sur l'espace de Hilbert H est *orthogonal* si $\operatorname{im}(P) \perp \operatorname{ker}(P)$, c'est-à-dire si et seulement si $\langle Pf, g - Pg \rangle = 0$ pour tous $f, g \in H$.

Proposition B.9.1 *Un projecteur linéaire continu P sur un espace de Hilbert H est orthogonal si et seulement s'il est hermitien.*

Preuve. La condition est nécessaire vu que

$$\begin{aligned} \langle Pf, g \rangle &= \langle Pf, g - Pg + Pg \rangle = \langle Pf, Pg \rangle \\ &= \langle Pf - f + f, Pg \rangle = \langle f, Pg \rangle \end{aligned}$$

a alors lieu pour tous $f, g \in H$.

La suffisance de la condition résulte aussitôt de ce qu'alors

$$\langle Pf, g - Pg \rangle = \langle f, Pg - P^2g \rangle = 0, \quad \forall f, g \in H. \blacksquare$$

Proposition B.9.2 *Si H est un espace de Hilbert, alors*

$$\{T \in L(H) : T \text{ est hermitien}\}$$

est un sous-espace \mathbb{R} -vectoriel fermé de $L(H)$.

De plus, tout produit fini d'opérateurs hermitiens commutatifs de H dans H est un opérateur hermitien.

En particulier, pour tout polynôme P à coefficients réels sur \mathbb{R} et tout opérateur $T \in L(H)$ hermitien, $P(T)$ est un opérateur hermitien de H dans lui-même. ■

Critère B.9.3 *Si H est un \mathbb{C} -espace de Hilbert, $T \in L(H)$ est hermitien si et seulement si $\langle Tf, f \rangle$ est un nombre réel pour tout $f \in H$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si T est hermitien, il vient

$$\overline{\langle Tf, f \rangle} = \overline{\langle f, T'f \rangle} = \overline{\langle f, Tf \rangle} = \langle Tf, f \rangle.$$

La condition est suffisante. De fait,

$$\langle Tf, f \rangle = \overline{\langle Tf, f \rangle} = \overline{\langle f, T'f \rangle} = \langle T'f, f \rangle$$

implique $\langle (T - T')f, f \rangle = 0$ pour tout $f \in H$, donc $T = T' = 0$, vu la Proposition B.8.3. ■

Théorème B.9.4 *Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout $T \in L(H)$ hermitien, on a*

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Tf, f \rangle|.$$

Preuve. Il est clair que l'inégalité " \geq " a lieu. Inversement, posons

$$C = \sup_{\|f\|=1} |\langle Tf, f \rangle|.$$

Pour tous $f, g \in H$, il vient

$$\langle T(f \pm g), f \pm g \rangle = \langle Tf, f \rangle \pm 2\Re \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, g \rangle$$

donc

$$\Re \langle Tf, g \rangle = \frac{1}{4} (\langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle).$$

Dès lors, si on a en plus $\|f\| = \|g\| = 1$ et si on pose $c = e^{i\arg \langle Tf, g \rangle}$, il vient

$$\begin{aligned} |\langle Tf, g \rangle| &= \langle Tf, cg \rangle = \Re \langle Tf, cg \rangle \\ &\leq \frac{C}{4} (\|f + cg\|^2 + \|f - cg\|^2) \\ &\leq \frac{C}{4} (2\|f\|^2 + 2\|g\|^2) \leq C, \end{aligned}$$

ce qui suffit. ■

Voici le résultat qui étend les Propositions B.8.3 et B.8.4 aux \mathbb{R} -espaces de Hilbert dans le cas des opérateurs hermitiens.

Proposition B.9.5 *Soit H un \mathbb{R} -espace de Hilbert.*

a) *Si $T \in L(H)$ est hermitien et tel que $\langle Tf, f \rangle = 0$ pour tout $f \in H$, alors $T = 0$.*

b) *Si $T \in L(H)$ est hermitien et s'il existe $C > 0$ tel que $|\langle Tf, f \rangle| \leq C \|f\|^2$ pour tout $f \in H$, alors on a $|\langle Tf, g \rangle| \leq C \|f\| \|g\|$ pour tous $f, g \in H$ donc $\|T\| \leq C$.*

Preuve. a) De fait, pour tous $f, g \in H$, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(f+g), f+g \rangle = \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle + \langle Tg, g \rangle \\ &= \langle Tf, g \rangle + \langle g, Tf \rangle = 2 \langle Tf, g \rangle. \end{aligned}$$

b) Pour tous $f, g \in H$, de

$$\langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle = 4 \langle Tf, g \rangle,$$

on tire

$$4 |\langle Tf, g \rangle| \leq C(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) \leq 2C(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

et, en remplaçant f par rf et g par g/r , il vient

$$2 |\langle Tf, g \rangle| \leq C \inf_{r>0} (r^2 \|f\|^2 + \|g\|^2 / r^2) = 2C \|f\| \|g\| \blacksquare$$

B.10 Opérateurs hermitiens positifs

Définition. Un opérateur hermitien $T \in L(H)$ est *positif* si on a $\langle Tf, f \rangle \geq 0$ pour tout $f \in H$.

Si les opérateurs hermitiens $T, R \in L(H)$ sont hermitiens et si $T - R$ est positif, on écrit $T \geq R$.

Exemples. a) Bien sûr, pour tout $r \geq 0$, rid est un opérateur hermitien et positif.

b) Pour tout opérateur hermitien $T \in L(H)$, T^2 est un opérateur hermitien et positif.

c) Si les opérateurs hermitiens $T, R \in L(H)$ commutent et si T est positif, alors TR^2 est un opérateur hermitien et positif. De fait, on a alors

$$\langle TR^2 f, f \rangle = \langle RTRf, f \rangle = \langle TRf, Rf \rangle \geq 0, \quad \forall f \in H.$$

Proposition B.10.1 Soient H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur hermitien.

a) On a

$$-\|T\| \text{id} \leq T \leq \|T\| \text{id}.$$

b) Inversement, pour tout $C \geq 0$ tel que $-C \text{id} \leq T \leq C \text{id}$, on a $\|T\| \leq C$.

Preuve. a) Pour tout $f \in H$, $\langle Tf, f \rangle$ est un nombre réel tel que $|\langle Tf, f \rangle| \leq \|T\| \|f\|^2$.

b) est immédiat car, pour tout $f \in H$ tel que $\|f\| = 1$, on a

$$C \text{id} - T \geq 0 \iff \langle (C \text{id} - T)f, f \rangle \geq 0 \iff \langle Tf, f \rangle \leq C$$

et

$$T + C \text{id} \geq 0 \iff \langle (T + C \text{id})f, f \rangle \geq 0 \iff -C \leq \langle Tf, f \rangle. \blacksquare$$

Lemme B.10.2 Si P est un polynôme à coefficients réels sur \mathbb{R} et à valeurs ≥ 0 sur l'intervalle compact $[r, s]$ de \mathbb{R} , alors P s'écrit

$$P(\cdot) = c \left(\sum_{(j)} Q_{1,j}^2(\cdot) + (\cdot - r) \sum_{(k)} Q_{2,k}^2(\cdot) + (s - \cdot) \sum_{(l)} Q_{3,l}^2(\cdot) \right)$$

où les Q_{\dots} sont des polynômes à coefficients réels et où $c \geq 0$.

Preuve. Mettons en évidence les zéros distincts a_1, \dots, a_m de P ainsi que leurs multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_m$; P s'écrit donc

$$P(t) = a \prod_{j=1}^m (t - a_j)^{\alpha_j}$$

où a est le coefficient du terme de plus haut degré de P . Cela étant,

(a) si a_j n'est pas réel, nous savons que \bar{a}_j est aussi un zéro de P , de multiplicité α_j ; il vient alors

$$\begin{aligned} (t - a_j)^{\alpha_j} (t - \bar{a}_j)^{\alpha_j} &= (t^2 - 2\Re a_j t + |a_j|^2)^{\alpha_j} \\ &= ((t - \Re a_j)^2 + (|a_j|^2 - (\Re a_j)^2))^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

(b) si $a_j \in]r, s[$, sa multiplicité est bien sûr paire.

(c) si $a_j \in]-\infty, r]$, remplaçons $t - a_j$ par $(t - r) + (r - a_j)$, où $r - a_j \geq 0$ est un carré.

(d) si $a_j \in [s, +\infty[$, remplaçons $t - a_j$ par $-((s - t) + (a_j - s))$, où $s - a_j \geq 0$ est un carré.

Dans ces conditions, en développant, $P(t)$ s'écrit aussi sous la forme

$$c \left(\sum_{(j)} Q_{1,j}^2(\cdot) + (\cdot - r) \sum_{(k)} Q_{2,k}^2 + (s - \cdot) \sum_{(l)} Q_{3,l}^2 + (\cdot - r)(s - \cdot) \sum_{(m)} Q_{4,m}^2(\cdot) \right)$$

où les $Q_{..}$ sont des polynômes à coefficients réels et où $c \geq 0$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que

$$(t - r)(s - t) = \frac{(t - r)^2(s - t) + (t - r)(s - t)^2}{s - r}. \blacksquare$$

Le résultat suivant va jouer un rôle important dans la suite de cet appendice.

Théorème B.10.3 *Soient H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ un opérateur hermitien et P un polynôme sur \mathbb{R} à coefficients réels.*

- a) *L'opérateur $P(T)$ appartient à $L(H)$ et est hermitien.*
 b) *Soient $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $r < s$ et $\text{rid} \leq T \leq \text{sid}$ (ce qui a toujours lieu pour $-r = s > \|T\|$).*

Si on a $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in [r, s]$, alors $P(T)$ est un opérateur hermitien positif.

Dès lors, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \leq P(t) \leq b$ pour tout $t \in [r, s]$, alors on a $a \text{Id} \leq P(T) \leq b \text{Id}$.

En particulier, si on pose $C = \sup \{ |P(t)| : r \leq t \leq s \}$, alors on a $-C \text{Id} \leq P(T) \leq C \text{Id}$ donc $\|P(T)\| \leq C$.

Preuve. a) est connu.

b) résulte aussitôt du lemme précédent et des exemples b) et c) d'opérateurs hermitiens positifs car il est clair que toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'opérateurs hermitiens positifs est hermitienne et positive.

Le premier cas particulier s'obtient directement en considérant les polynômes $P - a$ et $b - P$.

Le second cas particulier s'en déduit en considérant $-a = b = C$ d'une part et en appliquant la Proposition B.10.1. \blacksquare

B.11 Représentation de l'algèbre \mathcal{A}_T

Nous connaissons déjà le résultat suivant.

Théorème B.11.1 *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $T \in L(H)$,*

$$\mathcal{A}_T = \{ P(T) : P = \text{polynôme réel sur } \mathbb{R} \}^-$$

est une \mathbb{R} -sous-algèbre commutative de Banach de $L(H)$. \blacksquare

Dans le cas où T est hermitien, tous les éléments de \mathcal{A}_T sont hermitiens mais on peut préciser très finement ce résultat.

Construction. Soient H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur hermitien non nul. Nous savons qu'il existe des nombres réels r, s tels que $r < s$ et $\text{rid} \leq T \leq \text{sid}$, à savoir $-r = s = \|T\|$. Cela étant, vu le théorème de Stone-Weierstrass, nous savons que toute fonction $f \in C_{0,\mathbb{R}}([r, s])$ est limite uniforme sur $[r, s]$ d'une suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de polynômes réels. Vu la partie b) du Théorème B.10.3, la suite $(P_m(T))_{m \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $L(H)$ donc converge et il est clair que sa limite est indépendante de la suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ choisie; notons-la $f(T)$.

Cette construction permet de nombreux développements.

Commençons par mettre en évidence les propriétés de l'application qui à f associe $f(T)$.

Proposition B.11.2 *Soient H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur hermitien non nul.*

Si $r, s \in \mathbb{R}$ sont tels que $r < s$ et $\text{rid} \leq T \leq \text{sid}$, alors

$$\tau_{r,s}: C_{0,\mathbb{R}}([r, s]) \rightarrow L(H) \quad f \mapsto f(T)$$

est un opérateur linéaire continu de norme ≤ 1 , à valeurs dans $\mathcal{A}(T)$ et tel que

$$\tau_{r,s}(fg) = \tau_{r,s}(f)\tau_{r,s}(g).$$

De plus, $f(T)$ ne dépend pas du choix de $[r, s]$ au sens suivant:

- a) *si $r', s' \in \mathbb{R}$ sont tels que $r' < s'$ et $r'\text{id} \leq T \leq s'\text{id}$, alors on a $[r, s] \cap [r', s'] \neq \emptyset$*
- b) *si, en outre, $f' \in C_{0,\mathbb{R}}([r', s'])$ vérifie $f(t) = f'(t)$ en tout $t \in [r, s] \cap [r', s']$, alors on a $\tau_{r,s}(f) = \tau_{r',s'}(f')$.*

Preuve. La première partie est connue — le fait que $\|\tau_{r,s}\| \leq 1$ résulte directement du Théorème B.10.3.

La partie a) de la seconde partie est claire.

Pour la partie b), on procède comme suit: la fonction

$$g: [r, s] \cup [r', s'] \rightarrow \mathbb{K} \quad t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [r, s] \\ f'(t) & \text{si } t \in [r', s'] \end{cases}$$

est continue et réelle; il existe donc une suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de polynômes réels sur \mathbb{R} qui converge uniformément sur l'intervalle compact $[r, s] \cup [r', s']$ vers g et il s'ensuit que la suite $(P_m(T))_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $g(T)$. On conclut alors en remarquant qu'on doit avoir $f(T) = g(T) = f'(T)$. ■

Enrangeons ensuite les deux conséquences suivantes.

Proposition B.11.3 *Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout opérateur $T \in L(H)$ hermitien et positif, il existe $R \in \mathcal{A}_T$ hermitien et tel que $R^2 = T$.*

Preuve. Si $T = 0$, c'est trivial. Si $T \neq 0$, cela résulte aussitôt de ce que $0 \leq T \leq \|T\| \text{id}$ et $\sqrt{\cdot} \in C_{0,\mathbb{R}}([0, \|T\|])$. ■

Proposition B.11.4 *Soit H un espace de Hilbert. Si $T, R \in L(H)$ sont hermitiens, positifs et commutatifs, alors TR appartient à $L(H)$ et est hermitien et positif.*

Preuve. Vu la proposition précédente, il existe en effet $S \in \mathcal{A}_R$ hermitien et tel que $S^2 = R$. Comme S est limite dans $L(H)$ d'une suite de polynômes réels en R , on vérifie de suite que T et S commutent. On conclut aussitôt que $TR = TS^2$ est positif. ■

D'autres conséquences sont bien plus importantes.

Définition. En fait, nous avons donné un sens à l'opérateur

$$\tau_{\mathbb{R}} : BC_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_T \quad f \mapsto f(T)$$

car tout $f \in C_{0,\mathbb{R}}([r, s])$ admet un prolongement réel, borné et continu sur \mathbb{R} et si g et h sont deux tels prolongements, on a $g|_{[r,s]}(T) = h|_{[r,s]}(T)$. De plus, il s'agit clairement d'un opérateur linéaire continu, de norme ≤ 1 qui vérifie l'égalité $\tau_{\mathbb{R}}(fg) = \tau_{\mathbb{R}}(f)\tau_{\mathbb{R}}(g)$ pour tous $f, g \in BC_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

C'est cependant en "réduisant" \mathbb{R} que la théorie devient plus intéressante.

Lemme B.11.5 *Si K est un compact séparé non vide et si \mathcal{I} est un idéal fermé de $C_0(K)$, alors*

$$\sigma(\mathcal{I}) = \bigcap \{ f^{-1}(0) : f \in \mathcal{I} \}$$

est une partie compacte de K telle que

$$\mathcal{I} = \{ f \in C_0(K) : f(\sigma(\mathcal{I})) = \{0\} \}.$$

De plus, on a

$$\sigma(\mathcal{I}) = \emptyset \iff \mathcal{I} = C_0(K)$$

et

$$\sigma(\mathcal{I}) = K \iff \mathcal{I} = \{0\}.$$

Preuve. Il est clair que $\sigma(\mathcal{I})$ est une partie compacte de K et que \mathcal{I} est inclus dans $\{f \in C_0(K) : f(\sigma(\mathcal{I})) = \{0\}\}$.

Etablissons l'égalité relative à \mathcal{I} : prouvons que, si $f \in C_0(K)$ vérifie $f(\sigma(\mathcal{I})) = \{0\}$, alors f appartient à \mathcal{I} . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\Omega_m = \{x \in K : |f(x)| < 1/m\}$ est ouvert dans K ; $K \setminus \Omega_m$ est donc compact. De plus, pour tout $x \in K \setminus \Omega_m$, on a $x \notin \sigma(\mathcal{I})$ et il existe $g_x \in \mathcal{I}$ tel que $g_x(x) \neq 0$. Comme $|g_x|^2 = \overline{g_x}g_x$ appartient aussi à \mathcal{I} , nous pouvons supposer que g_x est une fonction réelle positive. En fait, g_x diffère de 0 sur un voisinage ouvert de x dans K . Cela étant, il existe des éléments réels positifs g_1, \dots, g_J de \mathcal{I} en nombre fini tels que

$$h_m = g_1^2 + \dots + g_J^2 \in \mathcal{I}$$

soit à valeurs strictement positives sur $K \setminus \Omega_m$. Il s'ensuit que

$$\left(k_{m,n} = \frac{nf}{\chi_K + nh_m} h_m \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

est une suite de \mathcal{I} qui converge uniformément sur $K \setminus \Omega_m$ vers f , alors que chacun de ses éléments a son module $< 1/m$ en tout $x \in \Omega_m$. Il existe donc $n(m) \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|k_{m,n(m)} - f\|_K \leq 2/m$. Dès lors f appartient à \mathcal{I} .

La conclusion est alors directe. ■

Définition. Soient H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur hermitien non nul.

Pour tous nombres réels r, s tels que $r < s$ et $\text{rid} \leq T \leq \text{sid}$,

$$\mathcal{I}_{r,s} = \{f \in C_{0,\mathbb{R}}([r, s]) : f(T) = 0\}$$

est un idéal fermé de $C_{0,\mathbb{R}}([r, s])$. Remarquons que $\sigma(\mathcal{I}_{r,s})$ ne dépend pas du choix des nombres r et s . D'une part, si T est égal à $a\text{id}$ avec $a \in \mathbb{R}$, on vérifie de suite que $\sigma(\mathcal{I}_{r,s})$ est égal à $\{a\}$ quels que soient r et s . D'autre part, si T n'est pas multiple réel de l'opérateur identité, on procède comme suit. Remarquons d'abord que $f(\cdot) = d(\cdot, \sigma(\mathcal{I}_{r,s}))|_{[r,s]}$ appartient à $C_0([r, s])$ et est tel que $f^{-1}(0) = \sigma(\mathcal{I}_{r,s})$. Cela étant, si r' et $s' \in \mathbb{R}$ sont aussi tels que $r' < s'$ et $r'\text{id} \leq T \leq s'\text{id}$, alors $f'(\cdot) = d(\cdot, \sigma(\mathcal{I}_{r',s'}))|_{[r',s']}$ appartient à $C_0([r', s'])$, coïncide avec f sur $[r, s] \cap [r', s']$ et diffère de 0 en tout point de $[r', s'] \setminus \sigma(\mathcal{I}_{r,s})$. On a donc $0 = f(T) = f'(T)$ et par conséquent $\sigma(\mathcal{I}_{r',s'}) \subset \sigma(\mathcal{I}_{r,s})$. La conclusion s'ensuit aussitôt.

Il est donc légitime de définir le *spectre* $\sigma(T)$ associé à T comme étant égal à l'un quelconque des ensembles $\sigma(\mathcal{I}_{r,s})$ donc à tous. Il s'agit clairement d'une partie compacte de \mathbb{R} qui, en plus, est non vide: de $T \neq 0$, on tire en effet que la fonction $f: x \mapsto x$ n'appartient pas à $\mathcal{I}_{r,s}$.

Remarque. Nous allons utiliser le fait suivant, généralisable aux compacts des espaces complètement réguliers et séparés: toute fonction réelle et continue f sur un compact non vide K de \mathbb{R} admet un prolongement réel, continu et borné g sur \mathbb{R} tel que $\|f\|_K = \|g\|_{\mathbb{R}}$. Ce cas particulier peut s'établir très aisément comme suit: nous savons que $\mathbb{R} \setminus K$ est un ouvert de \mathbb{R} dont l'ensemble des composantes connexes est dénombrable et constitué d'intervalles ouverts. Il suffit alors de vérifier que la fonction g définie comme suit convient:

- a) $g(t) = f(t)$ en tout $t \in K$,
- b) $g(t) = f(b)$ en tout point t de la composante connexe du type $]-\infty, b[$,
- c) $g(ra + (1-r)b) = rf(a) + (1-r)f(b)$ en tout point $(1-r)a + rb$ de toute composante connexe du type $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,
- d) $g(t) = f(a)$ en tout point t de la composante connexe du type $]a, \infty[$. \square

Définition. Cela étant, si f appartient à $C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$, remarquons que, pour tous prolongements continus g et h de f sur $[r, s]$, on a $g(T) = h(T)$; il est donc licite d'introduire la notation $f(T)$ pour désigner la valeur commune de $g(T)$ et $h(T)$. De la sorte, nous avons mis en évidence un opérateur

$$\tau: C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{A}_T \quad f \mapsto f(T)$$

fort particulier, comme l'établit le résultat suivant.

Théorème B.11.6 *Si H est un espace de Hilbert et si $T \in L(H)$ est hermitien et non nul, alors l'opérateur*

$$\tau: C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{A}_T \quad f \mapsto f(T)$$

est une isométrie entre les \mathbb{R} -algèbres de Banach $C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$ et \mathcal{A}_T .

Preuve. Nous savons déjà que τ est un opérateur linéaire tel que $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$ pour tous $f, g \in C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$ et dont l'image est dense.

De plus, on a $\|\tau\| \leq \|\cdot\|$ car tout $f \in C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$ admet un prolongement continu sur $[-\|T\|, \|T\|]$, de même norme.

Pour conclure, il nous reste à établir qu'on a aussi $\|\cdot\| \leq \|\tau\|$. Procédons en deux étapes.

Prouvons d'abord que, si $f \in C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$ donne lieu à $f(T) \geq 0$, alors on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \sigma(T)$. De fait, s'il existe $t_0 \in \sigma(T)$ tel que $f(t_0) < 0$, on choisit $g \in C_{0,\mathbb{R}}([-\|T\|, \|T\|])$ tel que $g \geq 0$, $g(t_0) > 0$ et $g = 0$ hors d'un voisinage de t_0 où f ne prend que des valeurs < 0 . Cela étant, on a $g(T) \geq 0$ (car $\tau(g) = \tau(\sqrt{g})\tau(\sqrt{g})$) et $g(T)f(T) \geq 0$ (car $g(T)$ et $f(T)$ sont hermitiens, positifs et commutatifs). Cependant $-gf$ est une fonction positive sur $[-\|T\|, \|T\|]$; on a donc aussi $-g(T)f(T) \geq 0$. Cela conduit à $g(T)f(T) = 0$ avec $g(t_0)f(t_0) < 0$, ce qui est contradictoire.

Cela étant, pour tout $f \in C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$, on a $\|f(T)\| \pm f \in C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$ avec $\|f(T)\| \text{id} \pm f(T) \geq 0$. Vu ce qui précède, on a donc $\|f(T)\| \pm f(t) \geq 0$ et par conséquent $\|f(T)\| \geq |f(t)|$ pour tout $t \in \sigma(T)$, c'est-à-dire $\|f(T)\| \geq \|f\|$. ■

Théorème B.11.7 *Si H est un \mathbb{C} -espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur hermitien non nul, alors l'opérateur*

$$\tau: C_0(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C},T} \quad f \mapsto \Re f(T) + i\Im f(T)$$

est une isométrie entre les \mathbb{C} -algèbres de Banach $C_{0,\mathbb{C}}(\sigma(T))$ et $\mathcal{A}_{\mathbb{C},T}$, où $\mathcal{A}_{\mathbb{C},T}$ désigne l'adhérence de $\{P(T) : P = \text{polynôme sur } \mathbb{R}\}$ dans $L(H)$.

Preuve. Il est clair que τ est un isomorphisme entre \mathbb{C} -algèbres.

Pour conclure, il suffit alors de noter que, pour tout $f \in C_{0,\mathbb{C}}(\sigma(T))$, on a successivement

$$\begin{aligned} \|f\|_{\sigma(T)}^2 &= \| \|f\| \| \sigma(T) \|^2 = \| |f| (T) \|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\langle \sqrt{(\Re f)^2 + (\Im f)^2}(T)x, \sqrt{(\Re f)^2 + (\Im f)^2}(T)x \right\rangle \\ &= \sup_{\|x\|=1} \langle ((\Re f)^2 + (\Im f)^2)(T)x, x \rangle \\ &= \sup_{\|x\|=1} \langle f(T)x, f(T)x \rangle = \|f(T)\|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

On peut aussi caractériser l'ensemble $\sigma(T)$ au moyen de la théorie spectrale.

Théorème B.11.8 *Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout opérateur $T \in L(H)$ hermitien, on a*

$$\sigma(T) = \{ c \in \mathbb{K} : T - c \text{id n'a pas d'inverse linéaire continu} \}.$$

Preuve. Posons

$$\sigma = \{ c \in \mathbb{K} : T - c \text{id n'a pas d'inverse linéaire continu} \}.$$

a) L'ensemble σ est fermé car $\mathbb{K} \setminus \sigma$ est ouvert: de fait, si $c_0 \in \mathbb{K} \setminus \sigma$, alors $T - c_0 \text{id}$ admet un inverse continu donc $T - c \text{id}$ aussi pour c suffisamment proche de c_0 .

b) En fait σ est un compact inclus dans $\{ c \in \mathbb{K} : |c| \leq \|T\| \}$ car, pour tout $c \in \mathbb{K}$ tel que $|c| > \|T\|$, on a $\|T/c\| < 1$ et dès lors $\text{id} - T/c$ admet un inverse continu et bien sûr $T - c \text{id}$ aussi.

c.1) On a $\sigma \subset \sigma(T)$. Établissons d'abord que $\sigma \subset \mathbb{R}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est trivial. Sinon on procède comme suit: si $c \in \mathbb{C}$ n'est pas réel, la fonction $g(\cdot) = (\cdot - c)(\cdot - \bar{c})$

est continue sur \mathbb{R} et telle que $g(t) > 0$ en tout $t \in \sigma(T)$. Dans ces conditions, $h = 1/g$ appartient à $C_{0,\mathbb{R}}(\sigma(T))$ et $(T - \text{cid})(T - \bar{\text{cid}})$ admet un inverse continu R tel que $(R(T - \bar{\text{cid}}))(T - \text{cid}) = \text{id}$.

Cela étant, si $c \in \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$, $\cdot - c$ est une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $t - c \neq 0$ en tout $t \in \sigma(T)$. Dès lors $T - \text{cid}$ admet un inverse continu et c n'appartient pas à σ .

c.2) On a $\sigma(T) \subset \sigma$. Soit $c \in \sigma(T)$. Supposons que $T - \text{cid}$ admet un inverse continu. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, définissons la fonction g_n sur \mathbb{R} par

$$g_n(t) = \begin{cases} |t - c|^{-1} & \text{si } |t - c| \geq n^{-1}, \\ n & \text{si } |t - c| \leq n^{-1}. \end{cases}$$

on a donc $\|(\cdot - c)g_n(\cdot)\|_{\mathbb{R}} \leq 1$. De là, on tire $\|(T - \text{cid})g_n(T)\| \leq 1$ et par conséquent

$$\|g_n(T)\| = \|(T - \text{cid})^{-1}(T - \text{cid})g_n(T)\| \leq \|(T - \text{cid})^{-1}\|$$

alors que $\|g_n(T)\| = \|g_n\|_{\sigma(T)} = n$, ce qui est contradictoire. ■

Appendice C

Introduction aux espaces de suites

C.1 Espaces vectoriels de référence

Définition. Nous désignons par ω l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ des suites de scalaires muni des opérations

$$\begin{aligned} + : \omega \times \omega &\rightarrow \omega & ((x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}, (y_m)_{m \in \mathbb{N}_0}) &\mapsto (x_m + y_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \omega &\rightarrow \omega & (c, (x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}) &\mapsto (cx_m)_{m \in \mathbb{N}_0}. \end{aligned}$$

On vérifie de suite que, muni de ces opérations, ω est un espace vectoriel. Certains de ses éléments méritent une notation particulière, tels

$$\epsilon_m = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Nous allons, dans cet appendice, nous intéresser à quelques parties très intéressantes de ω .

Définition. Un élément $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de ω est une *suite finie* s'il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $x_m = 0$ pour tout $m > M$. La *dimension* d'une telle suite est le plus petit entier $M \in \mathbb{N}_0$ qui jouit de cette propriété. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, ϵ_m est une suite de dimension m . Le cas de la suite 0 est particulier: elle est finie et on dit que sa dimension est égale à 0.

Définition. L'espace φ est le sous-espace de ω constitué des suites finies. Il s'agit clairement de l'enveloppe linéaire de $\{\epsilon_m : m \in \mathbb{N}_0\}$; c'est un sous-espace vectoriel de ω .

Définition. L'espace ℓ^1 est le sous-espace de ω constitué des suites $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ telles que la série $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ soit absolument convergente. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel de ω contenant φ .

Définition. L'espace ℓ^2 est le sous-espace de ω constitué des suites $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ telles que la série $\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2$ soit absolument convergente. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel de ω car

- a) il est clair que, pour tout $c \in \mathbb{K}$ et $x \in \ell^2$, on a $cx \in \ell^2$,
 b) pour tous $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$, $(y_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \in \ell^2$ et tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\left(\sum_{m=1}^M |x_m + y_m|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{m=1}^M |x_m|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m=1}^M |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

De plus, on a évidemment $\ell^1 \subset \ell^2$.

Définition. L'espace c_0 est le sous-espace de ω constitué des suites convergentes vers 0. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel de ω , qui contient ℓ^2 .

Définition. L'espace c est le sous-espace de ω constitué des suites convergentes. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel de ω contenant c_0 .

Définition. L'espace ℓ^∞ est le sous-espace de ω constitué des suites bornées. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel de ω contenant c .

Nous avons donc

$$\phi \subset \ell^1 \subset \ell^2 \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset \omega,$$

tous ces espaces étant des sous-espaces vectoriels de ω .

C.2 Espaces normés de référence

Notation. Si les éléments $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de ω sont tels que la série $\sum_{m=1}^{\infty} x_m \overline{y_m}$ converge absolument, alors nous posons

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \overline{y_m}.$$

Proposition C.2.1 Soient x, y, z des éléments de ω .

- a) Si $\langle x, x \rangle$ existe, on a $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ ayant lieu si et seulement si $x = 0$.
 b) Si $\langle x, z \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ existent, alors $\langle x + y, z \rangle$ existe et est égal à $\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
 c) Si $\langle x, y \rangle$ existe, alors, pour tout $c \in \mathbb{K}$, $\langle cx, y \rangle$ existe et est égal à $c \langle x, y \rangle$.
 d) Si $\langle x, y \rangle$ existe, alors $\langle y, x \rangle$ existe et est égal à $\overline{\langle x, y \rangle}$. ■

Remarque. Cependant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas un produit scalaire sur ω : $\langle x, y \rangle$ n'existe pas pour tous $x, y \in \omega$.

Proposition C.2.2 *Pour tous $x \in \ell^1$ et $y \in \ell^\infty$, $\langle x, y \rangle$ existe et on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| \cdot \sup_{m \in \mathbb{N}_0} |y_m|. \blacksquare$$

Théorème C.2.3 *Pour tous $x, y \in \ell^2$, $\langle x, y \rangle$ existe.*

Cela étant, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2 et $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est donc un espace pré-hilbertien.

Preuve. De fait, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$\sum_{m=1}^M |x_m \overline{y_m}|^2 \leq \sum_{m=1}^M |x_m|^2 \cdot \sum_{k=1}^M |y_k|^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2. \blacksquare$$

Théorème C.2.4 *Les applications*

$$\|\cdot\|_1 : \ell^1 \rightarrow [0, \infty[\quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|,$$

$$\|\cdot\|_2 : \ell^2 \rightarrow [0, \infty[\quad x \mapsto \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2}$$

et

$$\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \rightarrow [0, \infty[\quad x \mapsto \sup_{m \in \mathbb{N}_0} |x_m|$$

sont des normes. \blacksquare

Définition. Les espaces normés ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c et ℓ^∞ sont en fait les espaces

$$(\ell^1, \|\cdot\|_1), (\ell^2, \|\cdot\|_2), (c_0, \|\cdot\|_\infty), (c, \|\cdot\|_\infty) \text{ et } (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty).$$

Théorème C.2.5 *Les injections canoniques*

$$\ell^1 \rightarrow c_0, \ell^2 \rightarrow c_0, c_0 \rightarrow c \text{ et } c \rightarrow \ell^\infty$$

sont linéaires et continues.

De plus, dans chaque cas, l'image de toute boule fermée est fermée dans l'espace d'arrivée.

Enfin ϕ est un sous-espace vectoriel dense dans ℓ^1 , ℓ^2 et c_0 ; c_0 est un sous-espace vectoriel fermé de c , lui-même sous-espace vectoriel fermé de ℓ^∞ .

Preuve. La première partie est claire.

Pour la deuxième partie, dans le cas $\ell^1 \rightarrow c_0$, on procède comme suit. On se ramène directement au cas de la boule b fermée, centrée en 0 et de rayon 1. Si la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de b converge dans c_0 vers x , alors, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M |x_j| &\leq \sum_{j=1}^M |x_j - x_j^{(m)}| + \sum_{j=1}^M |x_j^{(m)}| \\ &\leq \sum_{j=1}^M |x_j - x_j^{(m)}| + 1 \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ donc $\sum_{j=1}^M |x_j| \leq 1$, ce qui suffit. Dans les autres cas, on agit de même.

La troisième partie est laissée en exercice. ■

C.3 Espaces de Banach de référence

Définition. Une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ de ω converge par composante si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la suite $(x_m^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge.

Proposition C.3.1 Dans ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c et ℓ^∞ , la convergence entraîne la convergence par composante.

Preuve. Cela résulte aussitôt de ce que, dans chacun de ces espaces, on a $|\cdot|_m \leq \|\cdot\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. ■

Remarque. Par contre, dans ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c et ℓ^∞ , la convergence par composante n'entraîne pas la convergence. (Trouver des contre-exemples.) □

Proposition C.3.2 Dans ℓ^1 , ℓ^2 et ℓ^∞ , toute suite bornée qui converge par composante est convergente vers la même limite.

Preuve. Supposons que la suite bornée $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $\ell^{1,2,\infty}$ converge par composante vers x . Si on a

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|x^{(k)}\| = C,$$

il vient

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| \sum_{m=1}^M x_m^{(k)} \epsilon_m \right\| \leq C, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0,$$

donc

$$\left\| \sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m \right\| \leq C, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0,$$

ce qui suffit pour conclure (on obtient d'abord que x appartient à $\ell^{1,2,\infty}$ et ensuite que $x^{(k)} \rightarrow x$). ■

Théorème C.3.3 *Les espaces ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c et ℓ^∞ sont de Banach. Plus spécialement, l'espace ℓ^2 est de Hilbert.*

Preuve. Dans $\ell^{1,2,\infty}$, toute suite de Cauchy est bien sûr bornée et convergente par composante, donc converge.

Pour c_0 et c , il suffit de noter qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^∞ . ■

C.4 Séparabilité

Théorème C.4.1 a) *L'ensemble $\{\epsilon_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est total dans ℓ^1 , ℓ^2 et c_0 .*

b) *L'espace c est séparable.*

c) *L'espace ℓ^∞ n'est pas séparable.*

Preuve. a) De fait, pour tout $x \in \ell^1$, ℓ^2 ou c_0 , la suite $(\sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge vers x .

b) En fait, si on désigne par $\mathbf{1}$ la suite constante $(\mathbf{1}_m = 1)_{m \in \mathbb{N}_0}$, on établit directement que l'ensemble $\{\epsilon_m : m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbf{1}\}$ est total dans c : si la suite numérique $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers x , alors la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0} - x\mathbf{1}$ converge vers 0.

c) L'ensemble $A = \{x \in \ell^\infty : x_m \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathbb{N}_0\}$ est non dénombrable et tel que $\|x - y\| = 1$ pour tous $x, y \in A$ distincts. ■

C.5 Parties compactes

Proposition C.5.1 *Une partie B de c_0 , c ou ℓ^∞ est bornée si et seulement s'il existe $x \in \ell^\infty$ tel que l'inégalité $\sup\{|y_m| : y \in B\} \leq |x_m|$ ait lieu pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. ■*

Proposition C.5.2 a) *Dans ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c et ℓ^∞ , toute partie K telle que*

$$\sup_{x \in K} |x_m| < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

et

$$\sup_{x \in K} \left\| x - \sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m \right\| \rightarrow 0 \text{ si } M \rightarrow \infty$$

est précompacte.

La réciproque a lieu dans ℓ^1 , ℓ^2 et c_0 .

Preuve. a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe d'abord $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{x \in K} \left\| x - \sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m \right\| \leq \varepsilon/2.$$

Cela étant,

$$K_M = \left\{ \sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m : x \in K \right\}$$

est un borné de ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c ou ℓ^∞ suivant le cas et est de dimension finie donc est précompact: il existe donc des points $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in K_M$ en nombre fini tels que

$$K_M \subset \{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\} + b(\varepsilon/2),$$

ce qui suffit pour conclure.

b) D'une part, tout précompact est borné. Par conséquent, on a même

$$\sup \{ \|x\| : x \in K \} < \infty.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points $x^{(1)}, \dots, x^{(M)} \in K$ en nombre fini tels que

$$K \subset \{x^{(1)}, \dots, x^{(M)}\} + b(\varepsilon/3).$$

Il existe ensuite $N \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\left\| x^{(k)} - \sum_{m=1}^N x_m^{(k)} \epsilon_m \right\| \leq \varepsilon/3, \quad \forall k \leq M.$$

De là, pour tout $x \in K$, il existe $k \leq M$ tel que $\|x - x^{(k)}\| \leq \varepsilon/3$ et par conséquent

$$\begin{aligned} & \left\| x - \sum_{m=1}^N x_m \epsilon_m \right\| \\ & \leq \|x - x^{(k)}\| + \left\| x^{(k)} - \sum_{m=1}^N x_m^{(k)} \epsilon_m \right\| + \left\| \sum_{m=1}^N (x_m^{(k)} - x_m) \epsilon_m \right\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui suffit. ■

Théorème C.5.3 *Pour toute partie de ℓ^1 , ℓ^2 , c_0 , c ou ℓ^∞ , on a compact \Leftrightarrow extractable \Leftrightarrow (précompact et complet). ■*

C.6 Fonctionnelles linéaires continues

Théorème C.6.1 *Une fonctionnelles τ sur c_0 est linéaire et continue si et seulement s'il existe $y \in \ell^1$ tel que $\tau(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$, auquel cas y est unique et tel que $\|\tau\| = \|y\|$.*

Preuve. La condition est nécessaire et donne lieu à la majoration $\|y\| \leq \|\tau\|$. Comme on a $\sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m \rightarrow x$ pour tout $x \in c_0$, il vient

$$\tau(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \tau(\epsilon_m), \quad \forall x \in c_0.$$

Cela étant, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$,

$$x^{(M)} = \sum_{m=1}^M e^{-i \arg(\tau(\epsilon_m))} \epsilon_m$$

appartient à c_0 et donne lieu à

$$\sum_{m=1}^M |\tau(\epsilon_m)| = |\tau(x^{(M)})| \leq \|\tau\|;$$

on a donc $\tau(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$ pour $y = (\tau(\epsilon_m))_{m \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1$ ainsi que $\|y\| \leq \|\tau\|$.

La suffisance de la condition ainsi que la majoration $\|\tau\| \leq \|y\|$ sont connues (cf. Proposition C.2.2).■

Théorème C.6.2 *Une fonctionnelle τ sur ℓ^1 est linéaire et continue si et seulement s'il existe $y \in \ell^\infty$ tel que $\tau(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$, auquel cas y est unique et tel que $\|\tau\| = \|y\|$.*

Preuve. La condition est nécessaire et donne lieu à la majoration $\|y\| \leq \|\tau\|$. Comme on a $\sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m \rightarrow x$ pour tout $x \in \ell^1$, il vient

$$\tau(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \tau(\epsilon_m), \quad \forall x \in \ell^1.$$

Cela étant, il suffit de noter que $|\tau(\epsilon_m)| \leq \|\tau\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, ce qui procure aussitôt $y = (\tau(\epsilon_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $\|y\| \leq \|\tau\|$.

La suffisance de la condition ainsi que la majoration $\|\tau\| \leq \|y\|$ sont connues (cf. Proposition C.2.2).■

Proposition C.6.3 Une fonctionnelle τ sur ℓ^∞ est linéaire, continue et telle que

$$\tau\left(x - \sum_{m=1}^M x_m \epsilon_m\right) \rightarrow 0 \text{ si } M \rightarrow \infty, \quad \forall x \in \ell^\infty,$$

si et seulement s'il existe $y \in \ell^1$ tel que $\tau(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$, auquel cas $\|\tau\| = \|y\|$.

De plus, cet élément y est unique.

Preuve. La condition est nécessaire et donne lieu à la majoration $\|y\| \leq \|\tau\|$. Par hypothèse, on a

$$\tau(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \tau(\epsilon_m), \quad \forall x \in \ell^\infty.$$

De plus, pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{m=1}^M |\tau(\epsilon_m)| = \left| \tau\left(\sum_{m=1}^M e^{-i \arg(\tau(\epsilon_m))} \epsilon_m\right) \right| \leq \|\tau\|,$$

ce qui permet de conclure aussitôt.

La suffisance de la condition et la majoration $\|\tau\| \leq \|y\|$ sont immédiates.

L'unicité de y est immédiate. ■

Théorème C.6.4 Une fonctionnelle τ sur ℓ^2 est linéaire et continue si et seulement s'il existe $y \in \ell^2$ tel que $\tau(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$, auquel cas $\|\tau\| = \|y\|$.

De plus, cet élément y est unique.

Preuve. Comme ℓ^2 est un espace de Hilbert, cela résulte aussitôt du théorème de Riesz. ■

Théorème C.6.5 On a

$$(c_0)_b^* = \ell^1, \quad (\ell^1)_b^* = \ell^\infty \quad \text{et} \quad (\ell^2)_b^* = \ell^2. \blacksquare$$

C.7 Un espace de Fréchet de référence

Définition. L'espace localement convexe séparé ω est l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites de scalaires, muni du système $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ des semi-normes p_m définies par

$$p_m : \omega \rightarrow [0, +\infty[\quad x \mapsto \sup_{k \leq m} |x_k|.$$

Théorème C.7.1 a) L'espace ω est de Fréchet.

b) Dans ω , une suite converge vers x (resp. est de Cauchy) si et seulement si elle converge par composante (resp. est de Cauchy par composante).

c) Une partie B de ω est bornée si et seulement si

$$\sup_{x \in B} |x_m| < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

d) Une partie K de ω est précompacte si et seulement si elle est bornée.

e) Pour une partie de ω , on a

$$\begin{aligned} \text{compact} &\iff \text{extractable} \iff \text{précompact et sq-complet} \\ &\iff \text{borné et sq-complet} \end{aligned}$$

f) Une fonctionnelle τ sur ω est linéaire et continue si et seulement s'il existe $y \in \varphi$ tel que $\tau(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$.

g) On a $\omega = \omega_a$. ■

Remarque. L'espace ω n'est pas un espace de Banach.

C.8 Un espace de référence

Définition. L'espace localement convexe séparé ϕ est l'espace vectoriel ϕ muni du système $\{p_a : a \in A\}$ des semi-normes p_a définies par

$$p_a : \phi \rightarrow [0, +\infty[\quad x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m |x_m|,$$

où $A = \{a \in \omega : a_m \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}_0\}$.

Théorème C.8.1 a) Sur ϕ , toute semi-norme est continue.

b) Une partie B de ϕ est bornée si et seulement s'il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}_0$ tels que

$$B \subset \{x \in \phi : x_m = 0, \forall m > M; |x_m| \leq C, \forall m \leq M\}.$$

Tout borné de ϕ est donc de dimension finie et précompact.

c) Dans ϕ , une suite converge (resp. est de Cauchy) si et seulement si elle est de dimension finie et converge par composante (resp. est de Cauchy par composante).

d) Pour une partie de ϕ , on a

$$\begin{aligned} \text{compact} &\iff \text{extractable} \iff \text{précompact et sq-complet} \\ &\iff \text{borné et sq-complet} \end{aligned}$$

e) On a $\omega_b^* = \phi$ et $\phi_b^* = \omega$.

f) Une partie F de ϕ est fermée si et seulement si elle est sq-fermée, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $F \cap \{x \in \phi : \dim(x) \leq m\}$ est fermé.

g) Tout sous-espace vectoriel de ϕ est fermé.

Preuve. a) De fait, pour toute semi-norme p sur ϕ , il vient

$$p(x) \leq \sum_{m=1}^{\infty} p(\epsilon_m) |x_m|, \quad \forall x \in \phi.$$

b), c) et d) sont immédiats.

e) Nous savons déjà que l'égalité des espaces vectoriels ω^* et ϕ a lieu. L'égalité topologique $\omega_b^* = \phi$ résulte directement de la caractérisation des bornés de ω .

L'égalité algébrique entre les espaces ϕ_b^* et ω découle aussitôt de a) qui implique que toute fonctionnelle linéaire sur ϕ est continue. L'égalité topologique résulte directement de la caractérisation des bornés de ϕ .

g) La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Soient F une partie sq-fermée de ϕ et x un élément de $\phi \setminus F$. Il existe assurément $b_1 > 0$ tel que

$$y_1 \in \mathbb{K}, |y_1| \leq b_1 \Rightarrow x + y_1 \epsilon_1 \notin F.$$

Si, pour $m \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_m > 0$ tels que

$$y_1, \dots, y_m \in \mathbb{K}, |y_1| \leq b_1, \dots, |y_m| \leq a_m \Rightarrow x + \sum_{j=1}^m y_j \epsilon_j \notin F,$$

sont obtenus, alors il existe $a_{m+1} > 0$ tel que

$$y_1, \dots, y_{m+1} \in \mathbb{K}, |y_1| \leq b_1, \dots, |y_{m+1}| \leq a_{m+1} \Rightarrow x + \sum_{j=1}^{m+1} y_j \epsilon_j \notin F.$$

Cela étant, nous avons mis en évidence un point $(a_m = 1/b_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de ω à composantes toutes strictement positives, tel que $b_{p_a}(x; 1) \cap F = \emptyset$.

h) découle aussitôt de g): en effet, si L est un sous-espace vectoriel de ϕ , alors $L \cap \{x \in \phi : \dim(x) \leq m\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de ϕ donc un fermé de ϕ . ■

C.9 Espaces affaiblis

Théorème C.9.1 (Banach-Schur) a) Dans ℓ^1 , une suite converge si et seulement si elle est a -convergente.

b) Dans ℓ^1 , une suite est de Cauchy si et seulement si elle est a -de Cauchy. En particulier, l'espace ℓ^1 est a -complet.

Preuve. a) La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Il suffit bien sûr d'établir que si la suite $(x^{(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ de ℓ^1 est a -convergente vers 0, alors elle converge vers 0. Si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite, que nous rebaptisons $(x^{(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ telle que $\|x^{(j)}\| \geq \varepsilon$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

Déterminons deux suites strictement croissantes $(k(j))_{j \in \mathbb{N}_0}$ et $(l(j))_{j \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{N}_0 par la récurrence suivante. Posons $k(1) = 1$ et choisissons pour $l(1)$ le premier entier tel que

$$\sum_{m=l(1)+1}^{\infty} |x_m^{(k(1))}| \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

Connaissant $k(1), \dots, k(j-1)$ et $l(1), \dots, l(j-1)$, prenons pour $k(j)$ le premier entier $> k(j-1)$ tel que

$$\sum_{m=1}^{j-1} |x_m^{(k(j))}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

et pour $l(j)$ le premier entier $> l(j-1)$ tel que

$$\sum_{m=l(j)+1}^{\infty} |x_m^{(k(j))}| \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

Cela étant, la suite $y \in \omega$ définie par

$$y_m = e^{-i \arg(x_m^{(k(j))})} \quad \text{si } l(j-1) < m \leq l(j)$$

appartient bien sûr à ℓ^∞ , représente donc une fonctionnelle linéaire continue sur ℓ^1 et donne lieu à

$$\begin{aligned} & |\langle x^{(k(j))}, y \rangle| \\ & \geq \sum_{m=l(j-1)+1}^{l(j)} |x_m^{(k(j))}| - \left(\sum_{m=1}^{l(j-1)} |x_m^{(k(j))}| + \sum_{m=l(j)+1}^{\infty} |x_m^{(k(j))}| \right) \\ & \geq \|x^{(k(j))}\| - 2 \left(\sum_{m=1}^{l(j-1)} |x_m^{(k(j))}| + \sum_{m=l(j)+1}^{\infty} |x_m^{(k(j))}| \right) \geq \frac{\varepsilon}{5}, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que la suite $(x^{k(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ a -converge vers 0.

b) La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(x^{(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ a -de Cauchy et non de Cauchy. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et des suites strictement croissantes $(k(j))_{j \in \mathbb{N}_0}$ et $(l(j))_{j \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{N}_0 telles que $\|x^{(k(j))} - x^{(l(j))}\| \geq \varepsilon$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. D'où une contradiction car la suite $(x^{(k(j))} - x^{(l(j))})_{j \in \mathbb{N}_0}$ a -converge vers 0 donc converge vers 0.

(N.B.: Ce raisonnement est général: il est valable dans tout espace localement convexe où toute suite a -convergente est convergente.)■

Proposition C.9.2 *Pour une partie de ℓ^1 , on a*

$$\text{compact} \iff \text{extractable} \iff a\text{-compact} \iff a\text{-extractable}.$$

Preuve. L'équivalence (compact \Leftrightarrow extractable) est connue. L'équivalence (extractable \Leftrightarrow a -extractable) résulte aussitôt du théorème de Banach-Schur. L'implication (compact \Rightarrow a -compact) est bien connue et l'implication inverse résulte de ce que le dual de ℓ^1 est s -séparable.■

Proposition C.9.3 a) *Une partie de ℓ^2 est a -compacte si et seulement si elle est a -extractable.*

b) *Sur tout borné de ℓ^2 , la topologie induite par ω est équivalente à la a -topologie.*

c) *Dans ℓ^2 , une suite a -converge si et seulement si elle est bornée et converge par composante.*

d) *Dans ℓ^2 , une suite est a -de Cauchy si et seulement si elle est bornée et de Cauchy par composante.*

Preuve. a) a lieu dans tout espace de Hilbert séparable.

b) D'une part, la topologie induite par ω dans ℓ^2 est plus faible que la a -topologie car, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, ϵ_m appartient à ℓ^2 . D'autre part, toute boule β de centre 0 étant absolument convexe et bornée, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $y \in \ell^2$, il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{x \in \beta} \left| \langle x, y \rangle - \sum_{m=1}^M x_m \bar{y}_m \right| \leq \left(\sum_{m=M+1}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2} \cdot \sup_{x \in \beta} \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et il vient alors

$$\left. \sup_{m \leq M} |x_m| \leq \varepsilon / (2C) \right\} \implies |\langle x, y \rangle| \leq \sum_{m=1}^M |x_m| |y_m| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour $C = \sum_{m=1}^M |y_m|$.

c) et d) sont conséquences immédiates de b).

Proposition C.9.4 *Dans toute boule de c_0 , la a -topologie est équivalente à la topologie induite par ω .*

En particulier, dans c_0 ,

- a) *une suite a -converge si et seulement si elle est bornée et convergente par composante.*
- b) *une suite est a -de Cauchy si et seulement si elle est bornée et de Cauchy par composante.*

Preuve. La première partie s'établit comme dans ℓ^2 .

a) et b) sont immédiats. ■

Bibliographie

- [1] BANACH S., *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, **1**, Warszawa, 1932.
- [2] BOAS R. P., *A Primer of Real Functions*, The Carus Math. Monographs **XII**, Math. Assoc. Amer., 1981.
- [3] BOURBAKI N., *Espaces vectoriels topologiques*, Paris, 2ème édition, Tome 1: 1966, Tome 2: 1967.
- [4] BROWN R. F., *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, 1993.
- [5] DUNFORD N., SCHWARTZ J. T., *Linear Operators*, Interscience, New York, part I: 1952, part II: 1963, part III: 1971.
- [6] GARNIR H. G., DE WILDE M., SCHMETS J., *Analyse fonctionnelle*, **I & III**, Birkhäuser, Basel, 1968 & 1973.
- [7] GOHBERG, KREIN, *Fundamental Aspects of Defect Numbers, Root Numbers and Indices of Linear Operators*, Uspehi Math. Nauk **12**(1957), 43–118.
- [8] GROTHENDIECK A., *Topological vector spaces*, Gordon and Breach, New York, 1973.
- [9] HEUSER H., *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1975.
- [10] HORVATH J., *Topological Vector Spaces and Distributions 1*, Addison-Wesley, Reading, 1966.
- [11] ISTRATESCU V., *Fixed Point Theory*, Reidel, 1981.
- [12] JARCHOW H., *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart, 1981.
- [13] KELLEY J. L., NAMIOKA I., *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand, Princeton, 1963.
- [14] KÓTHE G., *Topological Vector Spaces 1*, Springer, Berlin, 1969. (Traduction de *Topologische lineare Räume 1*, Springer, Berlin, 1966).

-
- [15] LINDENSTRAUSS J., TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces*, Springer, vol. 1: 1977, vol. 2: 1979.
- [16] MEISE R., VOGT D., *Einführung in die Funktionalanalysis*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1992; traduit par RAMANUJAN M. S.: *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 2, 1997.
- [17] NAIMARK M. A., *Normed Rings*, Noordhoff, Groningen, 1960.
- [18] Pérez Carreras P., Bonet J., *Barrelled Locally Convex Spaces*, /noth-Holland Mathematics Studies 131, 1991.
- [19] RIESZ F., NAGY SZ., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.
- [20] RUDIN W., *Functional Analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1991.
- [21] SCHAEFER H., *Topological Vector Spaces*, Springer, Berlin, 1971.
- [22] SCHWARTZ L., *Analyse: topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, 11, Hermann, Paris, 1970.
- [23] TAYLOR A. E., LAY D., *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1980.
- [24] TRÈVES F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.
- [25] ZEIDLER E., *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, 1993.

Index terminologique

- absorber 34
- adhérence 99
- algèbre \mathcal{A}_T 165
- antipolaire 117
- application
 - continue 99
 - en un point 99
- axiome du choix 145

- base de Hamel 2
- bidual 85
 - algébrique 15
- borné 57, 115
- boule
 - fermée 31
 - ouverte 31

- centre
 - boule 31
 - semi-boule 32
- codimension 12
- coimage 13
- compact 58, 100
- complément
 - algébrique 8
 - topologique 49
- complétion 54
- complexe 13
 - exact 13
- conoyau 13
- convergence 35
 - compacte 112
 - filtre 101
 - forte 38
 - norme 38
 - par composante 176
 - ponctuelle 38
 - simple 38
- critère de totalité 154

- développement
 - en série de Fourier 153
- dimension 2
 - finie 2
 - infinie 2
- disque de Banach 116
- dual
 - algébrique 15
 - topologique 74, 113
 - simple 114

- élément
 - orthogonal 150
 - maximal 145
 - minimal 145
- ensemble de semi-normes
 - équivalent 107
 - filtrant 107
 - plus faible 107
 - plus fort 107
 - sérarant 107
- enveloppe
 - absolument convexe 33
 - fermée 35, 115
 - convexe 32
 - fermée 35, 115
 - linéaire 1
 - fermée 35, 115
- espace
 - Baire 67

- Banach 36
- bien ordonné 145
- bornologique 139
- \mathbb{C} -vectoriel 1
- complémentaire
 - algébrique 8
- complet 119
 - séquentiellement 36, 116
 - sq- – 36, 116
- complété 54
- E_a 113
- E'_s 114
- faible 113
- Hilbert 150
- isomorphe 45
 - isométriquement 45
- \mathbb{K} -vectoriel 1
- localement convexe 106
- normé 30
- ordonné 145
- pré-hilbertien 147
- préordonné 145
- produit direct 10
 - fini 7
- quasi-tonnelé 141
- quotient
 - algébrique 10
 - topologique 52
- réflexif 85
 - algébriquement 16
- réseau, à 141
- \mathbb{R} -vectoriel 1
 - sous-jacent 1
- séparable 53
- séparé 100
- somme directe 10
 - finie 8
- tonnelé 140
- topologique 97
 - séparé 100
- totalemnt ordonné 145
- ultrabornologique 137
- vectoriel 1
 - topologique 104
- c 3, 175
- c_0 3, 175
- ℓ^1 3, 175
- ℓ^p 3, 175
- ℓ^∞ 3, 175
- $C_0(F)$ 112
- $C_0(\Omega)$ 112
- $C_L(\Omega)$ 113
- $C_\infty(\Omega)$ 113
- ω 3, 180
- ϕ 3, 181
- extractable 58
- fermé 97
- filtre 101
 - associé 101
 - convergeant 101
 - engendré 101
 - image 101
 - moins fin 101
 - plus fin 101
- fonctionnelle linéaire 15
 - continue 73
- formule
 - Parseval 153
 - de polarisation 148
- frontière 99
- homomorphisme 45
- hyperplan d'appui 81
- image 5
- inégalité
 - Hölder 4
 - Jensen 4
 - Minkowski 4
 - Schwarz 148
- injection canonique 10
- intérieur 99
- isométrie 45
- isomorphisme 45
- lemme

- Zorn 146
- projection de Schauder 65
- Riesz 48
- limite
 - suite 35, 115
 - filtre 101
- loi du parallélogramme 148
- majorant 145
- minorant 145
- norme 29
 - équivalente 39
 - opérateur 37
- noyau 5
- opérateur
 - linéaire 4
 - adjoint 19
 - compact 92
 - continu 37
 - Fredholm
 - première espèce 5
 - seconde espèce 5
 - hermitien 161
 - positif 163
 - ouvert 44
 - relativement ouvert 44
 - précompact 92
 - rang fini 22
 - relativement ouvert 44
 - de Volterra 6
- ouvert 97
- partie
 - absolument convexe 32
 - absorbante 34
 - algébriquement saturée 21
 - convexe 32
 - dense 53
 - équilibrée 105
 - partout dense 53
 - ponctuellement bornée 87
 - séparable 53
 - séparante 15
 - séquentiellement complète 36, 116
 - sq*-complète 36, 116
 - topologiquement libre 54
 - totale 53
 - totalement ordonnée 145
- point
 - adhérent 99
 - d'adhérence à un filtre 101
 - extrémal 82
 - fixe 62
 - frontière 99
 - intérieur 99
- polaire 117
- précompact 57
 - pour p 121
- produit
 - direct fini 7, 48
 - direct 10
 - scalaire 147
- projecteur linéaire 9
- projection canonique 10
- rayon
 - boule 31
 - semi-boule 32
- représentation propre 24
- réseau 141
- semi-boule 32
 - fermée 32
 - ouverte 32
- semi-norme 29
- série
 - absolument convergente 36
 - de Neumann 40
- somme
 - directe finie 8, 49
 - directe 10
- sous-espace
 - orthogonal 154
 - vectériel 1
- spectre 94

- suite
 - Cauchy 35, 115
 - convergente 35, 115
 - exacte 13
 - courte 13
 - orthonormée 152
 - totale 153
- surjection canonique 11
- système de semi-normes 107
- théorème
 - Alaoglu 122
 - Baire 67
 - Banach-Saks 157
 - Banach-Steinhaus 87
 - bipolaires 118
 - bon ordre de Zermelo 146
 - bornation uniforme 87
 - complétion 54
 - De Wilde 143, 144
 - existence de Cauchy-Peano 66
 - Fourier 153
 - Gohberg-Krein 47
 - graphe
 - fermé 91
 - sq-fermé 144
 - Hahn-Banach 76
 - maximalité de Hausdorff 146
 - Krein M. et S. 54
 - Krein-Milman 83
 - localisation 143
 - Mackey 119
 - Mazur 80
 - Muntz 54
 - opérateur ouvert 89, 144
 - point fixe
 - Banach 62
 - Brouwer 63, 64
 - Schaefer
 - Schauder 65
 - précompacité réciproque 121
 - Pythagore 151
 - Riesz 156
 - séparation 15
 - premier 81
 - deuxième 81
 - Tychonoff 103
 - théorie spectrale 94, 127
 - tonneau 117
 - topologie 99
 - moins fine 99
 - plus fine 99
 - T^* 19
 - T' 124
 - ultrafiltre 102
 - valeur propre 94
 - variété d'appui 82
 - vecteur propre 94
 - voisinage 98

Table des matières

Introduction	iii
1 Quelques compléments sur les espaces vectoriels	1
1.1 Espaces vectoriels	1
1.2 Exemples d'espaces vectoriels	3
1.3 Opérateurs linéaires	4
1.4 Produits et sommes directes finies	7
1.5 Produits et sommes directes	9
1.6 Espace quotient	11
1.7 Structure des opérateurs linéaires	11
1.8 Suites exactes	12
1.9 Fonctionnelle linéaire, dual algébrique	14
1.10 Opérateur adjoint	18
1.11 Equation $Tx = f$, première approche	21
1.12 Rappel	25
2 Espaces normés	29
2.1 Définition	29
2.2 Espaces de Banach	35
2.3 Opérateurs linéaires continus	37
2.4 Résolution de l'équation $(\text{id} - T)x = f$, méthode de Neumann	40
2.5 Opérateurs (relativement) ouverts	43
2.6 Espaces normés de dimension finie	45
2.7 Produit fini, somme directe	48
2.8 Espace quotient	51
2.9 Densité, séparabilité et totalité	53
2.10 Complétion	54
2.11 Bornés	56
2.12 Précompacts, compacts, extractables	57
2.13 Quelques théorèmes du point fixe	61
2.14 Espaces de Baire	66

3	Fonctionnelles linéaires continues	71
3.1	Fonctionnelles linéaires continues	71
3.2	Théorème de Hahn-Banach, analytique	72
3.3	Premières conséquences	75
3.4	Théorème de Hahn-Banach, version géométrique	78
3.5	Théorème de Krein-Milman	80
3.6	Duaux associés	82
3.7	Bidual et réflexivité	82
4	Opérateurs linéaires continus	85
4.1	Théorème de Banach-Steinhaus	85
4.2	Théorème de l'opérateur ouvert	87
4.3	Théorème du graphe fermé	88
4.4	Opérateurs linéaires compacts	90
4.5	Théorie spectrale (introduction)	92
5	Dual topologique	95
5.1	Espaces topologiques	95
5.2	Parties compactes	98
5.3	Filtres	98
5.4	Théorème de Tychonoff	101
5.5	Espaces vectoriels topologiques	102
5.6	Espaces localement convexes séparés ou vectoriels à semi-normes	104
5.7	Exemples	109
5.8	Propriétés générales	112
5.9	Premières propriétés de l'espace E_a	117
5.10	Premières propriétés de l'espace E'_s	118
5.11	Adjoint d'un opérateur linéaire continu	121
5.12	Théorie spectrale (suite)	125
5.13	Premiers exemples	128
5.14	Exemples (suite)	130
5.15	Résolution d'équations différentielles	131
	5.15.1 Problème avec conditions initiales	131
	5.15.2 Problème avec conditions aux limites	132
6	Quelques compléments sur les espaces localement convexes	135
6.1	Espaces ultrabornologiques	135
6.2	Espaces bornologiques	137
6.3	Espaces tonnelés	138
6.4	Espaces quasi-tonnelés	139
6.5	Espaces à réseau	139
6.6	Théorème du graphe sq-fermé	141

A	L'axiome du choix et quelques formes équivalentes	143
B	Espaces de Hilbert	145
B.1	Définition générale	145
B.2	Suites orthogonales	148
B.3	Suites orthonormées	149
B.4	Suites orthonormées totales	151
B.5	Sous-espaces orthogonaux	152
B.6	Fonctionnelles linéaires continues	153
B.7	Convergence faible	154
B.8	Opérateurs linéaires continus	156
B.9	Opérateurs hermitiens	158
B.10	Opérateurs hermitiens positifs	160
B.11	Représentation de l'algèbre \mathcal{A}_T	162
C	Introduction aux espaces de suites	169
C.1	Espaces vectoriels de référence	169
C.2	Espaces normés de référence	170
C.3	Espaces de Banach de référence	172
C.4	Séparabilité	173
C.5	Parties compactes	173
C.6	Fonctionnelles linéaires continues	175
C.7	Un espace de Fréchet de référence	176
C.8	Un espace de référence	177
C.9	Espaces affaiblis	179