UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences
Institut de Mathématique

COMPLEMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE:

Jets de Whitney et opérateurs d'extension

Notes du cours de la licence
en sciences mathématiques

Jean SCHMETS

Année académique 2003–2004

Introduction

Depuis longtemps je souhaite donner un cours sur cette matière que j'ai abordée avec Manuel Valdivia (Université de Valencia) à partir de 1990.

Problème de base

Etant donné des nombres complexes $c_0, \ldots, c_p$ en nombre fini, il est aisé de donner une fonction $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ telle que

$$f(0) = c_0, \ldots, \mathrm{D}^p f(0) = c_p.$$

On peut par exemple prendre pour f le polynôme

$$P(x) = \sum_{m=0}^{p} \frac{c_m}{m!} x^m$$

mais ce n'est évidemment pas la seule possibilité.

Comment généraliser ce problème? Différentes possibilités s'offrent:

a) pourquoi se limiter à un nombre fini de nombres complexes $c_0, \ldots, c_p$?

b) pourquoi se limiter à $\mathbb{R}$ et ne pas considérer $\mathbb{R}^n$?

c) pourquoi se limiter à $\{0\}$, c'est-à-dire aux valeurs imposées aux dérivées de f au seul point 0?

La réponse aux deux premières questions est claire: il n'y a pas de raison et la réponse est donnée par le théorème de Borel et ses généralisations et améliorations, en particulier son amélioration due à Ritt.

La réponse à la troisième question amène à formuler a priori quelques restrictions. Etant donné une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par exemple, on peut évidemment créer la donnée $(\mathrm{D}^\alpha f|_A)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathrm{D}^\alpha f|_A$ est alors une fonction continue sur A. Il est clair que ces fonctions sont liées entre elles: il suffit de penser à la formule limitée de Taylor. Inversement si $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ est une famille de fonctions continues sur A qui *provient d'une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire telle que

$$\varphi_\alpha = \mathrm{D}^\alpha f|_A, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

il est clair que chaque φ_α admet un prolongement continu sur l'adhérence de A. Cela étant, nous ne considérerons le problème posé que pour $A = F$ avec F un fermé de $\mathbb{R}^n$, éventuellement un compact de $\mathbb{R}^n$, et des données $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^0(F)$. Ici la réponse est donnée par le théorème de Whitney.

Là ne s'arrête pas la recherche: Whitney lui-même a tracé la voie à une extension de ce problème de base, extension qui donne lieu aujourd'hui encore à de nombreux développements.

Extension du problème

Etant donné un fermé F de $\mathbb{R}^n$, le problème de base consiste dans la caractérisation des *p-jets* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{|\alpha| \le p}$ *sur* F avec $p \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ (c'est-à-dire les familles de fonctions φ_α continues sur F indicées par les $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ vérifiant $|\alpha| \le p$) qui proviennent d'une fonction $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$.

Whitney a dépassé ce cadre en considérant leur ensemble, noté

$$\mathcal{E}^p(F).$$

Il s'agit bien sûr d'un espace vectoriel et Whitney a envisagé les questions suivantes:

a) l'espace $\mathcal{E}^p(F)$ peut-il être muni d'une "belle" topologie localement convexe pour laquelle l'opérateur linéaire et surjectif de *restriction*

$$R_F \colon \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^p(F); \quad f \mapsto ((\mathrm{D}^\alpha f)|_F)_{|\alpha| \le p}$$

est continu?

b) si c'est le cas, quand cet opérateur admet-il un inverse linéaire continu à droite? (appelé *extension* linéaire continue de $\mathcal{E}^p(F)$ dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$).

c) peut-on remplacer $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par un de ses "beaux" sous-espaces?

Whitney a muni l'espace $\mathcal{E}^p(F)$ d'une structure d'espace de Fréchet. Cela étant, il a établi d'une part que la réponse à la première question est positive et d'autre part que, pour $p \in \mathbb{N}_0$, la réponse à la deuxième question est positive également mais a laissé le cas $p = \infty$ ouvert.

En fait dans le cas $p = \infty$, la réponse à cette deuxième question est beaucoup plus délicate. Mityagin a établi qu'elle dépend de la nature de la frontière de F ou de la structure localement convexe de l'espace $\mathcal{E}^\infty(F)$. Depuis lors, de nombreux auteurs ont recherché des conditions portant sur la frontière de F assurant l'existence ou la non-existence d'un tel opérateur d'extension. Tidten de son côté a donné une caractérisation localement convexe des espaces $\mathcal{E}^\infty(F)$ pour lesquels il existe un tel opérateur d'extension.

Quant à la troisième question, elle fait référence au fait que le théorème de Whitney assure que tout élément de $\mathcal{E}^\infty(F)$ provient d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ qui est analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ car admettant un prolongement holomorphe sur un certain voisinage de $\mathbb{R}^n \setminus F$ dans $\mathbb{C}^n$. Ici les réponses ne sont apparues qu'après 1990.

Essayer de présenter ces recherches est le but de ces notes.

Cas ultradifférentiable

Mais … là encore une fois ne s'arrête pas la recherche. Ce serait oublier tout ce qui est fait dans la considération des espaces de fonctions ultradifférentiables. Cependant il convient de rester raisonnable: on ne peut tout voir dans un cours de 30 heures. Ce dernier aspect de la recherche ne sera donc pas abordé dans cet exposé.

Signalons quand même de quoi il s'agit dans le cas où la définition repose sur une suite $\boldsymbol{M}$, laissant de côté celui où elle repose sur un poids.

Dans ce cas $\boldsymbol{M}$ est une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de nombres réels
(a) *normalisée*, c'est-à-dire telle que $M_0 = 1$ et $M_n \geq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
(b) *logarithmiquement convexe*, c'est-à-dire telle que $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Deux types d'espaces peuvent alors être introduits.

Espaces du type Beurling

Dans le cas Borel, on introduit *l'espace de Fréchet* $\Lambda_{(\boldsymbol{M})}$. C'est le sous-espace vectoriel

$$\left\{ \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} : |\boldsymbol{c}|_p := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{p^{|\alpha|}\,|c_\alpha|}{M_{|\alpha|}} < \infty \right\}$$

de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$, muni du système de semi-normes $\{|\cdot|_p : p \in \mathbb{N}\}$; cet espace de Fréchet remplace l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$. Dans le cas Whitney, pour tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, on introduit *l'espace de Fréchet* $\mathcal{E}_{(\boldsymbol{M})}(F)$ des $(\boldsymbol{M})$-jets de Whitney sur F.

De plus, pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, *l'espace de Fréchet* $\mathcal{E}_{(\boldsymbol{M})}(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : |f|_p := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{p^{|\alpha|}\,\|\mathrm{D}^\alpha f\|_{K_p}}{M_{|\alpha|}} < \infty \right\}$$

de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, muni du système de semi-normes $\{|\cdot|_p : p \in \mathbb{N}\}$ où $\{\, K_p : p \in \mathbb{N} \,\}$ est un recouvrement compact régulier et fondamental de Ω. Cet espace de Fréchet remplace l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Tout est alors en place pour considérer la généralisation des questions posées précédemment.

Espaces du type Roumieu

Dans le cas Borel, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on introduit *l'espace de Banach* $\Lambda_{p,\{\boldsymbol{M}\}}$. Il s'agit du sous-espace vectoriel

$$\left\{ \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} : \|\boldsymbol{c}\|_p := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{|c_\alpha|}{p^{|\alpha|}M_{|\alpha|}} < \infty \right\}$$

de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$, muni du système de semi-normes $\{|\cdot|_p : p \in \mathbb{N}\}$. Cela étant, $\Lambda_{\{\boldsymbol{M}\}}$ est la limite inductive des espaces $\Lambda_{p,\{\boldsymbol{M}\}}$; cet espace (LB) remplace l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$. Dans le cas Whitney, pour tout fermé propre F, on introduit les espaces $\mathcal{E}_{p,\{\boldsymbol{M}\}}(F)$ et $\mathcal{E}_{\{\boldsymbol{M}\}}(F)$; si F est compact, il s'agit d'espaces de Banach et (LB) respectivement; si F est fermé et non compact, d'espaces de Fréchet et (LF) respectivement.

En procédant de la même manière, on peut introduire les espaces $\mathcal{E}_{p,\{\boldsymbol{M}\}}(\Omega)$ et $\mathcal{E}_{\{\boldsymbol{M}\}}(\Omega)$ pour tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Cet espace $\mathcal{E}_{\{\boldsymbol{M}\}}(\Omega)$ remplace alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

De la sorte, tout est en place pour considérer la généralisation des questions posées précédemment.

*

* *

Revenons à présent à l'objet de ce cours.

Plutôt que de décrire succinctement le contenu de ce cours dans cette introduction, nous allons consacrer le premier chapitre à une description élaborée et historique des résultats établis par la suite.

Maintenant, au travail!

J. Schmets

Notations

Dans ces notes, nous allons recourir aux notations suivantes:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Travaillant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension $n \in \mathbb{N}$, nous sommes amenés à considérer des multi-indices

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

donnant lieu aux notations
$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$
$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ appelé *longueur* de α
$\beta \leq \alpha$ signifie que $\beta_1 \leq \alpha_1, \ldots, \beta_n \leq \alpha_n$
$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$
$\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ si $\beta \leq \alpha$
$\mathrm{C}_\alpha^\beta = \binom{\alpha}{\beta} = \mathrm{C}_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \mathrm{C}_{\alpha_\mathrm{n}}^{\beta_\mathrm{n}} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \ldots \binom{\alpha_\mathrm{n}}{\beta_\mathrm{n}}$ si $\beta \leq \alpha$
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
$\mathrm{D}_x^\alpha f = \mathrm{D}_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_{x_n}^{\alpha_n} f$.

Avec ces notations, pour tous $z \in \mathbb{C}^n$ et $p \in \mathbb{N}_0$, nous avons

$$\frac{1}{p!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_p=1}^{n} z_{k_1} \cdots z_{k_p} = \sum_{|\alpha|=p} \frac{z^\alpha}{\alpha!}.$$

Dès lors, le théorème du développement limité de Taylor s'écrit très simplement comme suit.

Théorème 0.0.1 (Formule de Taylor) *Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et si $f \in \mathcal{C}^p(\Omega)$ est réel avec $p \in \mathbb{N}$, alors, pour tous points x, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $\{x + rh \colon r \in [0, 1]\}$ soit inclus dans Ω, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que*

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq p-1} [\mathrm{D}^\alpha f]_x \frac{h^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=p} [\mathrm{D}^\alpha f]_{x+\theta h} \frac{h^\alpha}{\alpha!}. \blacksquare$$

Pour tout ouvert propre Ω de $\mathbb{R}^n$, nous posons

$$\Omega^* := \{\, x + iy \in \mathbb{C}^n : x, y \in \mathbb{R}^n; x \in \Omega; |y| < d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \,\}.$$

Chapitre 1

Aperçu de la théorie

1.1 Le théorème de Borel et ses premières améliorations

Le plus souvent, dans la littérature récente, le théorème de Borel est énoncé de la manière suivante.

Théorème 1.1.1 (Borel, 1895, [7]) *Pour toute famille* $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ *de nombres complexes, il existe une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\mathrm{D}^\alpha f(0) = c_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.∎

Historiquement parlant, le résultat original de Borel fut établi pour $n = 1$ seulement, au moyen d'une solution 2π-périodique: f est obtenu comme limite d'une série de Fourier. A présent c'est plutôt la preuve directe et élégante mise au point par Mirkil (1956, [17]) qui est utilisée. Elle recourt à un élément de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et à la convergence uniforme; à ce titre, elle omet cependant une amélioration considérable des propriétés que la fonction f peut avoir.

La première amélioration du théorème de Borel a été obtenue par Bernstein et mentionne déjà cette propriété supplémentaire.

Théorème 1.1.2 (Bernstein, 1913, [1]) *Pour toute suite* $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ *de nombres complexes, il existe une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ *analytique hors de l'origine et telle que* $\mathrm{D}^m f(0) = c_m$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}_0$.∎

Remarquons que, comme l'existence d'une fonction f est annoncée pour toute suite de nombres complexes, un théorème de Cauchy assure l'impossibilité en général d'obtenir l'analyticité de f sur un voisinage de l'origine.

Peu de temps après, Ritt a obtenu une nette généralisation de ce résultat de Bernstein. En fait, Ritt étudiait le comportement asymptotique des fonctions holomorphes au sommet d'un secteur ouvert du plan complexe et sa contribution résulte d'un corollaire de son théorème principal. Dans le paragraphe suivant, nous verrons ceci avec plus de détails. Ici, limitons-nous à ce corollaire, connu depuis lors comme étant le théorème de Borel-Ritt.

Théorème 1.1.3 (Ritt, 1916, [21]) *Pour toute suite* $(c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ *de* $\mathbb{C}$*, il existe une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *analytique sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *et telle que* $\mathrm{D}^m f(0) = c_m$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}_0$.

En fait, pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/2[$*, il existe une telle fonction* f *ayant une extension holomorphe sur le secteur* $\left\{ \rho e^{i\theta} : \rho > 0, -\varepsilon < \theta < \pi + \varepsilon \right\}$.∎

L'étape suivante dans cette suite d'améliorations du théorème de Borel est due à Besikowitsch. Pour la première fois, ce n'est plus le fermé $\{0\}$ qui est concerné, même si l'extension est plutôt "modeste".

Théorème 1.1.4 (Besikowitsch, 1923, [2]) *Pour tout intervalle* $[a, b]$ *compact de* $\mathbb{R}$ *et toutes suites* $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ *et* $(b_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ *de nombres complexes, il existe une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ *analytique sur l'intervalle* $]a, b[$ *et telle que* $\mathrm{D}^m f(a) = a_m$ *et* $\mathrm{D}^m f(b) = b_m$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}_0$.∎

Ensuite arrive une généralisation transcendante: le travail de Whitney. Cependant, comme annoncé plus haut et afin de respecter plus ou moins l'ordre chronologique, traitons d'abord dans le paragraphe suivant les résultats relatifs au comportement asymptotique des fonctions holomorphes; il s'agit là d'un sujet qui refera surface plus tard.

1.2 Sur le comportement asymptotique des fonctions holomorphes

En première lecture, ce paragraphe peut être omis.

Définition. Une fonction f holomorphe sur un domaine propre U de $\mathbb{C}$ *a un comportement asymptotique en un point* z_0 *de la frontière* ∂U de U si les limites suivantes

$$\lim_{\substack{z \in U \\ z \to z_0}} f(z) = d_0$$

et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{z \in U \\ z \to z_0}} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} d_k (z - z_0)^k}{(z - z_0)^m} = d_m$$

existent et sont finies. On écrit alors

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m (z - z_0)^m \text{ en } z_0 \text{ sur } U$$

et

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m (z - z_0)^m$$

est appelé *développement asymptotique de* f *en* z_0 *sur* U.

Cela étant, le résultat principal de Ritt s'énonce comme suit.

Théorème 1.2.1 (Ritt, 1916, [21]) *Pour toute suite* $(d_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ *de* $\mathbb{C}$ *et tout secteur*

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{ \rho e^{i\theta} : \rho > 0, 0 < \theta < \beta - \alpha \right\},$$

avec $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, *il existe une fonction* g *holomorphe sur* $S_{\alpha,\beta}$ *et ayant* $\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m$ *pour développement asymptotique en* 0 *sur* $S_{\alpha,\beta}$.∎

Afin d'en déduire le théorème de Borel-Ritt 1.1.3, il suffit de poser $d_m = c_m/m!$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = -\varepsilon$ et $\beta = \pi + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ et de vérifier directement que la fonction f définie sur $\{0\} \cup S_{\alpha,\beta}$ par $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in S_{\alpha,\beta}$ et $f(0) = c_0$ est une solution.

La définition précédente peut être généralisée de la manière suivante.

Définition. Etant donné un domaine propre U de $\mathbb{C}$, une partie D de ∂U est *régulièrement asymptotique pour* U si, pour toute famille $(c_{d,m})_{d \in D, m \in \mathbb{N}_0}$ de nombres complexes, il existe une fonction f holomorphe sur U et telle que

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_{d,m} (z - d)^m \text{ en } d \text{ sur } U, \quad \forall d \in D.$$

Il est clair qu'un tel ensemble D ne peut pas contenir de point isolé de ∂U ni avoir un point d'accumulation; en particulier, un tel ensemble D doit être dénombrable.

Dans ce contexte, plusieurs résultats sont parus en 1926.

Théorème 1.2.2 (Carleman, 1926, [9]) a) *Une partie finie de la frontière d'un domaine convexe et borné U de $\mathbb{C}$ est toujours régulièrement asymptotique pour U.*

b) *Pour tout rayon $R > 0$, $\{0\}$ est régulièrement asymptotique pour*

$$U = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \} \setminus \{ x \in \mathbb{C} : x \geq 0 \} . \blacksquare$$

Dans une autre direction, on trouve également des résultats du type suivant.

Théorème 1.2.3 (Franklin, 1926, [10]) *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, soit δ_k une demi-droite fermée de $\mathbb{C}$ ayant d_k pour extrémité. Si ces demi-droites sont disjointes deux à deux et si l'ensemble $D = \{ d_k : k \in \mathbb{N} \}$ n'a pas de point d'accumulation, alors D est régulièrement asymptotique pour $\mathbb{C} \setminus \cup_{k=1}^{\infty} \delta_k$.* $\blacksquare$

Ensuite, jusqu'en 1994, cela semble être le calme plat sur ce sujet dans la littérature. A ce moment, avec Valdivia, j'ai obtenu le résultat suivant qui contient tous les cas précédents.

Corollaire 1.2.4 (Schmets-Valdivia, 1994, [27]) *Soit U un domaine propre de $\mathbb{C}$ et soit D une partie dénombrable de ∂U et n'ayant pas de point d'accumulation.*

Si, pour tout $d \in D$, la composante connexe de d dans ∂U diffère de $\{d\}$, alors D est régulièrement asymptotique pour U. $\blacksquare$

1.3 La théorie de Whitney

Revenons à présent au théorème de Borel-Ritt et ses généralisations.

L'amélioration suivante est considérable: c'est la théorie de Whitney (cf. [40] et [41]). Cette fois, il n'est pas possible d'énoncer directement les résultats: il est nécessaire de spécifier le contexte.

Définitions. A partir de maintenant et sauf mention explicite du contraire, F désigne un fermé propre de $\mathbb{R}^n$.

Cela étant, un *jet $\boldsymbol{\varphi}$ sur F* est tout simplement une famille ordonnée

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \text{ avec } \varphi_\alpha \in \mathcal{C}(F), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

de fonctions continues sur F, indicée par les multi-indices.

Cette notion de jet est très générale, trop générale en fait pour notre propos. En fait les jets qui vont nous intéresser sont ceux qui *viennent d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$*, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_\alpha = (\mathrm{D}^\alpha f)|_F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Ces jets sont nécessairement spéciaux car les dérivées de f sont liées les unes aux autres. Une voie intéressante pour décrire ce fait consiste à recourir à la formule limitée de Taylor. Par exemple, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est réel, alors, pour tous entier $m \in \mathbb{N}_0$, multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ vérifiant $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$ et éléments x, $y \in \mathbb{R}^n$, le reste de Taylor

$$(R_x^m f)_\alpha(y) := \mathrm{D}^\alpha f(y) - \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \frac{\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{|\beta|=m-|\alpha|} \frac{\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(x+\theta(y-x)) - \mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

pour un certain $\theta \in]0,1[$. Dès lors, en recourant à la continuité uniforme des dérivées de f sur toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, nous devons avoir

$$\sup_{\substack{x,y \in K \\ 0<|x-y|\leq t}} \frac{|(R_x^m f)_\alpha(y)|}{|y-x|^{m-|\alpha|}} \to 0 \text{ si } t \to 0^+$$

pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$.

Tout ce que nous venons de faire peut être adapté aux éléments du jet $\boldsymbol{\varphi}$, à l'exception de l'utilisation de θ. Explicitement, ceci conduit aux considérations suivantes.

Notation. Si $\boldsymbol{\varphi}$ est un jet sur F, nous posons

$$(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y) := \varphi_\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

pour tous $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$ et x, $y \in F$.

Définition. Un *jet de Whitney sur* F est un jet $\boldsymbol{\varphi}$ sur F tel que, pour toute partie compacte K de F et tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ vérifiant $|\alpha| \leq m$,

$$\sup_{\substack{x,y \in K \\ 0<|x-y|\leq t}} \frac{|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y-x|^{m-|\alpha|}} \to 0 \text{ si } t \to 0^+.$$

La contribution remarquable de Whitney à cette théorie est qu'il a établi que cette condition est suffisante pour assurer qu'un jet vienne d'une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. En particulier, il a prouvé le résultat suivant.

Théorème 1.3.1 (Whitney, 1934, [40]) *Un jet sur un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ vient d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si c'est un jet de Whitney.*

De plus, dans un tel cas, on peut supposer que la fonction f est analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus F$, en fait holomorphe sur

$$(\mathbb{R}^n \setminus F)^* = \{\, z \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n \setminus F, |y| < d(x, F) \,\} . \blacksquare$$

Insistons sur le fait que cette dernière partie relative à l'analyticité et à l'holomorphie est délicate à obtenir.

1.4 Intervention de l'analyse fonctionnelle

L'analyse fonctionnelle donne de ces deux résultats, c'est-à-dire les théorèmes de Borel et de Whitney, une interprétation fort intéressante et débouchant sur de nombreuses questions.

Théorème 1.4.1 (Borel) *L'opérateur linéaire continu de restriction*

$$R \colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}; \quad f \mapsto \big(\mathrm{D}^\alpha f(0)\big)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

est surjectif. $\blacksquare$

Afin de donner une interprétation analogue du théorème de Whitney, nous devons munir l'espace vectoriel $\mathcal{E}(F)$ des jets de Whitney sur le fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, d'une "bonne" topologie localement convexe séparée. Dans ce contexte, le mot "bonne" doit être compris au sens suivant: il se rapporte aux propriétés localement convexes de l'espace $\mathcal{E}(F)$; il ne se rapporte pas à l'écriture des semi-normes de cet espace qui s'écrivent explicitement sous la forme

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{m,K} := \sup_{|\alpha| \le m} \|\varphi_\alpha\|_K + \sup_{k \le m} \sup_{|\alpha| = k} \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \ne y}} \frac{|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y - x|^{m - |\alpha|}}$$

avec $m \in \mathbb{N}$ et où K est une partie compacte quelconque de F.

Il est aisé d'établir que $\mathcal{E}(F)$ est un espace de Fréchet. En fait, il a de nombreuses autres propriétés; ceci sera mentionné plus tard (cf. Théorème 1.5.6). A cet endroit, c'est plutôt l'énoncé du théorème de Whitney mis au goût de l'analyse fonctionnelle qui a sa place.

Théorème 1.4.2 (Whitney) *L'opérateur linéaire continu de restriction*

$$R_F \colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(F); \quad f \mapsto (\mathrm{D}^\alpha f|_F)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

est surjectif. $\blacksquare$

A la lecture de tels énoncés, un analyste fonctionnel se pose immédiatement la question suivante: quand cette surjection linéaire continue admet-elle un inverse linéaire continu à droite? ou, de manière équivalente: quand existe-t-il un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$?

En fait, ces questions ont déjà été traitées par Whitney en 1934 mais il dut les laisser comme problèmes ouverts. Signalons cependant dès maintenant qu'il résolut positivement cette question dans le cas des jets d'ordre fini, c'est-à-dire pour les jets qui viennent de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in \mathbb{N}_0$.

1.5 Existence d'opérateurs linéaires continus d'extension douce

Voici tout d'abord un résultat qui n'est guère attribué à un mathématicien particulier tout en étant revendiqué par plusieurs.

Théorème 1.5.1 *Il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension de ω dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.* ∎

En d'autres termes, dans le cas du théorème de Borel, la réponse est négative. Ceci est dû au fait que son existence entrainerait celle d'un opérateur linéaire continu d'extension de ω dans $\mathcal{D}^\infty([-1,1])$, ce qui est impossible car ω n'a pas de norme continue. Mityagin le mentionne dans son article [18], fondamental pour la théorie des espaces nucléaires. Il y prouve également le résultat suivant dont la publication provoqua une énorme surprise.

Théorème 1.5.2 (Mityagin, 1961, [18]) *Il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}([-1,1])$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.* ∎

Cette fois la démonstration est autrement solide: elle fait appel au fait que l'espace $\mathcal{E}([-1,1])$ est un espace nucléaire d'un type spécial.

Cette situation, à savoir que l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dépend de la nature du fermé F, a créé un champ de recherche privilégié pour l'analyse fonctionnelle. A partir de ce moment, la chasse aux exemples positifs ou négatifs était ouverte, de même que celle pour déterminer des conditions nécessaires ou suffisantes d'existence de tels opérateurs.

En guise d'exemples, le seul ayant une démonstration courte et directement accessible s'énonce comme suit.

Théorème 1.5.3 (Seeley, 1964, [30]) *Si F est un demi-espace fermé de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*∎

D'autres exemples ou contre-exemples sont dus à Bierstone, seul (1978, [3]) ou avec Milman (1977, [4]) ou Schwarz (1983, [5]), Goncharov (1996, [14]), Plesniak, seul (1990, [20]) ou avec Pawłucki (1988, [19]), Stein (1970, [31]), Tidten (cf. ci-dessous) ... Dans son Habilitationsschrift (2001, [11]), Frerick donne notamment une excellente synthèse de cette théorie. Il convenait de citer des noms, la crainte est d'en oublier beaucoup. Les preuves sont de nature élaborée, les résultats également. Voici quelques résultats typiques, choisis parmi ceux aisés à formuler.

Théorème 1.5.4 (Tidten, 1979, [32]) *Si K est le compact*

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \mathrm{e}^{-1/x} \right\},$$

il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.∎

Théorème 1.5.5 (Tidten, 1983, [33]) *Si K est le compact de Cantor, il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*∎

Par ailleurs, en recourant à des techniques relevant de l'analyse fonctionnelle, Tidten a aussi établi le résultat suivant contenant une condition nécessaire et suffisante. Son travail recourt fortement au théorème de scission de Vogt et Wagner.

Théorème 1.5.6 (Tidten, 1979, [32]) *Si K est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{E}(K)$ est un espace de Fréchet nucléaire ayant la propriété* (Ω) *et les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) *l'espace $\mathcal{E}(K)$ est isomorphe à un sous-espace de s;*
(b) *l'espace $\mathcal{E}(K)$ a la propriété* (DN)*;*
(c) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*∎

1.6 Existence d'opérateurs linéaires continus d'extension analytique

Dans les deux paragraphes précédents, l'amélioration du théorème de Borel due à Ritt ainsi que la deuxième partie du théorème de Whitney ont été ignorées. Dans les années 1990, M. Valdivia, seul tout d'abord puis avec moi, s'est intéressé à cet aspect des choses: obtenir des opérateurs linéaires continus d'extension avec images analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ ou mieux, admettant un prolongement holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ d'intersection avec $\mathbb{R}^n$ égale à $\mathbb{R}^n \setminus F$. Afin d'introduire les résultats auxquels nous sommes arrivés, la notion suivante doit être introduite.

Notation. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. *L'espace de Fréchet* $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées sur Ω, muni de la topologie localement convexe de la convergence uniforme, c'est-à-dire muni des semi-normes

$$p_m(f) := \sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_\Omega\,, \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Cela étant le résultat suivant est l'élément clef pour obtenir les propriétés.

Théorème 1.6.1 (Schmets-Valdivia, 1997, [28]) *Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu*

$$T_\Omega \colon \mathcal{BC}^\infty(\Omega) \to \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$$

tel que
(a) *pour tout $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $T_\Omega f$ a une extension holomorphe sur l'ouvert*

$$\Omega^* := \{\, x + iy : x \in \Omega, |y| < d(x, \partial\Omega \,\}$$

de $\mathbb{C}^n$;
(b) *pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de Ω telle que*

$$\sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha f - \mathrm{D}^\alpha T_\Omega f\|_{\Omega\setminus K} \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Voici le premier résultat affirmant l'existence d'opérateurs linéaires continus d'extension analytique.

Théorème 1.6.2 (Schmets-Valdivia, 1997, [28]) *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Tout jet de Whitney sur K vient d'une fonction appartenant à $\mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et de restriction analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus K$.*

(b) *S'il existe un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors il en existe également un de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec images analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus K$.* $\blacksquare$

Remarque. Ce résultat appelle deux commentaires :
(a) par après, Langenbruch a établi ce résultat par une autre méthode qui s'étend directement au cas des espaces de jets et fonctions ultradifferentiables (1999, [15]).
(b) un tel résultat améliore les théorèmes d'extension obtenus précédemment, il ne les remplace pas.

Le point de départ de la recherche ultérieure sur ce sujet est une question ouverte posée dans [28]. Elle demande tout naturellement ce qui se passe si le compact K est remplacé par un fermé non compact.

La réponse, annoncée en automne 1999, est due à Frerick et Vogt. Leur argument est basé sur une utilisation simple et élégante de propriétés d'analyticité et met en évidence la condition suivante.

Définition. Un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ *vérifie la condition* (FV) si, pour toute boule B de $\mathbb{R}^n$, la frontière de la réunion des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus F$ rencontrant B est compacte.

Théorème 1.6.3 (Frerick-Vogt, 2002, [12]) *Si F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$ et s'il existe un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, les assertions suivantes sont équivalentes:*
(a) *il existe également un tel opérateur avec images analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus F$;*
(b) *il existe également un tel opérateur avec images admettant un prolongement holomorphe sur $(\mathbb{R}^n \setminus F)^*$;*
(c) *F vérifie la condition* (FV).∎

Ensuite deux voies de recherche se sont développées.

1.7 L'influence de Frerick

La première voie de recherche suivie est due principalement à Frerick.

Tout d'abord Frerick a défendu un "Habilitationsschrift" remarquable sur le sujet (2001, [11]). Dans cette thèse, il présente une analyse personnelle de la littérature, de nombreuses améliorations et des compléments substantiels. Il termine son travail en donnant des applications liées à l'existence d'opérateurs linéaires continus inverses à droite pour des opérateurs aux dérivées partielles sur des espaces de distributions.

Ensuite, au début de l'année 2002, Brück et Frerick ont obtenus des propriétés très intéressantes dans le cas $n = 1$.

Théorème 1.7.1 (Brück-Frerick, 2003, [8]) *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}$.*

(a) *Tout jet de Whitney sur K vient d'une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(K^\times)$ où $K^\times = (\mathbb{R} \setminus K) \times i\mathbb{R}$.*

(b) *S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors il en existe également un de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(K^\times)$.*∎

Théorème 1.7.2 (Brück-Frerick, 2003, [8]) *Soit F un fermé propre de $\mathbb{R}$.*
(a) *Tout jet de Whitney sur F vient d'un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(F^\times)$.*
(b) *S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors il en existe également un de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(F^\times)$.*∎

Ils ont aussi obtenu les résultats étonnants suivants.

Théorème 1.7.3 (Brück-Frerick, 2003, [8]) (a) *Pour tout $\boldsymbol{c} \in \omega$, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ tel que $\mathrm{D}^m f(0) = c_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.*
(b) *Pour tout intervalle compact I de $\mathbb{R}$, il existe un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(I)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus I)$.*∎

Leur méthode consiste en le remplacement du noyau $\exp(-z^2)$ utilisé par Whitney par un autre mieux adapté à leur problème. A la lecture de ces résultats, on ne peut s'empêcher de penser au théorème de Ritt et aux résultats relatifs au développement asymptotique des fonctions holomorphes et notamment à la proposition B.10.3. A ce moment, la partie (a) reste étonnante tandis que la partie (b) suscite l'idée qu'une extension est possible. Voici la réponse apportée par Boonen et Frerick à ce propos.

Théorème 1.7.4 (Boonen-Frerick, 2003, [6]) *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}$. S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe aussi un opérateur linéaire continu d'extension $\hat{E}$ de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K)$ tel que, pour toute partie compacte $H \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$, il existe $C > 1$ tel que*

$$\sup_{0 \leq j \leq k} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ d(x,K) \leq 1}} \left| \mathrm{D}^j (\hat{E}\boldsymbol{\varphi})(x) \right| + \sup_{z \in H} \left| (\hat{E}\boldsymbol{\varphi})(z) \right| \leq C \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{k,K}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(K).$$∎

Théorème 1.7.5 (Boonen-Frerick, 2003, [6]) *Soit F un fermé propre de $\mathbb{R}$. S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors il en existe aussi un de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus F)$ si et seulement si ∂F est compact.*∎

1.8 Existence d'opérateurs linéaires continus d'extension holomorphe

La deuxième voie a été développée par Schmets et Valdivia. Notre idée a toujours été d'accéder à la convergence uniforme; ceci est particulièrement clair si on pense à l'espace $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$. Dès le départ nous avons réalisé que ceci condamnait la possibilité d'obtenir un prolongement holomorphe sur $(\mathbb{R}^n \setminus F)^*$ et que nous devions mettre en évidence pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ un ouvert plus petit de $\mathbb{C}^n$, noté D_Ω, tel que en particulier,

$$D_\Omega \subset \Omega^*, \quad D_\Omega \cap \mathbb{R}^n = \Omega \quad \text{et} \quad (x + iy \in D_\Omega \Rightarrow x \in \Omega).$$

Sa construction est assez technique; elle conduit à la généralisation suivante du théorème clef 1.6.1.

Théorème 1.8.1 (Schmets-Valdivia, 2001, [29]) *Pour tout ouvert propre Ω de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu T_Ω de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_\infty(D_\Omega)$ tel que, pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de Ω telle que*

$$|\mathrm{D}^\alpha f(x) - \mathrm{D}^\alpha (T_\Omega f)(x + iy)| \leq \varepsilon$$

pour tous $x + iy \in D_\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $x \in \Omega \setminus K$ et $|\alpha| \leq m$.∎

Afin de réaliser la signification de ce résultat, l'espace de Fréchet $\mathcal{O}_\infty(D_\Omega)$ doit être défini. Ses éléments sont les fonctions holomorphes sur D_Ω qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées. Sa topologie est alors bien sûr déterminée par l'ensemble des semi-normes

$$\|f\|_m := \sup_{|\alpha| \leq m} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_{D_\Omega}, \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Une fois ce résultat clef obtenu, les théorèmes d'extension sont disponibles. En voici déjà un; le cas d'un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être traité.

Théorème 1.8.2 (Schmets-Valdivia, 2001, [29]) *Si F est un compact non vide ou un fermé de $\mathbb{R}^n$ ayant un complément borné, alors l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ implique celle d'un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}_\infty(D_{\mathbb{R}^n \setminus F})$.*∎

Chapitre 2

Le théorème de Borel et ses premières améliorations

2.1 Le théorème de Borel

Originellement le théorème et la preuve de Borel se présentent comme suit.

Théorème 2.1.1 (Borel, 1895, [7]) *Pour toute suite $\boldsymbol{c} = (c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de nombres complexes, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ périodique de période 2π et telle que*

$$\mathrm{D}^m f(0) = c_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Preuve. Quitte à rechercher f sous la forme $f = \Re f + i\Im f$, il est clair qu'il suffit d'établir le résultat pour toute suite $\boldsymbol{c}$ de nombres réels.

Etant donné une suite $\boldsymbol{c} = (c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de nombres réels, nous allons rechercher en deux temps une telle fonction f au moyen de son développement en série de Fourier.

a) Etablissons tout d'abord qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ périodique de période 2π et de développement en série de Fourier

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin(kx)$$

dont les dérivées s'obtiennent en dérivant la série terme à terme et telle que

$$|\mathrm{D}^m g(0) - c_m| \leq 1 + \frac{\pi^2}{6}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Formellement, tout revient à trouver une solution “approchée” du système

$$\begin{cases} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} r_k k^{2m} = c_{2m}, & \forall m \in \mathbb{N}_0, \\ (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} s_k k^{2m+1} = c_{2m+1}, & \forall m \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

ces séries convergeant absolument. Si nous remarquons en outre que le deuxième système peut s'écrire

$$(-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} (ks_k) k^{2m} = c_{2m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

tout revient à trouver une solution “approchée” d'un système du type

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k k^{2m} = d_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

où $(d_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de nombres réels.

a.1) Construction d'une solution “approchée” de ce système.

Procédons par récurrence.

Nous déterminons tout d'abord le premier entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|k_0 - |d_0|| \leq 1$ et posons

$$t_k = \frac{1}{k^{2.0}} \mathrm{Sign}(d_0) \text{ pour } k = 1, \ldots, k_0.$$

Ensuite nous posons

$$d'_1 = d_1 - \sum_{k=1}^{k_0} t_k k^{2.1},$$

nous déterminons le premier entier k_1 strictement supérieur à k_0 et tel que

$$|(k_1 - k_0) - |d'_1|| \leq 1,$$

nous posons

$$t_k = \frac{1}{k^{2.1}} \mathrm{Sign}(d'_1) \text{ pour } k = k_0 + 1, \ldots, k_1$$

et continuons de la sorte: si k_l et t_k pour $k = k_{l-1} + 1, \ldots, k_l$ sont déterminés, nous posons

$$d'_{l+1} = d_{l+1} - \sum_{k=1}^{k_l} t_k k^{2.(l+1)},$$

nous déterminons le premier entier k_{l+1} strictement supérieur à k_l et tel que

$$\left|(k_{l+1}-k_l)-\left|d'_{l+1}\right|\right|\leq 1$$

et nous posons

$$t_k=\frac{1}{k^{2.(l+1)}}\mathrm{Sign}(d'_{l+1}) \text{ pour } k=k_l+1,\ldots,k_{l+1}.$$

a.2) Vérification.

La série $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ converge absolument car

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_k|\leq k_0+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq k_0+\frac{\pi^2}{6}.$$

De plus nous avons

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_k-d_0\right|\leq\left|\sum_{k=1}^{k_0}t_k-d_0\right|+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq 1+\frac{\pi^2}{6}.$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} t_k k^2$ converge absolument car

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|t_kk^2\right|\leq\sum_{k=1}^{k_0}k^2+\sum_{k=k_0+1}^{k_1}1+\sum_{k=k_1+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq k_0^3+(k_1-k_0)+\frac{\pi^2}{6}$$

et donne lieu à

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_kk^2-d_1\right|\leq\left|\sum_{k=1}^{k_1}t_kk^2-d_1\right|+\sum_{k=k_1+1}^{\infty}|t_k|\,k^2\leq 1+\frac{\pi^2}{6}.$$

En continuant de la sorte, nous obtenons pour tout $m\in\mathbb{N}_0$ la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} t_k k^{2m}$ et la majoration

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_kk^{2m}-d_m\right|\leq 1+\frac{\pi^2}{6}.$$

D'où la conclusion de cette partie a) en recourant au théorème 3.8.4 de [25].

b) Cela étant, prouvons en deux temps le résultat annoncé.

b.1) Posons

$$c'_m=\mathrm{D}^m g(0)-c_m,\quad \forall m\in\mathbb{N}_0,$$

et considérons la série
$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k \frac{x^k}{k!}.$$

De $|c'_k| \le 1 + \pi^2/6$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on tire de suite que h appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie $\mathrm{D}^m h(0) = c'_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, $h - g$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et est tel que $\mathrm{D}^m(g-h)(0) = c_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

b.2) Si ϕ est un élément de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[-\pi, \pi]$ et identique à 1 sur un voisinage de 0, on vérifie alors directement que
$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}} (g-h)(x + 2k\pi) \cdot \phi(x + 2k\pi)$$
convient.∎

Remarque. La partie b.2) de la preuve précédente diffère de celle de Borel. Notons qu'elle établit clairement que la propriété "de périodicité 2π" n'a en fait pas d'intérêt particulier dans l'énoncé du théorème de Borel; aussi nous ne la considérerons plus.□

Remarque. L'énoncé de Borel apparait comme suit, à la fin d'un paragraphe terminant la preuve:

> *on peut trouver une fonction périodique d'une variable x admettant des dérivées de tout ordre, ces dérivées ayant des valeurs quelconques données pour $x = 0$*

et figure page 44 dans [7].□

2.2 Le théorème de Bernstein

Apparemment la première (semi-)amélioration du théorème de Borel est due à Bernstein. Elle s'énonce comme suit.

Théorème 2.2.1 (Bernstein, 1913, [1]) *Pour toute suite $\boldsymbol{c} = (c_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de nombres complexes, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ analytique sur l'ensemble $]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[$ et telle que $\mathrm{D}^m f(0) = c_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.*∎

Une fonction f est *analytique* sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel qu'un développement de Taylor
$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{c_\alpha}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

converge absolument vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x - x_0| \leq r$. Vu le théorème d'Abel, il revient au même de dire que f admet un prolongement g holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ tel que $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$. Une telle fonction f est bien évidemment $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et donne lieu à $c_\alpha = \mathrm{D}^\alpha f(x_0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Rappelons que si une fonctions g est holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, un théorème de Cauchy impose, en tout $z_0 \in U$, des conditions de bornation sur ses dérivées en z_0. Comme le théorème de Bernstein est valable pour toutes les suites $\boldsymbol{c}$ de nombres complexes, l'analyticité de f ne peut être exigée sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Le théorème de Bernstein est en retrait par rapport à celui de Borel quant à l'ouvert où la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ car on passe de $\mathbb{R}$ à $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ mais offre l'analyticité en plus.

Remarque. Ici est peut-être l'endroit le plus approprié pour formuler un propos de Borel. Si une fonction f est analytique sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, la donnée de la suite $(\mathrm{D}^m f(0))_{m \in \mathbb{N}_0}$ caractérise f. Cela étant, le théorème de Borel conjugué par exemple avec la fonction de Cauchy

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(qui appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et est telle que $\mathrm{D}^m \psi(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$) établit qu'il n'en est pas de même pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$: pour toute suite $\boldsymbol{c}$ de nombres complexes, il existe même une infinité de solutions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.□

Nous n'allons pas développer la preuve de Bernstein car ce résultat fut largement généralisé par Ritt. Cela fait l'objet du paragraphe suivant.

2.3 La contribution de Ritt

Nota Bene. Dans ce paragraphe, nous nous limitons strictement à l'obtention de la généralisation du théorème de Borel obtenue par Ritt. Pour la théorie du comportement asymptotique et les généralisations du théorème de Ritt, nous renvoyons à l'Appendice B.

Définition. Un *secteur* de $\mathbb{C}$ est un ensemble du type

$$\left\{ \rho \mathrm{e}^{i\theta} : \rho > 0, \alpha < \theta < \beta \right\}$$

avec α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Plus précisément, ce secteur est noté $S_{\alpha,\beta}$.

Définitions. Une fonction holomorphe f sur le secteur $S_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{C}$ *a un comportement asymptotique en* 0 *dans* $S_{\alpha,\beta}$ si les limites suivantes

$$d_0 := \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_{\alpha,\beta}}} f(z)$$

et, successivement pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$d_m := \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_{\alpha,\beta}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} d_j z^j}{z^m}$$

existent et sont finies.

On écrit alors

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m \text{ en } 0 \text{ dans } S_{\alpha,\beta}$$

et on dit que $\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m$ est *le développement asymptotique de* f *en* 0 *dans* $S_{\alpha,\beta}$.

Proposition 2.3.1 *Si la fonction f holomorphe sur le secteur $S_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{C}$ admet un prolongement holomorphe g sur $S_{\alpha,\beta} \cup b$ où b est une boule ouverte de centre* 0*, alors f a un comportement asymptotique en* 0*.*

En fait dans un tel cas, on a même $d_m = \mathrm{D}^m g(0)/m!$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et le développement asymptotique de f en 0 *dans $S_{\alpha,\beta}$ coïncide donc avec la série de Taylor de g en* 0*.*

Preuve. Il est clair qu'on doit avoir $d_0 = g(0)$ car g est continu en 0. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il vient

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathrm{D}^k g(0)}{k!} z^k}{z^m} &= \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} \frac{f(z) - g(z) + g(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathrm{D}^k g(0)}{k!} z^k}{z^m} \\
&= \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^k g(0)}{k!} z^{k-m} = \frac{\mathrm{D}^m g(0)}{m!}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque. Cette preuve établit clairement le résultat plus général suivant.

Si la fonction f holomorphe sur le domaine U de $\mathbb{C}$ admet un prolongement holomorphe g sur $U \cup b$ où b est une boule ouverte de centre $u_0 \in \partial U$, alors f a un comportement asymptotique en u_0.

En fait dans un tel cas, on a même $d_m = \mathrm{D}^m g(u_0)/m!$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et le développement asymptotique de f en u_0 dans U coïncide donc avec la série de Taylor de g en u_0. $\square$

Remarque. *Soit f une fonction holomorphe sur le secteur $S_{\alpha,\beta}$. Si f a un comportement asymptotique en 0 dans $S_{\alpha,\beta}$, ce comportement asymptotique ne caractérise pas f sur $S_{\alpha,\beta}$.* Pour établir ce fait, il suffit de prouver que la fonction $\mathrm{e}^{-1/z}$ holomorphe sur $S_{-\alpha,\alpha}$ pour $\alpha \in]0,\pi/2[$ est telle que $\mathrm{e}^{-1/z} \sim \sum_{m=0}^{\infty} 0.z^m$ en 0 dans $S_{-\alpha,\alpha}$. De fait, on a bien sûr $d_0 = 0$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $d_m = 0$ car on a les majorations suivantes

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-1/z}}{z^m}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{x^2+y^2}}}{|z|^m} \leq \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\cos^2(\alpha)}{x}}}{x^m}, \quad \forall z \in S_{-\alpha,\alpha},$$

où la majorante tend vers 0 si $z \to 0$.□

Lemme 2.3.2 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z > 0$, on a $|1 - \mathrm{e}^{-z}| < |z|$.*

Preuve. De

$$\mathrm{e}^{-z} - 1 = \mathrm{e}^{-tz}\big|_0^1 = -\int_0^1 z\mathrm{e}^{-tz}\, dt,$$

on tire aussitôt

$$\left|\mathrm{e}^{-z} - 1\right| \leq |z| \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{-tz}\right|\, dt$$

avec $|\mathrm{e}^{-tz}| = \mathrm{e}^{-t\Re z} < 1$ sur $]0,1[$. La conclusion s'ensuit aussitôt.∎

Lemme 2.3.3 *Pour tout $b > 0$, la fonction $h(z) := 1 - \mathrm{e}^{-b/\sqrt{z}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$.*

De plus, pour tout $\theta \in]0,\pi[$ et si on pose $S = S_{-\pi+\theta,\pi-\theta}$, il vient

(a) $|h(z)| \leq \dfrac{b}{|\sqrt{z}|}$ *pour tout $z \in S$;*

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} \frac{1-h(z)}{z^m} = 0$ *pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Les théorèmes de génération des fonctions holomorphes assurent l'holomorphie de cette fonction h sur $\mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$. De plus, tout $z \in S$ s'écrit de façon unique $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\phi}$ avec $-\pi + \theta < \phi < \pi - \theta$ et c'est bien sûr la détermination $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{i\phi/2}$ qui est choisie. Cela étant,

(a) $\Re\dfrac{b}{\sqrt{z}} = \dfrac{b}{\sqrt{|z|}}\cos(\phi/2)$ est > 0 et le lemme précédent donne

$$|h(z)| = \left|1 - \mathrm{e}^{-b/\sqrt{z}}\right| < \frac{b}{|\sqrt{z}|};$$

(b) il vient successivement

$$\left|\frac{1-h(z)}{z^m}\right| = \frac{\left|\mathrm{e}^{-b/\sqrt{z}}\right|}{|z|^m} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{b}{\sqrt{|z|}}\cos(\phi/2)}}{|z|^m} < \frac{\mathrm{e}^{-\frac{b}{\sqrt{|z|}}\sin(\theta/2)}}{|z|^m}$$

où la majorante tend vers 0 si $z \to 0$.∎

Théorème 2.3.4 (Ritt, 1916, [21]) *Pour toute suite $\boldsymbol{d} = (d_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de nombres complexes et tout secteur $S_{\alpha,\beta}$, il existe une fonction holomorphe g sur $S_{\alpha,\beta}$ telle que*

$$g(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m \text{ en } 0 \text{ dans } S_{\alpha,\beta}.$$

Preuve. Etablissons d'abord qu'il suffit d'établir ce résultat dans le cas d'un secteur du type $S_{-\theta,\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$. De fait, si nous posons $\gamma = -(\alpha+\beta)/2$, la rotation

$$R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto z\mathrm{e}^{i\gamma}$$

est telle que $RS_{\alpha,\beta} = S_{-\theta,\theta}$ avec $\theta = (\beta-\alpha)/2$. Cela étant, s'il existe une fonction h holomorphe sur $S_{-\theta,\theta}$ telle que

$$h(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (d_m \mathrm{e}^{-im\gamma}) z^m \text{ en 0 dans } S_{-\theta,\theta},$$

la fonction g définie sur $S_{\alpha,\beta}$ par $g(z) = h(\mathrm{e}^{i\gamma} z)$ est bien sûr holomorphe sur $S_{\alpha,\beta}$ et telle que

$$g(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m \text{ en 0 dans } S_{\alpha,\beta}.$$

Supposons donc avoir $S_{\alpha,\beta} = S_{-\theta,\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$b_m = \begin{cases} \dfrac{1}{|d_m|\, m!} & \text{si } d_m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et introduisons les fonctions

$$g_m(z) = 1 - \mathrm{e}^{-b_m/\sqrt{z}},$$

holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. Cela étant, considérons la série formelle

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m g_m(z) z^m, \quad \forall z \in S_{-\theta,\theta}.$$

Vu la partie (a) du lemme précédent, il vient

$$|d_m g_m(z) z^m| \leq |d_m| \frac{b_m}{\sqrt{|z|}} |z|^m \leq \left|\frac{z^m}{m!}\right| |z|^{-1/2}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, la série $g(z)$ converge uniformément sur tout compact de $S_{-\theta,\theta}$ et définit donc une fonction holomorphe sur le secteur $S_{-\theta,\theta}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, considérons ensuite la décomposition

$$\frac{g(z) - \sum_{j=0}^{m-1} d_j z^j}{z^m} = -\sum_{j=0}^{m-1} d_j(1 - g_j(z))z^{j-m} + d_m g_m(z) + \sum_{j=m+1}^{\infty} d_j g_j(z) z^{j-m}.$$

Vu la partie (b) du lemme précédent, chacun des termes de la première somme du second membre tend vers 0 si $z \to 0$ dans $S_{-\theta,\theta}$ et il en est donc de même pour cette somme. Bien sûr, nous avons $d_m g_m(z) \to d_m$ si $z \to 0$ dans $S_{-\theta,\theta}$. Enfin, pour tout $z \in S_{-\theta,\theta}$ tel que $|z| < 1$, il vient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} d_j g_j(z) z^{j-m} \right| &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \left| \frac{z^{j-m}}{j!} \right| |z|^{-1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \sum_{j=m+1}^{\infty} |z|^{j-m} = \frac{\sqrt{|z|}}{1-|z|} \end{aligned}$$

avec $\sqrt{|z|}/(1 - |z|) \to 0$ si $z \to 0$ dans $S_{-\theta,\theta}$.

D'où la conclusion.∎

Le théorème de Ritt donne lieu à la généralisation suivante du théorème de Borel.

Théorème 2.3.5 (Ritt, 1916, [21]) *Pour toute suite $\boldsymbol{c} = (c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de nombres complexes, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ analytique sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ et telle que $\mathrm{D}^m f(0) = c_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.*

Preuve. Posons $d_m = c_m/m!$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et choisissons $\theta \in]0, \pi/2[$. Vu le théorème de Ritt, il existe une fonction g holomorphe sur $S_{-\theta,\pi+\theta}$ telle que $g(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m$ en 0 dans $S_{-\theta,\pi+\theta}$. Pour conclure, nous allons prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ selon

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ c_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

convient.

Il est clair que f est une fonction analytique sur $\mathbb{R}_0$, continue sur $\mathbb{R}$ et même qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\mathrm{D}f(0) = d_1 = c_1$. Pour les autres dérivées en 0, procédons par récurrence. Supposons avoir établi que f est p fois dérivable en 0 et tel que $\mathrm{D}^p f(0) = c_p$. Vu la forme du secteur, il existe $t > 0$ tel que, pour tout

$x \in \mathbb{R}_0$, la boule $\{ z : |z-x| \leq t\,|x| \}$ est incluse dans ce secteur (il suffit de prendre $t \in]0, \sin(\theta)[$). Cela étant, il vient successivement

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}^p f(x) - c_p}{x} - c_{p+1} &= \frac{p!}{x 2 i\pi} \int_{|z-x|=t|x|} \frac{g(z) - \sum_{j=0}^{p+1} c_j z^j / j!}{(z-x)^{p+1}}\, dz \\ &= \frac{p!}{x 2 i\pi} \int_{|z-x|=t|x|} \frac{g(z) - \sum_{j=0}^{p+1} d_j z^j}{z^{p+2}} \frac{z^{p+2}}{(z-x)^{p+1}}\, dz \end{aligned}$$

vu la formule de représentation de Cauchy des dérivées des fonctions holomorphes. Cela étant, pour conclure, il suffit de remarquer que le module de cette dernière expression est majoré par

$$\frac{p!}{2\pi\,|x|} 2\pi t\,|x| \sup_{|z|\leq(1+t)|x|} \left| \frac{g(z) - \sum_{j=0}^{p+1} d_j z^j}{z^{p+2}} \right| \frac{(1+t)^{p+2}\,|x|^{p+2}}{t^{p+1}\,|x|^{p+1}},$$

majorante qui tend vers 0 si $x \to 0$.∎

2.4 Le théorème de Besikowitsch

De son côté, Besikowitsch fut le premier à envisager des données portant sur un ensemble différent de $F = \{0\}$.

Théorème 2.4.1 (Besikowitsch, 1923, [2]) *Pour tout intervalle* $[a,b]$ *compact de* $\mathbb{R}$ *et toutes suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *de nombres complexes, il existe une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$*, analytique sur* $]a,b[$ *et telle que* $\mathrm{D}^n f(a) = a_n$ *et* $\mathrm{D}^n f(b) = b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_0$.∎

Remarque. Une fois connu le thérème de Ritt (ce qui n'était pas le cas de Besikowitsch), il est aisé d'établir ce résultat.

En effet, à partir de la fonction de Cauchy, il est aisé de déterminer des fonctions g_a, $g_b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, analytiques sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ respectivement et telles que $\mathrm{D}^n g_a(b) = \mathrm{D}^n g_b(a) = 0$ et $\mathrm{D}^n g_a(a) \mathrm{D}^n g_b(b) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, le théorème de Ritt assure l'existence de fonctions f_a, $f_b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, analytiques sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ respectivement et telles que $f = f_a g_b + f_b g_a$ soit une solution.□

L'étape suivante est la généralisation due à Whitney; il s'agit d'une évolution transcendante de la question, qui fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Les résultats de Whitney, [40]

3.1 Quelques espaces classiques fondamentaux

Rappelons la définition de quelques espaces localement convexes (abréviation adoptée en lieu et place de “espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés” ou espaces à semi-normes pour “espaces vectoriels topologiques à semi-normes séparés”) fondamentaux.

D’autres espaces, plus spécifiques, seront introduits au fur et à mesure..

Nous utilisons systématiquement la notation suivante: si f est une fonction bornée sur l’ensemble A, nous posons

$$\|f\|_A := \sup_{x\in A} |f(x)| \,.$$

Espace $\mathcal{C}^0(K)$

Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0(K)$ *est l’espace de Banach* obtenu en munissant l’espace vectoriel des fonctions continues sur K de la norme $\|\cdot\|_K$ de la convergence uniforme.

Espace $\mathcal{C}^0(F)$

Pour tout fermé non compact F de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0(F)$ *est l’espace de Fréchet* obtenu en munissant l’espace vectoriel des fonctions continues sur F de la convergence compacte, c’est-à-dire que $\mathrm{cs}(\mathcal{C}^0(F))$ est équivalent à $\{\, \|\cdot\|_K : K \text{ compact}, K \subset F \,\}$. En fait on choisit une *suite fondamentale* $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de compacts de* F (c’est-à-dire que cette suite est croissante et telle que tout compact de F est inclus dans un des K_m) et on munit $\mathcal{C}^0(F)$ du système dénombrable de semi-normes $\left\{\, \|\cdot\|_{K_m} : m \in \mathbb{N} \,\right\}$.

Espace $\mathcal{C}^p(\Omega)$ *pour* $p \in \mathbb{N}_0$

Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ et tout $p \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{C}^p(\Omega)$ *est l’espace de Fréchet* obtenu en munissant l’espace vectoriel des fonctions p-fois continûment dérivables sur Ω (continues si $p = 0$) de la convergence compacte, c'est-à-dire que $\mathrm{cs}(\mathcal{C}^p(\Omega))$ est équivalent à $\{\, \|\mathrm{D}^\alpha \cdot\|_K : K \text{ compact}, K \subset \Omega, |\alpha| \leq p \,\}$.

En fait, on choisit *une suite fondamentale* $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de compacts réguliers dans* Ω (c'est-à-dire telle que $K_1^\circ \neq \emptyset$, $K_m = K_m^{\circ,-} \subset K_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\cup_{m=1}^\infty K_m = \Omega$) et on munit $\mathcal{C}^p(\Omega)$ du système dénombrable de semi-normes $\{\|\cdot\|_{p,K_m} : m \in \mathbb{N}\}$ où $\|\cdot\|_{p,K_m} = \sup_{|\alpha|\leq p} \|\mathrm{D}^\alpha \cdot\|_{K_m}$.

Espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *est l'espace de Fréchet* obtenu en munissant l'espace vectoriel des fonctions infiniment continûment dérivables sur Ω de la convergence compacte, c'est-à-dire que $\mathrm{cs}(\mathcal{C}^\infty(\Omega))$ est équivalent à l'ensemble de semi-normes $\{\, \|\mathrm{D}^\alpha \cdot\|_K : K \text{ compact}, K \subset \Omega, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \,\}$.

En fait, on choisit une suite fondamentale $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de compacts réguliers dans Ω et on munit $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ du système dénombrable de semi-normes $\{\|\cdot\|_{m,K_m} : m \in \mathbb{N}\}$.

Espace $\mathcal{D}^p(K)$ *pour* $p \in \mathbb{N}_0$

Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^p(K)$ *est l'espace de Banach* obtenu en munissant l'espace vectoriel des fonctions p-fois continûment dérivables (continues si $p = 0$) sur $\mathbb{R}^n$ et à support inclus dans K de la convergence uniforme, c'est-à-dire de la norme $\|\cdot\|_{p,K}$.

Espace $\mathcal{D}^\infty(K)$

Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^\infty(K)$ *est l'espace de Fréchet* obtenu en munissant l'espace vectoriel des fonctions infiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ et à support inclus dans K de la convergence uniforme, c'est-à-dire du système dénombrable de semi-normes $\{\|\cdot\|_{m,K} : m \in \mathbb{N}\}$.

Espace $\mathcal{D}^p(\Omega)$ *pour* $p \in \mathbb{N}_0$

Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^p(\Omega)$ *est l'espace* (LB) *séparé* obtenu en considérant l'espace vectoriel des fonctions p-fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ et à support compact inclus dans Ω comme étant la limite inductive hyperstricte de la suite $\mathcal{D}^p(K_m)$ où $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite fondamentale de compacts réguliers dans Ω.

Espace $\mathcal{D}^\infty(\Omega)$

Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^\infty(\Omega)$ *est l'espace* (LF) *séparé* obtenu en considérant l'espace vectoriel des fonctions infiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ et à support compact inclus dans Ω comme étant la limite inductive hyperstricte de la suite $\mathcal{D}^\infty(K_m)$ où $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite fondamentale de compacts réguliers dans Ω.

3.2 Jets de Whitney

Définition. Etant donné un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$,

(a) et $p \in \mathbb{N}_0$, un *p-jet sur F* est une famille ordonnée $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{|\alpha| \leq p}$ de fonctions continues sur F;

(b) un *∞-jet sur F*, ou plus simplement un *jet sur F*, est une famille ordonnée $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ de fonctions continues sur F.

Question. Etant donné un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}_0^n \cup \{\infty\}$, la question fondamentale étudiée par H. Whitney est la suivante: *quels sont les p-jets sur F qui proviennent d'un élément de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$?* c'est-à-dire quels sont les p-jets $\boldsymbol{\varphi}$ sur F pour lesquels il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_\alpha = (\mathrm{D}^\alpha f)|_F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$?

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, ce problème peut être exposé de la manière suivante.

Pour tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ et tout $p \in \mathbb{N}_0^n \cup \{\infty\}$, *l'opérateur restriction*

$$R_{F,p} \colon \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n) \to \prod_{|\alpha| \leq p} \mathcal{C}^0(F); \quad f \mapsto \big((\mathrm{D}^\alpha f)|_F\big)_{|\alpha| \leq p}$$

est bien sûr un opérateur linéaire continu. Si on le considère, le problème revient à demander une caractérisation des éléments de l'image de cet opérateur $R_{F,p}$ ou, ce qui revient au même, à demander une description des éléments de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)/\ker(R_{F,p})$.

En recourant à la formule limitée de Taylor, il est aisé d'établir des conditions nécessaires.

Etant donné $p \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a bien sûr $\mathrm{D}^\alpha f \in \mathcal{C}^{p-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$ et le développement de Taylor de $\mathrm{D}^\alpha f$ en x est donnée par

$$T_x^p(\mathrm{D}^\alpha f)(y) = \sum_{|\beta| \leq p - |\alpha|} \frac{\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

et le reste par

$$\big(R_x^p f\big)_\alpha(y) = \mathrm{D}^\alpha f(y) - T_x^p(\mathrm{D}^\alpha f)(y).$$

Cela étant, pour $g = \Re f$ et pour $g = \Im f$, la formule limitée de Taylor affirme l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\big(R_x^p g\big)_\alpha(y) = \sum_{|\beta| = p - |\alpha|} \frac{\mathrm{D}^{\alpha+\beta} g(x + \theta(y-x)) - \mathrm{D}^{\alpha+\beta} g(x)}{\beta!}(y-x)^\beta.$$

De la sorte, en recourant à la continuité uniforme des dérivées d'ordre p de g sur tout compact de $\mathbb{R}^n$, nous obtenons que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$,

$$\sup_{\substack{x,y\in K\\ 0<|y-x|\leq t}} \frac{\left|\left(R_x^p f\right)_\alpha(y)\right|}{|y-x|^{p-\alpha}} \to 0 \text{ si } t\to 0.$$

Remarquons alors que, si le p-jet $\boldsymbol{\varphi}$ sur F provient de cette fonction f, nous avons $\varphi_\alpha = (\mathrm{D}^\alpha f)|_F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$ et ainsi tout peut se transposer aux éléments φ_α de $\boldsymbol{\varphi}$ sauf $\mathrm{D}^{\alpha+\beta} g(x+\theta(y-x))$.

Cela étant, introduisons les notations suivantes.

Notations. Etant donné un q-jet $\boldsymbol{\varphi}$ sur le fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ avec $q \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $p \in \mathbb{N}_0$ tel que $p \leq q$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$, $x \in F$ et $y \in \mathbb{R}^n$, nous posons

$$\left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y) = \sum_{|\beta|\leq p-|\alpha|} \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

et

$$\left(R_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y) = \varphi_\alpha(y) - \left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y).$$

Proposition 3.2.1 *Pour tout q-jet $\boldsymbol{\varphi}$ sur le fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ avec $q \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $p \in \mathbb{N}_0$ tel que $p \leq q$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha$ est un polynôme de degré $p-|\alpha|$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$\mathrm{D}_y^\beta \left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y) = \left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_{\alpha+\beta}(y)$$

pour tout $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\beta| \leq p-|\alpha|$.

De plus, pour tous x, $z \in F$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y) - \left(T_z^p \boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y) = \sum_{|\beta|\leq p-|\alpha|} \frac{\left(R_z^p \boldsymbol{\varphi}\right)_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta.$$

Preuve. D'une part, nous avons successivement

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_y^\beta \left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)(y) &= \sum_{\substack{|\gamma|\leq p-|\alpha|\\ \beta\leq\gamma}} \frac{\varphi_{\alpha+\gamma}(x)}{(\gamma-\beta)!}(y-x)^{\gamma-\beta}\\ &\underset{(*)}{=} \sum_{|\delta|\leq p-|\alpha|-|\beta|} \frac{\varphi_{\alpha+\beta+\delta}(x)}{\delta!}(y-x)^\delta = \left(T_x^p \boldsymbol{\varphi}\right)_{\alpha+\beta}(y)\end{aligned}$$

(en $(*)$, nous avons recouru à $\delta = \gamma - \beta$).

D'autre part, notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}\big(T_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_\alpha(y) &= \sum_{|\delta|\le p-|\alpha|}\frac{\varphi_{\alpha+\delta}(z)}{\delta!}(y-x+x-z)^\delta\\ &\underset{(*)}{=} \sum_{|\delta|\le p-|\alpha|}\frac{\varphi_{\alpha+\delta}(z)}{\delta!}\sum_{\beta\le\delta}\delta!\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\frac{(x-z)^{\delta-\beta}}{(\delta-\beta)!}\\ &\underset{(**)}{=} \sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\sum_{|\gamma|\le p-|\alpha|-|\beta|}\frac{\varphi_{\alpha+\beta+\gamma}(z)}{\gamma!}(x-z)^\gamma\end{aligned}$$

(en $(*)$, nous avons développé; en $(**)$, nous avons permuté les sommes en posant $\gamma=\delta-\beta$). Cela étant, il vient

$$\begin{aligned}\big(T_x^p\boldsymbol{\varphi}\big)_\alpha(y) &= \sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}\frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta\\ &\underset{(*)}{=} \sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\Big(\big(T_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha+\beta}(x)+\big(R_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha+\beta}(x)\Big)\\ &\underset{(**)}{=} \sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\left(\sum_{|\gamma|\le p-|\alpha|-|\beta|}\frac{\varphi_{\alpha+\beta+\gamma}(z)}{\gamma!}(x-z)^\gamma+\big(R_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha+\beta}(x)\right)\\ &\underset{(***)}{=} \big(T_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_\alpha(y)+\sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}\frac{\big(R_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta\end{aligned}$$

(en $(*)$, nous recourons à la définition de $\big(R_z^p\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha+\beta}(x)$; en $(**)$, nous explicitons $\big(T_z^p\boldsymbol{\varphi})_{\alpha+\beta}(x)$; en $(***)$, nous recourons à la formule précédente).∎

Définition. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.
Si $p\in\mathbb{N}_0$, un *p-jet de Whitney sur K* est un p-jet $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_\alpha)_{|\alpha|\le p}$ sur K tel que

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,K,t}:=\sup_{|\alpha|\le p}\ \sup_{\substack{x,y\in K\\0<|x-y|\le t}}\frac{\big|\big(R_x^p\boldsymbol{\varphi}\big)_\alpha(y)\big|}{|y-x|^{p-|\alpha|}}\to 0\ \text{ si }\ t\to 0.$$

Il est clair que leur ensemble est un espace vectoriel sur lequel

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,K}=\sup_{|\alpha|\le p}\|\varphi_\alpha\|_K+\sup_{t>0}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,K,t}$$

est une norme pour laquelle on vérifie directement qu'il est complet. Nous avons ainsi défini *l'espace de Banach* $\mathcal{E}^p(K)$ des p-jets de Whitney sur K.

Etablissons quelques propriétés élémentaires relatives à ces espaces $\mathcal{E}^p(K)$ et à leurs éléments.

Proposition 3.2.2 *Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$ et tout $p \in \mathbb{N}_0$, l'opérateur linéaire de restriction*

$$R_K \colon \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^p(K); \quad f \mapsto \big((\mathrm{D}^\alpha f)|_K\big)_{|\alpha| \le p}$$

est continu.

Preuve. Pour tout $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$, nous avons en fait

$$\|R_K f\|_{p,K} = \sup_{|\alpha| \le p} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_K + \sup_{|\alpha| \le p} \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \ne y}} \frac{|(R_x^p f)_\alpha(y)|}{|y-x|^{p-|\alpha|}}.$$

Cela étant, si I est un intervalle compact contenant K, les considérations suivant la définition des p-jets donnent aussitôt

$$\|R_K f\|_{p,K} \le \sup_{|\alpha| \le p} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_K + 2 \sup_{|\alpha| \le p} \sum_{|\beta| = p - |\alpha|} \frac{\left\|\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f\right\|_I}{\beta!}$$

et ainsi, il existe une constante $C > 0$ indépendante de f donnant lieu à la majoration $\|R_K f\|_{p,K} \le C \, \|f\|_{p,I}$. D'où la conclusion.∎

Proposition 3.2.3 *Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}^p(K)$, on a $\varphi_0 \in \mathcal{C}^p(K^\circ)$ et $\mathrm{D}^\alpha \varphi_0 = \varphi_\alpha$ sur K° pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \le p$.*

Preuve. D'une part, nous avons trivialement $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^0(K^\circ)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \le p$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| < p$, φ_α est une fonction dérivable sur $\mathbb{K}^\circ$ et telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{D}_j \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha + e_j}$: pour tout $x \in \mathbb{K}^\circ$ et tout $h \in \mathbb{R}_0$ tel que $\{\, y : |x-y| \le |h| \,\} \subset K^\circ$, nous avons en effet

$$\left| \frac{\varphi_\alpha(x + he_j) - \varphi_\alpha(x) - h\varphi_{\alpha+e_j}(x)}{h} \right| = \frac{\left|(R_x^{|\alpha|+1} \boldsymbol{\varphi})_\alpha(x + he_j)\right|}{|x + he_j - x|^{|\alpha|+1-|\alpha|}}$$

alors que le second membre de cette égalité tend vers 0 si $h \in \mathbb{R}_0$ converge vers 0.∎

Proposition 3.2.4 *Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, tout p, $r \in \mathbb{N}_0$ tels que $r \le p$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \le r$,*

a) *pour tout $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\beta)_{|\beta| \le p} \in \mathcal{E}^p(K)$, le $(r - |\alpha|)$-jet $\boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta| \le r - |\alpha|}$ sur K*

est en fait un $(r-|\alpha|)$*-jet de Whitney sur* K*;*
b) *l'opérateur linéaire*

$$L\colon \mathcal{E}^p(K) \to \mathcal{E}^{r-|\alpha|}(K); \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\beta)_{|\beta|\le p} \mapsto \boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta|\le r-|\alpha|}$$

est continu.

Preuve. Cela résulte aussitôt des deux lemmes suivants.∎

Lemme 3.2.5 *Pour tout compact non vide* K *de* $\mathbb{R}^n$*, tout* $p \in \mathbb{N}_0$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *tel que* $|\alpha| \le p$*,*
a) *pour tout* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\beta)_{|\beta|\le p} \in \mathcal{E}^p(K)$*, le* $(p-|\alpha|)$*-jet* $\boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta|\le p-|\alpha|}$ *sur* K *est en fait un* $(p-|\alpha|)$*-jet de Whitney sur* K*;*
b) *l'opérateur linéaire*

$$I\colon \mathcal{E}^p(K) \to \mathcal{E}^{p-|\alpha|}(K); \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\beta)_{|\beta|\le p} \mapsto \boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta|\le p-|\alpha|}$$

est continu.

Preuve. a) résulte aussitôt de ce que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\beta| \le p-|\alpha|$ et tous x, $y \in K$ distincts, on a

$$\frac{\left|(R_x^{p-|\alpha|}\boldsymbol{\psi})_\beta(y)\right|}{|y-x|^{p-|\alpha|-|\beta|}} = \frac{|(R_x^p\boldsymbol{\varphi})_{\alpha+\beta}(y)|}{|y-x|^{p-|\alpha+\beta|}}.$$

b) est alors immédiat.∎

Lemme 3.2.6 *Pour tout compact non vide* K *de* $\mathbb{R}^n$ *et tous* p*,* $r \in \mathbb{N}_0$ *tels que* $r < p$*,*
a) *pour tout* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{|\alpha|\le p} \in \mathcal{E}^p(K)$*, le* r*-jet* $\boldsymbol{\psi} = (\psi_\alpha = \varphi_\alpha)_{|\alpha|\le r}$ *sur* K *est en fait un* r*-jet de Whitney sur* K*;*
b) *l'opérateur linéaire*

$$J\colon \mathcal{E}^p(K) \to \mathcal{E}^r(K); \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{|\alpha|\le p} \mapsto \boldsymbol{\psi} = (\psi_\alpha = \varphi_\alpha)_{|\alpha|\le r}$$

est continu.

Preuve. a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \le r$ et tous x, $y \in K$ distincts, on a

$$(R_x^r\boldsymbol{\psi})_\alpha(y) = (R_x^r\boldsymbol{\psi})_\alpha(y) - (R_x^p\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y) + (R_x^p\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)$$

avec

$$(R_x^r \boldsymbol{\psi})_\alpha(y) - (R_x^p \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y) = \sum_{r-|\alpha|<|\beta|\leq p-|\alpha|} \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

donc

$$\sup_{|\alpha|\leq r} \sup_{\substack{x,y\in K\\ 0<|x-y|\leq t}} \frac{|(R_x^r \boldsymbol{\psi})_\alpha(y) - (R_x^p \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y-x|^{r-|\alpha|}}$$
$$\leq \sup_{|\alpha|\leq r} \sup_{\substack{x,y\in K\\ 0<|x-y|\leq t}} \sum_{r-|\alpha|<|\beta|\leq p-|\alpha|} \frac{\|\varphi_{\alpha+\beta}\|_K}{\beta!} |y-x|\,.$$

On conclut aussitôt.

b) De fait, avec les notations de l'énoncé et la preuve de a), $\|\boldsymbol{\psi}\|_{r,K}$ est majoré par

$$\sup_{|\alpha|\leq r} \|\varphi_\alpha\|_K + \sup_{|\alpha|\leq r} \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \sum_{r-|\alpha|<|\beta|\leq p-|\alpha|} \frac{\|\varphi_{\alpha+\beta}\|_K}{\beta!} |y-x| + \sup_{|\alpha|\leq r} \frac{|(R_x^p \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y-x|^{r-|\alpha|}}$$

et il existe une constante positive C indépendante de φ telle que $\|\boldsymbol{\psi}\|_{r,K} \leq C\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,K}$.∎

Cela étant, nous sommes prêts pour introduire les définitions suivantes.

Définition. a) Un *∞-jet de Whitney sur K*, on dit aussi plus simplement un *jet de Whitney sur K*, est un ∞-jet $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, $(\varphi_\alpha)_{|\alpha|\leq p}$ est un p-jet de Whitney sur K.

Il est clair que leur ensemble est un espace vectoriel sur lequel $\{\|\cdot\|_{p,K} : p \in \mathbb{N}_0\}$ induit une structure d'espace de Fréchet. Nous avons ainsi introduit *l'espace de Fréchet $\mathcal{E}^\infty(K)$*, bien souvent noté $\mathcal{E}(K)$ tout simplement.

On a bien sûr

$$\mathcal{E}(K) = \mathrm{proj}_p \mathcal{E}(K).$$

Définitions. Soit F un fermé propre non compact de $\mathbb{R}^n$.

a) Si $p \in \mathbb{N}_0$, un *p-jet de Whitney sur F* est un p-jet $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ sur F tel que $\boldsymbol{\varphi}|_K \in \mathcal{E}^p(K)$ pour tout compact $K \subset F$.

Leur ensemble est un espace vectoriel sur lequel $\{\|\cdot\|_{p,K_m} : m \in \mathbb{N}\}$ induit une structure d'espace de Fréchet ($(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant bien sûr une suite fondamentale de compacts dans F). Nous avons ainsi introduit *l'espace de Fréchet $\mathcal{E}^p(F)$*. On a bien sûr

$$\mathcal{E}^p(F) = \mathrm{proj}_m \mathcal{E}^p(K_m).$$

b) Un ∞-*jet de Whitney sur* F, on dit aussi plus simplement un *jet de Whitney sur* F, est un ∞-jet $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ sur F tel que $\boldsymbol{\varphi}|_K \in \mathcal{E}(K)$ pour tout compact $K \subset F$.

Il est clair que leur ensemble est un espace vectoriel sur lequel $\{\|\cdot\|_{m,K_m} : m \in \mathbb{N}\}$ induit une structure d'espace de Fréchet. Nous avons ainsi introduit *l'espace de Fréchet* $\mathcal{E}^\infty(F)$, bien souvent noté $\mathcal{E}(F)$ tout simplement.

On a bien sûr

$$\mathcal{E}(F) = \mathrm{proj}_m \mathcal{E}(K_m) = \mathrm{proj}_p \mathcal{E}^p(F).$$

Les Propositions 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4 conduisent alors aussitôt aux propriétés élémentaires suivantes qui les généralisent.

Théorème 3.2.7 *Pour tout fermé propre* F *de* $\mathbb{R}^n$ *et tout* $p \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$,

a) *l'opérateur linéaire de restriction*

$$R_F \colon \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^p(F); \quad f \mapsto \big((\mathrm{D}^\alpha f)|_F\big)_{|\alpha| \le p}$$

est continu.

b) *pour tout* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}^p(F)$, φ_0 *appartient à* $\mathcal{C}^p(F^\circ)$ *et est tel que* $\mathrm{D}^\alpha \varphi_0 = \varphi_\alpha$ *sur* F° *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *tel que* $|\alpha| \le p$.

c) *pour tout* $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *tel que* $r \le p$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *tel que* $|\alpha| \le r$,

c.i) *pour tout* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\beta)_{|\beta| \le p} \in \mathcal{E}^p(F)$, *le* $(r - |\alpha|)$-*jet* $\boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta| \le r - |\alpha|}$ *sur* F *est en fait un* $(r - |\alpha|)$-*jet de Whitney sur* F;

c.ii) *l'opérateur linéaire*

$$L \colon \mathcal{E}^p(F) \to \mathcal{E}^{r-|\alpha|}(F); \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_\beta)_{|\beta| \le p} \mapsto \boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta| \le r-|\alpha|}$$

est continu.∎

3.3 Le théorème de Whitney (cas fini), [40]

La preuve du théorème de Whitney dans le cas fini repose sur une construction élaborée d'une partition $\mathcal{D}^\infty$ et localement finie de l'unité sur $\mathbb{R}^n \setminus F$, F étant un fermé propre de $\mathbb{R}^n$.

Construction. *Soit* F *un fermé propre de* $\mathbb{R}^n$.

a) *Obtention de la partition* $\{\, I_{m,j} : m \ge m_0, 1 \le j \le J(m) \,\}$ *de* $\mathbb{R}^n \setminus F$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons

$$F_m = \left\{\, y \in \mathbb{R}^n : d(y, F) \le 2^{-2m} \,\right\}.$$

Ces ensembles F_m sont bien sûr des fermés d'intersection égale à F.

Comme F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, il existe un premier entier m_0 tel que le réseau d'équidistance $2^{-2(m_0+2)}/\sqrt{n}$ contienne au moins une maille d'adhérence disjointe de F_{m_0}. Ces mailles étant dénombrables, numérotons-les: nous obtenons les semi-cubes $I_{m_0,j}$ avec $1 \leq j \leq J(m_0)$, $J(m_0)$ étant éventuellement égal à ∞. Remarquons que nous avons évidemment

$$2^{-2m_0} \leq d(I_{m_0,j}, F), \quad \forall j \leq J(m_0).$$

Cela étant, nous obtenons les $I_{m,j}$ au moyen de la récurrence suivante. Si les mailles $I_{k,j}$ sont obtenues pour tout $k \in \{m_0, \ldots, m-1\}$ et tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \leq J(k)$, alors les mailles $I_{m,j}$ correspondent à une numérotation des mailles du réseau d'équidistance $2^{-2(m+2)}/\sqrt{n}$, d'adhérence disjointe de F et non incluses dans une des mailles retenues auparavant. Nous avons donc bien évidemment

$$2^{-2m} \leq d(I_{m,j}, F), \quad \forall j \leq J(m),$$

mais aussi bien davantage.

Ainsi, tout point y_0 de l'ensemble $\{\, y : d(y,F) \geq 2^{-2m_0} \,\}$ n'appartenant pas à $\cup_{j=1}^{\infty} I_{m_0,j}$ appartient à un des $I_{m_0+1,j}$ car la boule $\left\{\, y : |y - y_0| < 2^{-2m_0} - 2^{-2(m_0+1} \,\right\}$ est alors incluse dans $\mathbb{R}^n \setminus F_{m_0+1}$ et contient l'adhérence de toute maille I du réseau d'équidistance $2^{-2(m_0+1+2)}/\sqrt{n}$ contenant y_0: en effet, pour une telle maille I, on a alors $\overline{I} \subset \left\{\, y : |y - y_0| \leq 2^{-2(m_0+3)} \,\right\}$ avec $2^{-6} < 1 - 2^{-2}$. En conséquence, nous avons obtenu l'inclusion

$$\bigcup_{k=m_0}^{m_0+1} \bigcup_{j=1}^{J(m)} I_{k,j} \supset \left\{\, y : d(y,F) \geq 2^{-2m_0} \,\right\} \supset \mathbb{R}^n \setminus F_{m_0}$$

ainsi que le fait que tout point y d'un des $I_{m_0,j}$ ne peut appartenir qu'à la frontière de mailles retenues des types $I_{m_0,l}$ ou $I_{m_0+1,l}$.

De manière analogue, on obtient

$$\bigcup_{k=m_0}^{m+1} \bigcup_{j=1}^{J(m)} I_{k,j} \supset \left\{\, y : d(y,F) \geq 2^{-2m} \,\right\} \supset \mathbb{R}^n \setminus F_m, \quad \forall m > m_0$$

ainsi que le fait que tout point y d'un des $I_{m,j}$ avec $m > m_0$ ne peut appartenir qu'à la frontière de mailles retenues des types $I_{m-1,l}$, $I_{m,l}$ ou $I_{m+1,l}$.

Dès lors, pour tout $m < m_0$ et tout $j \leq J(m)$, nous avons

$$d(I_{m,j}, F) \leq 2^{-2(m-1)} + 2^{-2(m-1+2)} - \frac{2^{2(m+2)}}{\sqrt{n}}.$$

b) *Définition des points $c_{m,j}$ et des cubes compacts $I'_{m,j}$.*

Pour tous entiers $m \geq m_0$ et $j \leq J(m)$, désignons par $c_{m,j}$ le centre de la maille $I_{m,j}$. Nous avons bien sûr

$$2^{-2m} \leq d(c_{m,j}, F), \quad \forall m \geq m_0, \forall j \leq J(m),$$

mais aussi

$$d(c_{m,j}, F) \leq 2^{-2(m-1)} + 2^{-2(m+1)}, \quad \forall m > m_0, \forall j \leq J(m).$$

Pour tous entiers $m \geq m_0$ et $j \leq J(m)$, désignons par $I'_{m,j}$ le cube compact de centre $c_{m,j}$ et de côté $\frac{17}{16}2^{-2(m+2)}/\sqrt{n}$. Nous avons donc $\overline{I_{m,j}} \subset {I'_{m,j}}^{\circ}$ et il est clair que tout point de $\mathbb{R}^n \setminus F$ est le centre d'une boule ne rencontrant que 2^n de ces cubes $I'_{m,j}$. De plus, nous obtenons aisément que

$$2^{-2m} - \frac{2^{-2(m+2)}}{32\sqrt{n}} \leq d(y, F) \leq 2^{-2m+3}, \quad \forall y \in I'_{m,j}, \forall m > m_0, \forall j \leq J(m).$$

c) *Définition des fonctions $\psi_{m,j}$ et ψ.*

Pour tous entiers $m \geq m_0$ et $j \leq J(m)$, la fonction

$$\psi_{m,j} = \chi_{I_{m,j},\delta} * \rho_\delta \quad \text{où } \delta = \frac{1}{64}\frac{2^{-2(m+2)}}{\sqrt{n}}$$

appartient à $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$, a son support inclus dans $I'_{m,j}$ et est identique à 1 sur $I_{m,j}$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, il existe une constante $C'_\alpha > 0$, indépendante de m et de j, telle que

$$\|\mathrm{D}^\alpha \psi_{m,j}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{C'_\alpha}{(2^{-2m-10}/\sqrt{n})^{|\alpha|}}, \quad \forall m \geq m_0, \forall j \leq J(m).$$

Dès lors,

$$\psi(y) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J(m)} \psi_{m,j}(y)$$

est une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$ telle que

$$1 \leq \psi(y) \leq 2^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus F,$$

et

$$\|\mathrm{D}^\alpha \psi\|_{I_{m,j}} \leq \frac{2^n C'_\alpha}{(2^{-2(m+1)-10}/\sqrt{n})^{|\alpha|}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall m \geq m_0, \forall j \leq J(m).$$

d) *Définition des fonctions $\gamma_{m,j}$.*

Pour tous entiers $m \geq m_0$ et $j \leq J(m)$, posons enfin

$$\gamma_{m,j} = \frac{\psi_{m,j}}{\psi}.$$

Ces fonctions $\gamma_{m,j}$ constituent clairement une partition $\mathcal{D}^\infty$ et localement finie de l'unité sur $\mathbb{R}^n \setminus F$.

En plus, établissons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que

$$|\mathrm{D}^\alpha \gamma_{m,j}(y)| \cdot d^{|\alpha|}(y, F) \leq C_\alpha, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus F, \forall m \geq m_0, \forall j \leq J(m).$$

Pour $\alpha = 0$, c'est trivial. Pour $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ différent de 0, nous devons d'abord remarquer que $\mathrm{D}^\alpha \gamma_{m,j}(y)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{\psi^{|\alpha|+1}} \cdot \Theta_{\alpha,m,j}(y)$$

avec $\psi \geq 1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$, $\Theta_{\alpha,m,j}$ étant une somme finie de termes du type suivant: chaque terme est un produit fini de $|\alpha| + 1$ facteurs du type $\mathrm{D}^\beta \psi$ ou $\mathrm{D}^\beta \psi_{m,j}$ avec $\beta \leq \alpha$, la somme des ordres de dérivation étant égal à $|\alpha|$. Pour conclure, il suffit alors de noter que les puissances de 2^{-m} s'auto-détruisent.

Au total, nous sommes arrivés au résultat suivant.

Proposition 3.3.1 *Pour tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, il existe une partition $\mathcal{D}^\infty$ et localement finie de l'unité sur $\mathbb{R}^n \setminus F$, du type*

$$\{\, \gamma_{m,j} : m \geq m_0, 1 \leq j \leq J(m) \,\}$$

où m_0, m et j sont des entiers strictement positifs et où $J(m)$ est un entier strictement positif ou ∞, telle que

a) $\gamma_{m,j}(y) \neq 0 \Rightarrow 2^{-m} \leq d(y, F) \leq 2^{-2m+3}$*; en particulier, si la suite $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n \setminus F$ converge vers $x_0 \in F$ et si on a $\gamma_{m(l),j(l)}(y_l) \neq 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, alors on a $m(l) \to \infty$;*

b) $\gamma_{m,j}(y) \cdot \gamma_{m',j'}(y) \neq 0 \Rightarrow |m - m'| \leq 1$*;*

c) *pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que*

$$|\mathrm{D}^\alpha \gamma_{m,j}(y)| \cdot d^{|\alpha|}(y, F) \leq C_\alpha$$

pour tous $y \in \mathbb{R}^n \setminus F$, $m \geq m_0$ et $j \leq J(m)$. ∎

Théorème 3.3.2 (Whitney, cas fini, 1934, [40]) *Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu d'extension*

$$E_{F,p} \colon \mathcal{E}^p(F) \to \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$$

dont les images sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$.

Preuve. Nous allons utiliser les notations de la construction précédente ainsi que, bien sûr, la proposition précédente.

Pour tous entiers $m \geq m_0$ et $j \leq J(m)$, soit $x_{m,j}$ un point de F réalisant la distance de $\operatorname{supp}(\gamma_{m,j})$ à F.

Cela étant, nous allons établir que l'application $E_{F,p}$ définie sur $\mathcal{E}^p(F)$ selon

$$(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & \forall x \in F \\ \displaystyle\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J(m)} \left(T^p_{x_{m,j}}\boldsymbol{\varphi}\right)_0(x) \cdot \gamma_{m,j}(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus F, \end{cases}$$

convient.

a) *Etablissons tout d'abord que, pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}^p(F)$, la fonction $E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}$ est définie sur $\mathbb{R}^n$, appartient à $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ et est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$.*

a.1) *La fonction $E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}$ est définie sur $\mathbb{R}^n$.*

Sur F, sa définition est triviale et, sur $\mathbb{R}^n \setminus F$, elle résulte aussitôt du fait que les fonctions $\gamma_{m,j}$ constituent une partition localement finie de l'unité sur $\mathbb{R}^n \setminus F$.

a.2) *La fonction $E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$.*

Sur $\mathbb{R}^n \setminus F$, $E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}$ est en fait une série localement finie de fonctions appartenant à $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$. Cela étant, remarquons que ses dérivées sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ s'obtiennent en considérant la série des dérivées terme à terme correspondante.

a.3) *La fonction $E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}$ est $\mathcal{C}^p$ sur F° et on a*

$$\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})|_{F^\circ} = \varphi_\alpha|_{F^\circ}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$.

Cela résulte des deux considérations suivantes. D'une part, il est clair que $\varphi_\alpha|_{F^\circ}$ est une fonction continue sur F° pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| < p$, tout $x \in F^\circ$, tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $h \in \mathbb{R}_0$ tel que $|h| < d(x, \mathbb{R}^n \setminus F)$, le 1-jet $\boldsymbol{\psi} = (\psi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta})_{|\beta| \leq 1}$ sur K est de Whitney donc tel que

$$\frac{|(R^1_x\boldsymbol{\psi})_0(x + he_k)|}{|h|} = \left| \frac{\varphi_\alpha(x + he_k) - \varphi_\alpha(x)}{h} - \varphi_{\alpha+he_k}(x) \right|$$

converge vers 0 sir $h \to 0$.

a.4) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$, la fonction*

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus F, \\ \varphi_\alpha(x), & \forall x \in F. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Vu ce qui précède, nous savons déjà que ces fonctions g_α sont continues sur F et sur $\mathbb{R}^n \setminus F$. Il nous reste donc à établir qu'elles sont continues en tout point de la frontière de F par rapport à $\mathbb{R}^n \setminus F^\circ$. Considérons donc un multi-indice α tel que $|\alpha| \leq p$ et un point x_0 de ∂F. Pour conclure ce point, nous allons établir que, pour toute suite $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n \setminus F$ convergente vers x_0, nous avons $g_\alpha(y_l) \to g_\alpha(x_0)$. A cet effet, pour tout $l \in \mathbb{N}$, soit z_l un point de F réalisant la distance de y_l à F.

Nous procédons en deux temps.

Cas $\alpha = 0$. Comme nous avons

$$\left(T_{x_0}^p\boldsymbol{\varphi}\right)_0(y_l) = \sum_{|\beta|\leq p} \frac{\varphi_\beta(x_0)}{\beta!}(y_l - x_0)^\beta \to \varphi_0(x_0)$$

si $l \to \infty$, il suffit de prouver que

$$g_0(y_l) - (T_{x_0}^p\boldsymbol{\varphi})_0(y_l) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J(m)} \Big(\left(T_{x_{m,j}}^p\boldsymbol{\varphi}\right)_0(y_l) - \left(T_{x_0}^p\boldsymbol{\varphi}\right)_0(y_l)\Big)\, \gamma_{m,j}(y_l)$$

converge vers 0 si $l \to \infty$. Vu une formule établie à la Proposition 3.2.1, le module de $g_0(y_l) - (T_{x_0}^p)(y_l)$ est majoré par

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J(m)} \sum_{|\beta|\leq p} \frac{\left|(R_{x_0}^p\boldsymbol{\varphi})_\beta(x_{m,j})\right|}{\beta!} \left|(y_l - x_{m,j})^\beta\right| \gamma_{m,j}(y_l).$$

Vu la présence des $\gamma_{m,j}(y_l)$ et de $\sum_{|\beta|\leq p}$ dans cette expression, cette série comporte au plus $2^n(p+1)^n$ termes non nuls. On conclut alors aussitôt au moyen des considérations suivantes:

(i) comme la suite $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0, il existe une partie compacte K de F à laquelle x_0 appartient ainsi que tous les points $x_{m,j}$ pour lesquels les $\gamma_{m,j}(y_l)$ diffèrent de 0.

(ii) nous avons $d(y_l, F) \to 0$ si $l \to \infty$. Dès lors, si on a $\gamma_{m(l),j(l)}(y_l) \neq 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $m(l) \to \infty$.

(iii) si $\gamma_{m(l),j(l)}(y_l)$ diffère de 0, nous avons

$$\left|x_{m(l),j(l)} - x_0\right| \leq d(y_l, F) + d(y_l, x_0) \leq 2^{-2m(l)+3} + d(y_l, x_0).$$

(iv) si $\gamma_{m(l),j()}(y_l)$ et $\gamma_{m'(l),j'(l)}(y_l)$ diffèrent de 0, $|m(l) - m'(l)|$ est majoré par 1.
(v) nous avons

$$\sup_{\substack{x\in K\\ 0<|x_0-x|\leq t}} \left|(R^p_{x_0}\boldsymbol{\varphi})_\beta(x)\right| \to 0$$

si $t \to 0^+$.
Cas $0 < |\alpha| \leq p$. Remarquons tout d'abord que

$$\left(T^p_{z_l}\boldsymbol{\varphi}\right)_\alpha(y_l) = \sum_{|\beta|\leq p-|\alpha|} \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(z_l)}{\beta!}(y_l - z_l)^\beta$$

converge vers $\varphi_\alpha(x_0)$ si $l \to \infty$ car on a $z_l \to x_0$ si $l \to \infty$.

Cela étant, pour tout $l \in \mathbb{N}$, notons que nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(y_l) &= \sum_{m=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{J(m)} \mathrm{D}^\alpha\Big(\big(T^p_{x_{m,j}}\boldsymbol{\varphi}\big)_0 \cdot \gamma_{m,j}\Big)(y_l)\\ &= \sum_{m=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{J(m)}\sum_{\beta\leq\alpha} \mathrm{C}^\beta_\alpha \big(T^p_{x_{m,j}}\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha-\beta}(y_l)\cdot \mathrm{D}^\beta\gamma_{m,j}(y_l)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(y_l) - \big(T^p_{z_l}\boldsymbol{\varphi}\big)_\alpha(y_l)\\ &= \sum_{m=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{J(m)}\sum_{\beta\leq\alpha} \mathrm{C}^\beta_\alpha\Big(\big(T^p_{x_{m,j}}\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha-\beta}(y_l) - \big(T^p_{z_l}\boldsymbol{\varphi}\big)_{\alpha-\beta}(y_l)\Big)\mathrm{D}^\beta\gamma_{m,j}(y_l)\end{aligned}$$

car, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n_0$ tel que $\beta \leq \alpha$ et différent de 0, $\sum_{m=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{J(m)} \mathrm{D}^\beta\gamma_{m,j}(y_l)$ est égal à 0. De là, nous tirons

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(y_l) - (T^p_{z_l}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y_l)\right|\\ &= \sum_{m=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{J(m)}\sum_{\beta\leq\alpha} \mathrm{C}^\beta_\alpha \sum_{|\gamma|\leq p-|\alpha|+|\beta|} \frac{\left|(R^p_{x_{m,j}}\boldsymbol{\varphi})_{\alpha-\beta+\gamma}(z_l)\right|}{\gamma!\,|z_l - x_{m,j}|^{p-|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}}\cdot\\ &\qquad\cdot |z_l - x_{m,j}|^{p-|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}\,|(y_l - z_l)^\gamma|\,\left|\mathrm{D}^\beta\gamma_{m,j}(y_l)\right|.\end{aligned}$$

Or si on a $\mathrm{D}^\beta\gamma_{m,j}(y_l) \neq 0$, on doit avoir $y_l \in I'_{m,j}$ donc

$$|z_l - x_{m,j}| \leq |z_l - y_l| + \mathrm{diam}(I'_{m,j}) + d(I'_{m,j}, F)$$

avec bien sûr $d(I'_{m,j}, F) \leq |z_l - y_l|$ ainsi que

$$\mathrm{diam}(I'_{m,j}) = \frac{17}{16}2^{-2(m+2)} \leq 2^{-2m} - \frac{2^{-2(m+2)}}{32} \leq d(I'_{m,j}, F)$$

donc $|z_l - x_{m,j}| \leq 3\,|z_l - y_l|$. Dès lors nous avons

$$\begin{aligned}&|z_l - x_{m,j}|^{p-|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}\,|(y_l - z_l)^\gamma|\,\left|\mathrm{D}^\beta \gamma_{m,j}(y_l)\right| \\ &\qquad \leq 3^{p-|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}\,|y_l - z_l|^{p-|\alpha|}\,|y_l - z_l|^{|\beta|}\,\left|\mathrm{D}^\beta \gamma_{m,j}(y_l)\right| \leq 3^p\,|y_l - z_l|^{p-|\alpha|}\,C_\beta.\end{aligned}$$

On conclut alors comme dans le cas $\alpha = 0$.

a.5) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *tel que* $|\alpha| < p$*, la fonction* $g_\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ *est dérivable et, pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$*, on a* $\mathrm{D}_k g_\alpha = g_{\alpha+e_k} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$*. Au total, nous avons* $g_0 \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{D}^\alpha g_0 = g_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *tel que* $|\alpha| \leq p$*.* En fait, vu ce qui précède, il nous reste tout simplement à établir que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| < p$, tout $x_0 \in \partial F$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{D}_k g_\alpha(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}_0}} \frac{g_\alpha(x_0 + he_k) - g_\alpha(x_0)}{h}$$

a un sens et vaut $g_{\alpha+e_k}(x_0)$.

Deux cas peuvent se prsenter.

(i) *Cas* $x_0 + he_k \in F$*.* Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{g_\alpha(x_0 + he_k) - g_\alpha(x_0)}{h} - \varphi_{\alpha+e_k}(x_0) &= \frac{\varphi_\alpha(x_0 + he_k) - \varphi_\alpha(x_0)}{h} - \varphi_{\alpha+e_k}(x_0)\\ &= \frac{(R_{x_0}^{|\alpha|+1}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(x_0 + he_k)}{h}.\end{aligned}$$

(b) *Cas* $x_0 + he_k \notin F$*.* Si, par exemple, nous avons $h > 0$, désignons par h' le point de $[0, h[$ tel que $x_0 + h'e_k \in F$ et $x_0 + h''e_k \notin F$ pour tout $h'' \in]h', h]$. Pour les parties réelle et imaginaire de g_α et de φ_α rebaptisées g_α et φ_α respectivement, le théorème des accroissements finis procure $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}&\frac{g_\alpha(x_0 + he_k) - g_\alpha(x_0)}{h} - \varphi_{\alpha+e_k}(x_0)\\ &= \frac{g_\alpha(x_0 + he_k) - g_\alpha(x_0 + h'e_k)}{h} + \frac{\varphi_\alpha(x_0 + h'e_k) - \varphi_\alpha(x_0)}{h} - \varphi_{\alpha+e_k}(x_0)\\ &\underset{(*)}{=} \frac{h - h'}{h}\Big(g_{\alpha+e_k}(x_0 + h'e_k + \theta(h - h')e_k) - g_{\alpha+e_k}(x_0)\Big) + \frac{h'}{h}\,\frac{(R_{x_0}^{|\alpha|+1}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(x_0 + h'e_k)}{h'}.\end{aligned}$$

Pour obtenir le second terme de l'égalité $(*)$, nous avons explicité

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(x_0 + h'e_k) &= (R_{x_0}^{|\alpha|+1}\boldsymbol{\varphi})(x_0 + h'e_k) + (T_{x_0}^{|\alpha|+1}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(x_0 + h'e_k)\\ &= (R_{x_0}^{|\alpha|+1}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(x_0 + h'e_k) + \varphi_\alpha(x_0) + h'\varphi_{\alpha+e_k}(x_0)\end{aligned}$$

et obtenons

$$\frac{\varphi_\alpha(x_0+h'e_k)-\varphi_\alpha(x_0)}{h}-\frac{h'}{h}\varphi_{\alpha+e_k}(x_0)=\frac{1}{h}(R^{|\alpha|+1}_{x_0}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(x_0+h'e_k).$$

Cela étant, la conclusion de ce point est immédiate.

b) *L'opérateur $E_{F,p}$ est linéaire.*

C'est évident.

c) *L'opérateur linéaire $E_{F,p}$ de $\mathcal{E}^p(F)$ dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ est continu.*

Il suffit pour cela de démontrer que, pour tout $R>0$, il existe un compact $K\subset F$ et une constante $C>0$ tels que

$$\|E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}\|_{p,\{\,x:|x|\le R\,\}}\le C\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,K}\,,\quad \forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{E}^p(F).$$

Comme nous avons $(\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}))|_F=\varphi_\alpha$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ vérifiant $|\alpha|\le p$, nous avons déjà la majoration

$$\|E_{F,p}\boldsymbol{\varphi}\|_{p,\{\,x:|x|\le R\,\}\cap F}\le \|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,\{\,x:|x|\le R\,\}\cap F}\,,\quad \forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{E}^p(F).$$

Considérons à présent l'ensemble $A=(\mathbb{R}^n\setminus F)\cap\{\,x:|x|\le R\,\}$. Il existe un compact K de F contenant pour tout $y\in A$, un point $z(y)$ réalisant la distance de y à F ainsi que les points $x_{m,j}$ correspondants aux couples d'indices (m,j) pour lesquels $y\in\operatorname{supp}(\gamma_{m,j})$. Cela étant, pour tout $y\in A$ et tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha|\le p$, nous avons

$$\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(y)=(T^p_{z(y)}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)+\Big(\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(y)-(T_{z(y)}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)\Big)$$

avec d'une part

$$\begin{aligned}\left|(T^p_{z(y)}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)\right| &\le \sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}\frac{|\varphi_{\alpha+\beta}(z(y))|}{\beta!}\left|(y-z(y))^\beta\right|\\ &\le (p+1)^nC^p\sup_{|\gamma|\le p}\|\varphi_\gamma\|_K\le (p+1)^nC^p\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{p,K}\end{aligned}$$

car $\sum_{|\beta|\le p-|\alpha|}$ comporte moins de $(p+1)^n$ termes, C désignant une constante supérieure à $1+\sup\{\,|y-z(y)|:y\in A\,\}$, et, d'autre part, en utilisant une majoration obtenue au point a.4),

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{D}^\alpha(E_{F,p}\boldsymbol{\varphi})(y)-(T^p_{z(y)}\boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)\right|\\ &\le\sum_{m=m_0}^{\infty}\sum_{j+1}^{J(m)}\sum_{\beta\le\alpha}\mathrm{C}^\beta_\alpha\sum_{|\gamma|\le p-|\alpha|+|\beta|}\frac{\left|(R^p_{x_{m,j}}\boldsymbol{\varphi})_{\alpha-\beta+\gamma}(z(y))\right|}{|z(y)-x_{m,j}|^{p-|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}}\cdot 3^p\,|y-z(y)|^{p-|\alpha|}\,C_\beta\\ &\le 3^pC^pC'_\alpha\sum_{|\gamma|\le p}\frac{1}{\gamma!}2^{|\alpha|}2^n\sup_{|\delta|\le p}\sup_{\substack{x,z\in K\\ x\ne z}}\frac{|(R^p_x\boldsymbol{\varphi})_\delta(z)|}{|z-x|^{p-|\delta|}}\end{aligned}$$

si on pose $C'_\alpha = \sup\{\, C_\beta : \beta \leq \alpha \,\}$.

D'où la conclusion.∎

3.4 Le théorème de Whitney (cas infini), [40]

La démonstration du théorème de Whitney dans le cas infini recourt au théorème suivant qui a son intérêt propre et au cas fini par l'intermédiaire d'une méthode "à la Mittag-Leffler". Chemin faisant, nous allons établir la surjectivité de l'opérateur restriction et perdre l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension. Ce dernier point n'est pas dû à une défaillance de la preuve mais bien à une non-existence en général.

Définition. Si F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, alors
(a) pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{I}_F^p$ désigne le sous-espace de Fréchet de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ constitué des fonctions f telles que $\mathrm{D}^\alpha f(x) = 0$ pour tout $x \in F$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$;
(b) $\mathcal{I}_F$ est le sous-espace de Fréchet de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ constitué des fonctions f telles que $\mathrm{D}^\alpha f(x) = 0$ pour tout $x \in F$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Théorème 3.4.1 (densité) *Si F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$ est un sous-espace dense dans $\mathcal{I}_F^p$.*
En particulier, $\mathcal{I}_F$ est un sous-espace dense dans $\mathcal{I}_F^p$ quel que soit $p \in \mathbb{N}_0$.

Preuve. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, rappelons que la fonction régularisée

$$\psi_m = \chi_{\mathbb{R}^n \setminus F_{2/m}} * \rho_{1/m}$$

a les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \psi_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \\ 0 \leq \psi_m \leq \chi_{\mathbb{R}^n}, \\ \psi_m \equiv 1 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus F_{3/m}, \\ \psi_m \equiv 0 \text{ sur } F_{1/m} \end{cases}$$

et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ (indépendante de F d'ailleurs) telle que

$$\|\mathrm{D}^\alpha \psi_m\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_\alpha m^{|\alpha|}.$$

Etablissons tout d'abord que, pour tout $f \in \mathcal{I}_F^p$, la suite $(f\psi_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$. Quitte à considérer $\Re f$ et $\Im f$ séparément, nous pouvons nous limiter à établir cette propriété pour une fonction f réelle. Les semi-normes naturelles de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ sont du type

$$\|\cdot\|_{p,B} = \sup_{|\alpha| \leq p} \|\mathrm{D}^\alpha \cdot\|_B$$

où B est une boule compacte de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0; nous pouvons d'ailleurs nous limiter aux boules B telles que $B \cap F \neq \emptyset$ et $B_m = B \setminus (F \cup (\mathbb{R}^n \setminus F_{3/m})) \neq \emptyset$, ce qui nous conduit à la situation

$$\|f - f\psi_m\|_{p,B} = \sup_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in B_m} |\mathrm{D}^\alpha f(x) - \mathrm{D}^\alpha (f\psi_m)(x)|\,.$$

Cela étant, remarquons que, pour tout $x \in B_m$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq p$, nous avons

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}^\alpha f(x) - \mathrm{D}^\alpha(f\psi_m)(x)| &= \left| \mathrm{D}^\alpha f(x) - \sum_{\beta\leq\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \mathrm{D}^\beta f(x) \cdot \mathrm{D}^{\alpha-\beta}\psi_m(x) \right| \\ &\leq |\mathrm{D}^\alpha f(x)| \cdot (1-\psi_m(x)) + \sum_{\beta<\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \left|\mathrm{D}^\beta f(x)\right| C_{\alpha-\beta}\, m^{|\alpha|-|\beta|}. \end{aligned}$$

D'une part, le premier terme de cette majorante est majoré par $\|\mathrm{D}^\alpha f\|_{B_m}$ et l'appartenance de f à $\mathcal{I}_F^p$ donne $\|\mathrm{D}^\alpha f\|_{B_m} \to 0$. D'autre part, considérons le deuxième terme de cette majorante. Il existe $x_0 \in F$ tel que $|x - x_0| = d(x, B\cap F)$ donc tel que

$$\{\, x_0 + \theta(x-x_0) : \theta \in [0,1]\,\} \subset F_{3/m} \cap (B + b(3/m)).$$

Comme $f \in \mathcal{I}_F^p$ est réel, la formule limitée de Taylor affirme pour tout $\beta < \alpha$ l'existence de $\theta \in]0,1[$ (en fait θ dépend de x, x_0, p et β) tel que

$$\mathrm{D}^\beta f(x) = \sum_{|\gamma|=p-|\beta|} \frac{\mathrm{D}^{\beta+\gamma} f(x_0 + \theta(x-x_0))}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma$$

(NB: on a $\mathrm{D}^\delta f(x_0) = 0$ pour tout $\delta \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\delta| \leq p$) donc tel que

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta<\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \left|\mathrm{D}^\beta f(x)\right| C_{\alpha-\beta}\, m^{|\alpha|-|\beta|} \\ &\leq \sup_{|\delta|\leq p} \left\|\mathrm{D}^\delta f\right\|_{F_{3/m}\cap(B+b(3))} \cdot \sum_{\beta<\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta C_{\alpha-\beta} 3^{p-|\beta|} \sum_{|\gamma|=p-|\beta|} \frac{1}{\gamma!}; \end{aligned}$$

ceci conduit à une majoration du type

$$\sup_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in B_m} \sum_{\beta<\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \left|\mathrm{D}^\beta f(x)\right| C_{\alpha-\beta} m^{|\alpha|-|\beta|} \leq C \sup_{|\delta|\leq p} \left\|\mathrm{D}^\delta f\right\|_{F_{3/m}\cap(B+b(3))}$$

où $C > 0$ est une constante et où

$$\sup_{|\delta|\leq p} \left\|\mathrm{D}^\delta f\right\|_{F_{3/m}\cap(B+b(3))} \to 0 \text{ si } m \to \infty$$

car f appartient à $\mathcal{I}_F^p$. D'où la conclusion de cette partie de la preuve.

Etant donné $f \in \mathcal{I}_F^p$, $\|\cdot\|_{p,B}$ et $\varepsilon > 0$, il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f - f\psi_m\|_{p,B} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est identique à 1 sur un voisinage de B, nous avons $f\psi_m\varphi \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f - f\psi_m\varphi\|_{p,B} \leq \varepsilon/2$. Cela étant, considérons la suite $((f\psi_m\varphi) * \rho_{1/k})_{k>m}$: il s'agit d'une suite de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et même de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$ car $f\psi_m\varphi$ est identiquement nul sur $F_{1/m}$ et car nous avons pris soin de ne considérer que les entiers $k > m$. Cela étant, les propriétés du produit de convolution permettent d'affirmer que cette suite converge dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ vers $f\psi_m\varphi$ donc qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|f\psi_m\varphi - (f\psi_m\varphi) * \rho_{1/k}\right\|_{p,B} \leq \varepsilon/2,$$

ce qui suffit pour conclure.∎

Théorème 3.4.2 (Whitney, cas infini, 1934, [40]) *Tout jet de Whitney sur un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ provient d'un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

En d'autres termes, pour tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, l'opérateur linéaire continu de restriction R_F de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(F)$ est surjectif.

Preuve. Soit $\boldsymbol{\varphi}$ un jet de Whitney sur F.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(m)} = (\varphi_\alpha)|_{|\alpha|\leq m}$ est alors un jet de Whitney d'ordre m sur F. Dès lors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $E_{F,m}\boldsymbol{\varphi}^{(m)} - E_{F,m-1}\boldsymbol{\varphi}^{(m-1)}$ appartient à $\mathcal{I}_F^{m-1}$ et, vu le théorème de densité précédent, il existe $g_{m-1} \in \mathcal{I}_F$ tel que

$$\sup_{|\alpha|\leq m-1} \left\|E_{F,m}\boldsymbol{\varphi}^{(m)} - E_{F,m-1}\boldsymbol{\varphi}^{(m-1)} - g_{m-1}\right\|_{m-1,K_{m-1}} \leq 2^{-m}.$$

Cela étant, considérons la suite $(f_M)_{M\in\mathbb{N}}$ définie selon

$$\begin{aligned} f_M &:= E_{F,0}\boldsymbol{\varphi}^{(0)} + \sum_{m=1}^{M} \left(E_{F,m}\boldsymbol{\varphi}^{(m)} - E_{F,m-1}\boldsymbol{\varphi}^{(m-1)} - g_{m-1}\right) \\ &= E_{F,M}\boldsymbol{\varphi}^{(M)} - \sum_{m=1}^{M} g_{m-1}. \end{aligned}$$

Nous avons $f_M \in \mathcal{C}^M(\mathbb{R}^n)$ pour tout $M \in \mathbb{N}$ et le choix des g_{m-1} assure que la suite $(f_{M+k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}^M(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction f qui, tout compte fait, appartient dès lors à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et donne lieu à $\mathrm{D}^\alpha f(x) = \varphi_\alpha(x)$ pour tout $x \in F$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.∎

Du théorème de Whitney cas infini, on déduit aisément le résultat suivant, connu sous le nom de théorème de Borel. Il s'agit plutôt d'une généralisation du théorème de Borel due à Whitney.

Théorème 3.4.3 (Borel) *Pour toute famille* $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ *de nombres complexes, il existe* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\mathrm{D}^\alpha f(0) = c_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$*.*

Preuve. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème précédent car $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ est bien sûr un jet de Whitney sur le fermé $F = \{0\}$.∎

Remarque. Le résultat précédent admet une preuve directe fort simple due à Mirkil (cf. [17] ou [25], p. 110).

3.5 Théorème de Whitney d'extension analytique, [40]

Proposition 3.5.1 ([23], pp. 161–162) *Soient* $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *et* Ω *un ouvert propre de* $\mathbb{R}^n$*.*

Si $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ *est tel que* $\mathrm{D}^\alpha f(x_m) \to 0$ *pour toute suite* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de* Ω *convergente vers un point de la frontière de* Ω *et tout multi-indice* α *tel que* $|\alpha| \leq m$*, alors la fonction*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{C}^m(R^n)$*.*

Preuve. Pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$, il est clair que la fonction

$$F_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto \begin{cases} \mathrm{D}^\alpha f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Pour conclure, il suffit dès lors d'établir que, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| < m$, la fonction F_α est dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et telle que $\mathrm{D}_k F_\alpha = F_{\alpha+e_k}$ sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. Une récurrence immédiate établit d'ailleurs qu'il suffit de prouver que, si $m = 1$, on a $\mathrm{D}_k F = F_{e_k}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Supposons donc avoir $m = 1$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Il est clair que F est dérivable sur $\Omega \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^\circ$ et que, sur cet ouvert, nous avons $\mathrm{D}_k F = F_{e_k}$. Pour conclure, nous devons donc établir que F est dérivable par rapport à x_k en tout point $x_0 \in \partial\Omega$ et que $\mathrm{D}_k F(x_0) = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}_0}} \frac{F(x_0 + he_k) - F(x_0)}{h} = 0.$$

Etant donné $h \in \mathbb{R}_0$, deux cas peuvent se présenter:
a) $x_0 + he_k \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, auquel cas $(F(x_0 + he_k) - F(x_0))/h = 0$;
b) $x_0 + he_k \in \Omega$. Si, par exemple, nous avons $h > 0$, désignons par h' le point de $[0, h[$ tel que $x_0 + h'e_k \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ et $x_0 + h''e_k \in \Omega$ pour tout $h'' \in]h', h]$. Cela étant, si g représente $\Re F$ ou $\Im F$, $g(x_0 + te_k)$ est une fonction réelle et continue sur $[h', h]$, et dérivable sur l'ouvert $]h', h[$. Vu le théorème des accroissements finis, il existe alors $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{g(x_0 + he_k) - g(x_0)}{h} &= \frac{g(x_0 + he_k) - g(x_0 + h'e_k)}{h} \\ &= \frac{h - h'}{h}[\mathrm{D}^k g]_{x_0 + h'e_k + \theta(h-h')e_k} \end{aligned}$$

avec $|h'e_k + \theta(h - h')e_k| \leq |h|$. La conclusion est alors immédiate.∎

Remarque. Le résultat précédent donne lieu à la construction suivante.

Soient $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ et Ω un ouvert propre de $\mathbb{R}^n$. Si $g \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ est tel que $[\mathrm{D}^\alpha(g - f)]_{x_m} \to 0$ pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de Ω convergente vers un point de $\partial\Omega$ et tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$, alors la fonction

$$h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ g(x) & si\ x \in \Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$.

De fait, d'une part, la proposition précédente assure que la fonction

$$F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ g(x) - f(x) & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ et, d'autre part, nous avons $h = f + F$.□

Lemme 3.5.2 (Whitney, Lemma 5, 1934, [40]) *Soit $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $\mathbb{C}^n$ par

$$f_k(z) = \pi^{-n/2} k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{-k^2 \sum_{j=1}^n (z_j - y_j)^2}\, dy, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et on a $\mathrm{D}^\alpha f_k \rightrightarrows_{\mathbb{R}^n} \mathrm{D}^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq m$.

En particulier, on a $f_k \to \varphi$ dans $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. D'une part, en posant $z = u + iv$ avec u, $v \in \mathbb{R}^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, nous avons

$$f_k(z) = \pi^{-n/2} k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{-k^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - y_j)^2 - v_j^2 + 2iv_j(u_j - y_j))}\, dy, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Cela étant, une application directe du théorème de dérivation des intégrales paramétriques établit aussitôt que cette fonction appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2n})$ et est telle que $(\mathrm{D}_{u_j} + i\mathrm{D}_{v_j})f_k = 0$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ donc est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$.

D'autre part, $h_1(x) = \pi^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2}$ est une fonction à valeurs positives et intégrable sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|h_1\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} = 1$, vu la formule de Poisson. Comme φ appartient à $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, $\mathrm{D}^\alpha\varphi$ est une fonction bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ ce qui implique $\mathrm{D}^\alpha f_k \rightrightarrows_{\mathbb{R}^n} \mathrm{D}^\alpha\varphi$.∎

Voici à présent une importante propriété d'approximation au bord des éléments de $\mathcal{C}^m(\Omega)$, propriété qui sera améliorée dans la suite.

Proposition 3.5.3 (Whitney, Lemma 6, [40]) *Soient*
(a) Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$*;*
(b) $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *une suite d'ouverts bornés de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $\Omega_0 = \emptyset$*,* $\Omega_k^- \subset \Omega_{k+1}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et* $\cup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$*;*
(c) $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de* $]0, +\infty[$*;*
(d) m *un élément de* $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$*.*

Cela étant, pour tout $p \in \mathbb{N}$*, posons* $N_p = m$ *si* $m \in \mathbb{N}_0$ *et* $N_p = p$ *si* $m = \infty$*.*

Pour tout $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$*, il existe alors une fonction* g *holomorphe sur* Ω^* *telle que*

$$\sup_{|\alpha|\leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha f - \mathrm{D}^\alpha g\|_{\Omega\setminus\Omega_p} \leq \varepsilon_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Introduisons tout d'abord une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si p_0 est le premier entier p tel que $\Omega_p \neq \emptyset$, nous posons $u_0 = \ldots = u_{p_0-1} = 0$ et choisissons $u_{p_0} \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ identique à 1 sur un voisinage de $H_{p_0} := \Omega_{p_0+1}^-$ et à support inclus dans Ω_{p_0+2}. Ensuite, pour tout entier $p > p_0$, nous choisissons $u_p \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ identique à 1 sur un voisinage du compact $H_p = \Omega_{p+1}^- \setminus \Omega_p$ et à support inclus dans l'ouvert $\Omega_{p+2} \setminus \Omega_{p-1}^-$.

Ensuite, nous posons $M_0 = \ldots = M_{p_0-1} = 0$ puis, pour tout entier $p \geq p_0$,

$$M_p := \sup_{|\alpha|\leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha u_p\|_{\mathbb{R}^n}\,;$$

nous avons donc $M_p \geq 1$ pour tout $p \geq p_0$.

Enfin introduisons la suite $(G_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ au moyen de la récurrence suivante. Comme point de départ, nous posons $G_0 = \ldots = G_{p_0-1} = 0$ et, comme règle de récurrence pour $p \geq p_0$, nous adoptons

$$G_p(z) := \pi^{-n/2}k_p^n \int_{\mathbb{R}^n} u_p(y) \left(f(y) - \sum_{s=0}^{p-1} G_s(y) \right) \mathrm{e}^{-k_p^2 \sum_{j=1}^n (z_j-y_j)^2}\, dy$$

où, ayant posé $v_p = u_p(f - \sum_{s=0}^{p-1} G_s)$, $k_p > 0$ est choisi suffisamment grand pour que

$$\pi^{-n/2} k_p^n \, \|v_p\|_{\mathbb{R}^n} \, \mathrm{e}^{-k_p^2 p^{-2}} \mathrm{mes}(\Omega_{p+2}) \leq 2^{-p}$$

et

$$\sup_{|\alpha| \leq N_{p+1}} \|\mathrm{D}^\alpha v_p - \mathrm{D}^\alpha G_p\|_{\Omega_{p+1}^-} \leq \frac{\varepsilon_{p+1}}{2^{p+3}(N_{p+1}+1)!M_{p+1}} \leq \frac{\varepsilon_p}{2^p+3}$$

en recourant à la proposition précédente pour obtenir cette deuxième majoration: nous avons en effet $v_p \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$.

Cela étant, établissons que, pour tout entier $p > p_0$, nous avons

$$\sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha G_p\|_{\Omega_p^-} \leq \frac{\varepsilon_p}{2^{p+1}}.$$

Comme u_{p-1} prend la valeur 1 sur un voisinage V_{p-1} du compact H_{p-1}, nous avons

$$v_{p-1} - G_{p-1} = f - \sum_{s=0}^{p-1} G_s \text{ sur } V_{p-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha| \leq N_p} \left\| \mathrm{D}^\alpha f - \mathrm{D}^\alpha \sum_{s=0}^{p-1} G_s \right\|_{H_{p-1}} &\leq \sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha v_{p-1} - \mathrm{D}^\alpha G_{p-1}\|_{\Omega_p^-} \\
&\leq \frac{\varepsilon_p}{2^{p+2}(N_p+1)!M_p}
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha v_p\|_{H_{p-1}} &\leq \sup_{|\alpha| \leq N_p} \sum_{\beta \leq \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \, \|\mathrm{D}^\beta u_p\|_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathrm{D}^{\alpha-\beta} \left(f - \sum_{s=0}^{p-1} G_s \right) \right\|_{H_{p-1}} \\
&\leq \sup_{|\alpha| \leq N_p} \sum_{\beta \leq \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \frac{\varepsilon_p}{2^{p+2}(N_p+1)!} \leq \frac{\varepsilon_p}{2^{p+2}}.
\end{aligned}$$

(on a $\sum_{\beta \leq \alpha} 2^\beta = 2^{|\alpha|}$ et $2^{N_p} \leq (N_p+1)!$). Comme u_p est identique à 0 sur un voisinage de Ω_{p-1}^-, ces inégalités s'étendent sur Ω_{p-1}. Au total, nous obtenons

$$\sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha v_p\|_{\Omega_p^-} \leq \frac{\varepsilon_p}{2^{p+2}},$$

donc

$$\sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha G_p\|_{\Omega_p^-} \leq \sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha G_p - \mathrm{D}^\alpha v_p\|_{\Omega_p^-} + \sup_{|\alpha| \leq N_p} \|\mathrm{D}^\alpha v_p\|_{\Omega_p^-} \leq \frac{\varepsilon_p}{2^{p+1}}.$$

Pour conclure, nous allons établir que la série $g := \sum_{p=1}^{\infty} G_p$ convient.

D'une part, considérons la restriction de cette série à Ω. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier $p > p_0$ tel que $K \subset \Omega_p$. Cela étant, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq N_p$, il vient

$$\sum_{s=1}^{\infty} \|\mathrm{D}^\alpha G_s\|_{\Omega_p^-} \leq \sum_{s=1}^{p-1} \|\mathrm{D}^\alpha G_j\|_{\Omega_p^-} + \sum_{s=p}^{\infty} \frac{\varepsilon_s}{2^{s+1}} < \infty.$$

Il s'ensuit déjà que g appartient à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et donne lieu à $\mathrm{D}^\alpha g = \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{D}^\alpha G_p$. Dès lors, nous obtenons de suite

$$\|\mathrm{D}^\alpha f - \mathrm{D}^\alpha g\|_{H_p} \leq \|\mathrm{D}^\alpha f - \mathrm{D}^\alpha (G_1 + \cdots + G_p)\|_{H_p} + \sum_{s=p+1}^{\infty} \|\mathrm{D}^\alpha G_s\|_{H_p} \leq \varepsilon_p$$

pour tout entier $p > p_0$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq N_{p+1}$. Les inégalités annoncées dans l'énoncé ont donc lieu.

D'autre part, considérons la restriction de cette série g à Ω^*. Comme les fonctions G_p sont holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, il suffit, pour conclure définitivement cette preuve, d'établir que la série g converge uniformément sur tout compact H de Ω^*.

Etablissons d'abord, par contradiction, qu'il existe un entier $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\delta^2 := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left((u_j - y_j)^2 - v_j^2 \right) : u, v, y \in \mathbb{R}^n ; u + iv \in H ; y \notin \Omega_{p_1} \right\} > 0.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, il existe des suites u_s, v_s et y_s de $\mathbb{R}^n$ telles que $u_s + iv_s \in H$, $y_s \notin \Omega_s$ et $\sum_{j=1}^{n} ((u_{s,j} - y_{s,j})^2 - v_{s,j}^2) \to 0$. Quitte à recourir à des sous-suites, nous pouvons supposer avoir $u_s + iv_s \to u_0 + iv_0 \in H$ et $y_s \to y_0 \in \partial\Omega$. Ceci conduit à la contradiction

$$|v_0|^2 = |u_0 - y_0|^2 \geq d^2(u_0, \partial\Omega).$$

Cela étant, pour tout entier $p > \sup\{p_1, 1/\delta\}$ et tout point $z = u + iv \in H$ tel que u, $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned} |G_p(z)| &\leq \pi^{-n/2} k_p^n \|v_p\|_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega_{p+2}^- \setminus \Omega_{p-1}} \mathrm{e}^{-k_p^2 \sum_{j=1}^{n} ((u_j - y_j)^2 - v_j^2)} \, dy \\ &\leq \pi^{-n/2} k_p^n \|v_p\|_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-k_p^2 p^{-2}} \mathrm{mes}(\Omega_{p+2}^-) \leq 2^{-p}, \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure.∎

Nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat fondamental suivant de Whitney.

Théorème 3.5.4 (Whitney, cas analytique, 1934, [40]) *Soit* $p \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. *Tout* p*-jet de Whitney sur un fermé propre* F *de* $\mathbb{R}^n$ *provient d'une fonction appartenant à* $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ *admettant un prolongement holomorphe sur* $(\mathbb{R}^n \setminus F)^*$.

Preuve. Vu les théorèmes de prolongement de Whitney 3.3.2 et 3.4.2, nous savons déjà que tout p-jet de Whitney $\boldsymbol{\varphi}$ sur F provient d'une fonction $g \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$.

Vu la proposition précédente appliquée à l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$, aux ouverts $\Omega_k = \{\, x : |x| < k, d(x, F) > 1/k \,\}$, aux $\varepsilon_k = 1/k$ et à $m = \infty$, il existe une fonction h holomorphe sur Ω^* telle que

$$\sup_{|\alpha| \leq p} \|\mathrm{D}^\alpha g - \mathrm{D}^\alpha h\|_{\Omega \setminus \Omega_p} \leq \varepsilon_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que la fonction

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) = g(x) & \text{si } x \in F \\ f(x) = h(x) & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$. Cela résulte aussitôt de la proposition 3.5.1 et de la remarque qui la suit. ∎

Chapitre 4

Existence d'opérateurs linéaires continus d'extension douce

4.1 Position du problème

Nous venons d'établir que, pour tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, l'opérateur linéaire continu de restriction

$$R_F\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(F); \quad f \mapsto (\mathrm{D}^\alpha f|_F)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

est surjectif, les espaces $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}(F)$ étant de Fréchet.

Se pose alors tout naturellement la question de savoir si R_F admet un inverse linéaire continu à droite, encore appelé *"opérateur linéaire continu d'extension"* et noté

$$E_F\colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

4.2 Première réponse négative

Proposition 4.2.1 *Il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(\{0\})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que, dans le cas de Borel, la réponse est négative.*

Preuve. Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un opérateur linéaire continu d'extension E de $\mathcal{E}(\{0\})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Choisissons alors une fonction $\varphi \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ identique à 1 sur un voisinage de 0 et à support inclus dans $b = \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \,\}$. Il est alors aisé de vérifier que

$$E_1\colon \mathcal{E}(\{0\}) \to \mathcal{D}^\infty(b); \quad \boldsymbol{c} \mapsto \varphi \cdot E\boldsymbol{c}$$

est une injection linéaire et continue alors que

$$R_{\{0\}}\colon E_1\mathcal{E}(\{0\}) \to \mathcal{E}(\{0\})$$

est aussi un opérateur linéaire continu. Il s'ensuit que les espaces $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} = \mathcal{E}(\{0\})$ et $E_1\mathcal{E}(\{0\})$ sont isomorphes. Ceci est absurde car $E_1\mathcal{E}(\{0\})$ a une norme continue, $\|\cdot\|_b$ par exemple, alors que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ n'en n'a pas.∎

En fait, la preuve précédente peut être géneralisée et donner lieu au résultat suivant.

Théorème 4.2.2 *Quel que soit le compact non vide K inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Quitte à effectuer une translation et une rotation, nous pouvons supposer avoir $K \subset \{\, x : x_1 = 0 \,\}$. Soit de plus ψ un élément de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ identique à 1 sur $b = \{\, x : d(x, K) \leq 1/2 \,\}$ et à support inclus dans $H = \{\, x : d(x, K) \leq 1 \,\}$.

Si E est un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, il est aisé de vérifier que

$$E_1\colon \mathcal{E}(K) \to \mathcal{D}^\infty(H); \quad \varphi \mapsto \psi \cdot E\varphi$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{E}(K)$ et son image.

Comme $E_1\mathcal{E}(K)$ est inclus dans $\mathcal{D}^\infty(H)$, il a une norme continue, à savoir $\|\cdot\|_H$. Comme E_1 est un opérateur linéaire continu, il existe alors $p \in \mathbb{N}_0$ et $C > 0$ tels que

$$\|E_1\varphi\|_H \leq C\, \|\varphi\|_{K,p}\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(K).$$

Ceci implique que $\|\cdot\|_{K,p}$ est une norme continue sur $\mathcal{E}(K)$. Or le jet

$$\boldsymbol{\varphi} = \big((\mathrm{D}^\alpha x_1^{p+1})|_K\big)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

appartient assurément à $\mathcal{E}(K)$, diffère de 0 et vérifie $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{K,p} = 0$. D'où une contradiction.∎

4.3 Premières réponses positives

Théorème 4.3.1 (Mityagin, 1961, [18]) *Il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}([-1, 1])$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*∎

Pour la preuve de ce résultat, nous référons à [18]. Cette preuve sort du cadre de ce cours; elle recourt aux notions d'espace nucléaire et d'espace de Fréchet ayant la propriété (Ω) ou la propriété (DN).

Par contre voici une réponse positive avec preuve: il s'agit d'un rare cas où l'existence ne requiert pas une "artillerie" trop lourde.

Lemme 4.3.2 *Il existe des suites* $(a_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *et* $(b_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *de nombres réels tels que*
(a) $b_m < 0$ *et* $b_m \to -\infty$*;*
(b) $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|\, |b_m|^k < \infty$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}_0$*;*
(c) $\sum_{m=0}^{\infty} a_m b_m^k = 1$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}_0$.

Preuve. Posons $b_m = -2^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$; la condition (a) de l'énoncé est assurément vérifiée.

Pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, considérons le système

$$\sum_{m=0}^{p} b_m^k x_{m,p} = 1 \text{ pour } k = 0, \ldots, p.$$

Il s'agit clairement d'un système de $p+1$ équations linéaires à coefficients constants. De plus, la matrice des coefficients est de Vandermonde et a pour déterminant

$$D_p = (-1)^{p(p+1)/2} \prod_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{p} (b_i - b_j),$$

c'est-à-dire un nombre non nul. Cela étant, les solutions $a_{m,p}$ avec $m = 0, \ldots, p$ sont données par la formule de Cramer sous la forme $a_{m,p} = N_{m,p}/D_p$ avec (en utilisant une nouvelle fois la méthode de Vandermonde)

$$N_{m,p} = (-1)^{p(p+1)/2} \prod_{\substack{i,j=0\\ i<j;i\neq m;j\neq m}}^{p} (b_i - b_j)(-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} (1 - b_k) \prod_{l=m+1}^{p} (1 - b_l),$$

c'est-à-dire

$$a_{m,p} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1 - b_k}{b_k - b_m} \cdot \prod_{l=m+1}^{p} \frac{1 - b_l}{b_m - b_l}$$

ou encore $a_{m,p} = A_m B_{m,p}$ avec

$$A_0 = 1 \text{ et } A_m = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1 + 2^k}{2^k - 2^m} \text{ pour } m = 1, \ldots, p$$

et

$$B_{m,p} = \prod_{l=m+1}^{p} \frac{1 + 2^l}{2^l - 2^m} \text{ pour } m = 0, \ldots, p-1 \text{ et } B_{p,p} = 1.$$

Cela étant, d'une part, vis-à-vis de la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, nous avons

$$|A_m| \leq \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1+2^k}{2^m-2^k} \leq \prod_{k=0}^{m-1} \frac{2^{k+1}}{2^{m-1}} = 2^{(3m-m^2)/2}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ donc $|A_m| \leq 2^{(3m-m^2)/2}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, remarquons que $(B_{m,p})_{p\geq m+1}$ est une suite croissante et majorée par e^4 car nous avons

$$\begin{aligned}\ln(B_{m,p}) &= \sum_{l=m+1}^{p} \ln\left(1+\frac{1+2^m}{2^l-2^m}\right) \leq \sum_{l=m+1}^{p} \frac{1+2^m}{2^l-2^m} \\ &\leq \sum_{l=m+1}^{p} \frac{2\cdot 2^m}{2^m(2^{l-m}-1)} \leq 2\sum_{l=m+1}^{p} 2^{m+1-l} \leq 4;\end{aligned}$$

cela étant cette suite converge vers un nombre $B_m \leq \mathrm{e}^4$.

Cela étant, établissons que les nombres $a_m = A_m B_m$ conviennent.

D'une part, la condition (b) est vérifiée car nous avons

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|\,|b_m|^k \leq \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^4 2^{(3m-m^2)/2} 2^{km} < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

D'autre part, établissons que la condition (c) est aussi vérifiée. Posons $a_{m,p} = 0$ pour tous entiers $m,\ p \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > p$. Il est clair que nous avons $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,p} b_m^k = 1$ pour tout $k = 0, \ldots, p$. Si nous fixons $k \in \mathbb{N}_0$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, la suite $(a_{m,p} b_m^k)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est un élément de ℓ^1 et nous avons

(a) $a_{m,p} b_m^k \to a_m b_m^k$ si $p \to \infty$;

(b) $\left|a_{m,p} b_m^k\right| \leq |a_m|\,|b_m|^k$, la suite $(|a_m|\left|b_m^k\right|)_{m\in\mathbb{N}_0}$ appartenant à ℓ^1.

Dès lors, le théorème de la convergence majorée donne $\sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m^k = 1$.

D'où la conclusion.∎

Théorème 4.3.3 (Seeley, 1964, [30]) *Pour tout demi-espace fermé F de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Nous allons établir ce résultat dans le cas $n \geq 2$; la preuve du cas $n = 1$ s'en déduit aisément tout en se simplifiant considérablement.

Il est clair que nous pouvons supposer avoir

$$F = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : t \geq 0 \right\}.$$

Soit ψ un élément de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ identique à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et à support inclus dans $[-1,1]$. Soient de plus $(a_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(b_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ les deux suites dont nous avons établi l'existence dans le lemme précédent. Nous allons établir que

$$E\colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \quad \boldsymbol{\varphi} \mapsto \begin{cases} \varphi_0(x,t) & \text{si } t \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{m=0}^\infty a_m \psi(b_m t)\varphi_0(x, b_m t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est un opérateur adéquat.

Il est clair que $E\boldsymbol{\varphi}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(F^\circ)$ et vérifie $\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^k(E\boldsymbol{\varphi}) = \varphi_{(\alpha,k)}$ sur F° pour tout $(\alpha,k) \in \mathbb{N}_0^n$.

De plus, pour tout $r < 0$, la série $\sum_{m=0}^\infty a_m\psi(b_m t)\varphi_0(x, b_m t)$ est finie sur l'ensemble $\mathbb{R}^{n-1}\times]-\infty, r]$; il s'ensuit que $E\boldsymbol{\varphi}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$ et que nous avons

$$\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^k(E\boldsymbol{\varphi})(x,t) = \sum_{m=0}^\infty a_m b_m^k \sum_{j=0}^k \mathrm{C}_k^j \, [\mathrm{D}_t^j \psi]_{b_m t} \, [\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^{k-j} \varphi_0]_{(x, b_m t)}$$

sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ quel que soit $(\alpha,k) \in \mathbb{N}_0^n$.

Cela étant, établissons tout d'abord que, pour tous $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}_0$, la fonction

$$f_{(\alpha,k)}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad (x,t) \mapsto \begin{cases} \varphi_{(\alpha,k)}(x,t) & \text{si } t \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{m=0}^\infty a_m b_m^k \sum_{j=0}^k \mathrm{C}_k^j \, [\mathrm{D}_t^j \psi]_{b_m t} \, [\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^{k-j} \varphi_0]_{(x, b_m t)} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$. A priori elle est continue sur F et sur $\mathbb{R}^n \setminus F$. Pour conclure ce point, il nous suffit donc de prouver que, pour toute suite $(x_l, t_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n \setminus F$ convergente vers un point du type $(x_0, 0)$, nous avons $f_{(\alpha,k)}(x_l,t_l) \to \varphi_{(\alpha,k)}(x_0, 0)$. A cet effet, remarquons tout d'abord que, la suite $([\mathrm{D}_t^j\psi]_{b_m t_l})_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 si $j = 0$ et vers 0 si $j > 0$ alors que

$$[\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^{k-j}\varphi_0]_{(x_l, b_m t_l)} = \varphi_{(\alpha, k-j)}(x_l, b_m t_l) \to \varphi_{(\alpha,k-j)}(x_0, 0).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, nous avons donc

$$\sum_{j=0}^k \mathrm{C}_k^j \, [\mathrm{D}_t^j \psi]_{b_m t_l} \, [\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^{k-j} \varphi_0]_{(x_l, b_m t_l)} \to \varphi_{(\alpha,k)}(x_0, 0)$$

si $l \to \infty$ ainsi que

$$\left| \sum_{j=0}^k \mathrm{C}_k^j \, [\mathrm{D}_t^j \psi]_{b_m t_l} \, [\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^{k-j} \varphi_0]_{(x_l, b_m t_l)} \right| \\ \leq 2^k \sup_{0\leq j\leq k} \left\| \mathrm{D}^j \psi \right\|_{[-1,1]} \sup_{0 \leq l \leq k} \left\| \varphi_{(\alpha,l)} \right\|_{K\times[0,1]}$$

où K est le compact $\{\, x_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$. Nous pouvons alors conclure au moyen du théorème de la convergence majorée.

Dès lors, pour établir que $E_F\boldsymbol{\varphi}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, il suffit de prouver que, pour tout $(\alpha, k) \in \mathbb{N}_0^n$, la fonction $f_{(\alpha,k)}$ est dérivable et telle que $\mathrm{D}_j f_{(\alpha,k)} = f_{(\alpha,k)+e_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Nous savons déjà que c'est le cas sur $F^\circ \cup (\mathbb{R}^n \setminus F)$. Il nous reste donc à établir que $f_{(\alpha,k)}$ est dérivable en $(x, 0)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ et que ses dérivées d'ordre 1 sont données par ces formules. Pour les dérivées par rapport à x_1, …, x_{n-1}, cela résulte de ce que, en recourant à la définition des dérivées,

$$[\mathrm{D}_j f_{(\alpha,k)}]_{(x,0)} - f_{(\alpha,k)+e_j}(x,0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ r\in\mathbb{R}_0}} \frac{(R^{|\alpha|+k+1}_{(x,0)}\boldsymbol{\varphi})_{(\alpha,k)}((x,0)+he_j)}{h}$$

est égal à 0 car $\boldsymbol{\varphi}$ est un jet de Whitney. Pour la dérivation par rapport à t, procédons en deux temps. D'une part, nous avons bien sûr

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f_{(\alpha,k)}(x,h) - f_{(\alpha,k)}(x,0) - hf_{(\alpha,k+1)}(x,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\big(R^{|\alpha|+k+1}_{(x,0)}\boldsymbol{\varphi}\big)_{(\alpha,k)}(x,h)}{h} = 0.$$

D'autre part, calculons

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f_{(\alpha,k)}(x,h) - f_{(\alpha,k)}(x,0)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_m^k \frac{\psi(b_m h)\varphi_{(\alpha,k)}(x,b_m h) - \varphi_{(\alpha,k)}(x,0)}{h}\\ &\quad + \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_m^k \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j [\mathrm{D}^j\psi]_{b_m h}\, \varphi_{(\alpha,k-j)}(x,b_m h)\end{aligned}$$

D'une part, pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h}\big(\psi(b_m h)\varphi_{(\alpha,k)}(x,b_m h) - \varphi_{(\alpha,k)}(x,0)\big) = b_m \varphi_{(\alpha,k+1)}(x,0)$$

ainsi que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j [\mathrm{D}^j\psi]_{b_m h}\, \varphi_{(\alpha,k-j)}(x,b_m h) = 0.$$

D'autre part, en posant $K = \{x\} \times [0,1]$, nous obtenons pour tout $h < 0$

$$\begin{aligned}&\big|\psi(b_m h)\varphi_{(\alpha,k)}(x,b_m h) - \varphi_{(\alpha,k)}(x,0)\big|\\ &\qquad \le \big|\big(\psi(b_m h) - \psi(0)\big)\varphi_{\alpha,k)}(x,b_m h)\big| + \big|\varphi_{(\alpha,k)}(x,b_m h) - \varphi_{(\alpha,k)}(x,0)\big|\\ &\qquad \le |h|\,|b_m|\,\|\mathrm{D}\psi\|_{\mathbb{R}}\,\big\|\varphi_{(\alpha,k)}\big\|_K + |h|\,|b_m|\,\big\|\varphi_{(\alpha,k+1)}\big\|_K\end{aligned}$$

ainsi que

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j \left|[\mathrm{D}^j\psi]_{b_m h}\right| \left|\varphi_{(\alpha,k-j)}(x, b_m h)\right| \leq |h|\, |b_m| \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j \left\|\mathrm{D}^j\psi\right\|_{\mathbb{R}} \left\|\varphi_{(\alpha,k-j)}\right\|_K .$$

Par application du théorème de la convergence majorée dans ℓ^1, nous obtenons que la limite cherchée est égale à $f_{(\alpha,k+1)}(x,0)$ et nous pouvons conclure cette étape de la preuve.

Cela étant, il est clair que E est un opérateur linéaire de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour conclure, il nous reste à établir sa continuité. Cela résulte aussitôt des considérations suivantes. Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}_0$. Posons $K_1 = K \cap F$ et $K_2 = K \setminus F$. Il est clair que K_1 est un compact inclus dans F. De plus, nous obtenons directement

$$\begin{aligned} &\sup_{|\alpha|+k\leq p} \sup_{(x,t)\in K_2} \left|\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^k (E\boldsymbol{\varphi})(x,t)\right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|\, |b_m|^k \, 2^p \sup_{0\leq j\leq p} \left\|\mathrm{D}^j\psi\right\|_{[-1,1]} \sup_{\substack{|\alpha|\leq p\\ 0\leq l\leq p}} \left\|\varphi_{(\alpha,l)}\right\|_{K'\times[0,1]} \end{aligned}$$

où K' est le compact projection de K sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Au total, il vient

$$\sup_{|\alpha|+k\leq p} \left\|\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^k (E\boldsymbol{\varphi})\right\|_K \leq \sup_{|\alpha|+k\leq p} \left\|\varphi_{(\alpha,k)}\right\|_{K_1} + C \sup_{\substack{|\alpha|\leq p\\ 0\leq l\leq p}} \left\|\varphi_{(\alpha,l)}\right\|_{K'\times[0,1]}$$

pour une constante $C > 0$.∎

4.4 Critère local

Définitions. Etant donné des fermés propres F et M et un compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, introduisons deux sous-espaces de l'espace localement convexe $\mathcal{E}(F)$:
(a) $\mathcal{J}_M(F) := \{\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(F) : \varphi_\alpha|_{M\cap F} \equiv 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \,\}$ est en fait un idéal de $\mathcal{E}(F)$;
(b) $\mathcal{D}(K,F) := \{\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(F) : \mathrm{supp}(\varphi_\alpha) \subset K \cap F, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \,\}$.

Il est clair que $\mathcal{D}(K,F) = \mathcal{J}_{(F\setminus K)^-}(F)$.

Proposition 4.4.1 *Si F est un fermé propre et si K et H sont deux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $H \subset F$ et $K \subset H^{\circ F}$, alors les systèmes de semi-normes de $\mathcal{E}(F)$ et de $\mathcal{E}(H)$ sont équivalents sur $\mathcal{D}(K,F)$.*

Preuve. Il est clair que la topologie de $\mathcal{D}(K,F)$, héritée de $\mathcal{E}(F)$, est plus fine que celle induite par $\mathcal{E}(H)$.

Inversement, soit $\|\cdot\|_{m,L}$ une semi-norme canonique de $\mathcal{E}(F)$. Bien sûr, nous pouvons supposer avoir $L \supset H$. Cela étant, il est clair d'une part que

$$\sup_{|\alpha|\leq m} \|\cdot_\alpha\|_L = \sup_{|\alpha|\leq m} \|\cdot_\alpha\|_H$$

a lieu sur $\mathcal{D}(K,F)$. D'autre part, établissons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{x,y\in L\\ x\neq y}} \frac{|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y-x|^{m-|\alpha|}} \leq C \|\boldsymbol{\varphi}\|_{m,H}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(K,F).$$

A cet effet, remarquons d'abord qu'il existe $r > 0$ tel que $(K + b(r)) \cap (F \setminus H) = \emptyset$. Cela étant, pour conclure, il suffit de noter que
(a) si $x \in L \setminus H$ et $y \in K$, nous avons $|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)| = \varphi_\alpha(y)$ avec $|y - x| \geq r$ donc

$$\frac{|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y-x|^{m-|\alpha|}} \leq \frac{1}{r^{p-|\alpha|}} \|\varphi_\alpha\|_K ;$$

(b) si $x \in K$ et $y \in L \setminus H$, nous avons

$$|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)| = (T_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y) = \sum_{|\beta\leq m-|\alpha||} \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta$$

avec $|y - x| \geq r$ donc

$$\frac{|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)|}{|y-x|^{m-|\alpha|}} \leq \sum_{|\beta|\leq m-|\alpha|} \frac{\|\varphi_{\alpha+\beta}\|_K}{\beta!} \frac{e^{|\beta|}(K, L\setminus H)}{r^{p-|\alpha|}} \leq C' \sup_{|\gamma|\leq m} \|\varphi_\gamma\|_K ;$$

(c) si x, $y \in L \setminus K$, nous avons $|(R_x^m \boldsymbol{\varphi})_\alpha(y)| = 0$.∎

Critère 4.4.2 *Si F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, les assertions suivantes sont équivalentes:*
(a) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
(b) *pour tout fermé propre M de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{J}_M(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
(c) *pour tout $x \in \partial F$, il existe $\varepsilon > 0$ et un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{D}(b(x;\varepsilon), F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
(d) *pour tout $x \in \partial F$, il existe $\varepsilon \in]0,1[$ et un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{D}(b(x;\varepsilon), F \cap b(x;2\varepsilon))$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) a lieu car $\mathcal{J}_M(F)$ est un sous-espace de $\mathcal{E}(F)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) a lieu car $\mathcal{D}(b(x;\varepsilon), F)$ est égal à $\mathcal{J}_{(F\setminus b(x;\varepsilon))^-}(F)$.

(c) $\Rightarrow$ (d) a lieu car

$$T\colon \mathcal{D}(b(x;\varepsilon), F\cap b(x;2\varepsilon)) \to \mathcal{D}(b(x;\varepsilon), F)$$

défini par $T\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ avec $\psi_\alpha = \varphi_\alpha$ sur $F\cap b(x;2\varepsilon)$ et 0 sur $F\setminus b(x;2\varepsilon)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ est évidemment linéaire et continu.

(d) $\Rightarrow$ (a). Pour tout $x\in\partial F$, il existe donc $\varepsilon_x \in]0,1[$ et un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{D}(b(x;\varepsilon_x), F\cap b(x;2\varepsilon_x))$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Il existe un premier entier m_1 tel que $\partial F\cap b(0;m_1)\neq\emptyset$. Cela étant, du recouvrement ouvert

$$\{\, b(x;<\varepsilon_x/2) : x\in\partial F\cap b(0;m_1)\,\}$$

du compact $\partial F\cap b(0;m_1)$, nous pouvons extraire un recouvrement fini; soient x_1, …, $x_{j(1)}$ les centres retenus. Ensuite

$$\{\, b(x;<\varepsilon_x/2) : x\in\partial F\cap b(0;m_1+1)\setminus b(0;m_1)\,\}$$

est un recouvrement ouvert du compact

$$\partial F\cap b(0;m_1+1)\setminus \cup_{j=1}^{j(1)} b(x_j;<\varepsilon_{x_j}/2)$$

et nous pouvons en extraire un recouvrement fini; soient $x_{j(1)+1}$, …, $x_{j(2)}$ les centres retenus. Continuons de la sorte.

Pour tout centre x_j retenu, désignons par g_j une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0\le g_j\le \chi_{\mathbb{R}^n}$, $g_j\equiv 1$ sur $b(x_j;\varepsilon_{x_j}/2)$ et $\operatorname{supp}(g_j)\subset b(x_j;<\varepsilon_{x_j})$. Cela étant, considérons les fonctions $f_1 = g_1$ et $f_j = (1-g_1)\dots(1-g_{j-1})g_j$ pour tout entier $j\ge 2$. Il est clair que, pour tout $j\in\mathbb{N}$, f_j appartient à $\mathcal{D}^\infty(b(x_j;<\varepsilon_{x_j}))$. De plus, pour tout $j\in\mathbb{N}$, établissons par récurrence que nous avons

$$f_1+\cdots+f_j = 1-(1-g_1)\cdots(1-g_j).$$

Pour $j=1$, c'est trivial; de plus, si cette égalité a lieu pour $j=1$, …, k, elle a également lieu pour $k+1$ car

$$f_1+\cdots+f_{k+1} = 1-(1-g_1)\cdots(1-g_k)+(1-g_1)\cdots(1-g_k)g_{k+1}.$$

Enfin, pour tout $J\in\mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{j=1}^J f_j(x) = 1,\quad \forall x\in\cup_{j=1}^J b(x_j;\varepsilon_{x_j}/2),$$

les fonctions $f_k > J$ s'annulant identiquement sur $\cup_{j=1}^{J} b(x_j; \varepsilon_{x_j}/2)$.

Enfin, pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit h_j un élément de $\mathcal{D}^\infty(b(x_j; 2\varepsilon_{x_j}))$ identique à 1 sur $b(x_j; \varepsilon_{x_j})$.

Cela étant, établissons que l'opérateur

$$E \colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

défini par

$$\boldsymbol{\varphi} \mapsto \begin{cases} \varphi_0(x) & \forall x \in F \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} h_j(x) E_j(f_j \boldsymbol{\varphi}|_{F \cap b(x_j; 2\varepsilon_{x_j})})(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus F \end{cases}$$

où $f_j \boldsymbol{\varphi}$ est le jet $\boldsymbol{\psi}$ défini par $\psi_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \mathrm{D}^\beta f_j \cdot \varphi_{\alpha-\beta}$ et où E_j est un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(b(x_j; \varepsilon_{x_j}), F \cap b(x_j; 2\varepsilon_{x_j}))$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, est bien défini et constitue un opérateur linéaire continu d'extension.

Tout d'abord, prouvons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J_j \colon \mathcal{E}(F) &\to \mathcal{E}(b(x_j; \varepsilon_{x_j}), F \cap b(x_j; 2\varepsilon_{x_j})) \\ \boldsymbol{\varphi} &\mapsto \sum_{\beta \leq \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \mathrm{D}^\beta f_j \cdot \varphi_{\alpha-\beta}|_{F \cap b(x_j; 2\varepsilon_{x_j})} \end{aligned}$$

définit un opérateur linéaire continu. Vu le théorème de Whitney, il est clair que $J_j \boldsymbol{\varphi}$ appartient à $\mathcal{E}(b(x_j; \varepsilon_{x_j}), F \cap b(x_j; 2\varepsilon_{x_j}))$. Il est tout aussi clair que J_j est un opérateur linéaire. Sa continuité s'établit directement.

Etablissons à pr'esent que E est un opérateur linéaire continu. Il est clair que $E\boldsymbol{\varphi}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ car la série qui le définit est localement finie, les boules $b(x_j; 2\varepsilon_{x_j})$ étant localement finies. Ceci étant, E est évidemment un opérateur linéaire dont la continuité s'établit directement.

Pour conclure, prouvons que E est un opérateur d'extension. De $E\boldsymbol{\varphi} = \varphi_0$ sur F, nous tirons déjà que $\mathrm{D}^\alpha(E\boldsymbol{\varphi})(x) = \varphi_\alpha(x)$ pour tout $x \in F^\circ$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. De plus, pour tout $x \in b(x_k; \varepsilon_{x_k}/2) \setminus F$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^\alpha E\boldsymbol{\varphi}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{D}^\alpha E_j(f_j \boldsymbol{\varphi})(x) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{D}^\alpha E_j(f_j \boldsymbol{\varphi})(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.5 Résultats supplémentaires reposant sur la nature de F

Il existe encore beaucoup d'autres résultats exprimant l'existence ou la non-existence d'un opérateur linéaire continu d'extension à partir de la nature de F. Dans le chapitre 1, nous en formulons quelques-uns et indiquons des références. Leurs preuves sortent du cadre de ce cours.

4.6 Le critère de Tidten

Convention. Dans ce paragraphe, nous allons introduire, sans preuve, les éléments qui permettent d'énoncer le critère obtenu par Tidten en 1979 (cf. [32]). Ce critère établit une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension. Cette condition ne porte pas explicitement sur le fermé F mais bien sur l'espace $\mathcal{E}(F)$.

4.6.1 Espaces nucléaires

Définition. Un espace localement convexe E est *nucléaire* si, pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, il existe $q \in \mathrm{cs}(E)$ tel que p soit *nucléaire par rapport à* q, c'est-à-dire tel qu'il existe des suites $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$, $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de E et $(e'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de E' telles que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} |c_m| < \infty; \\ \displaystyle\sup_{m\in\mathbb{N}} p(e_m) < \infty; \\ e'_m \in b_q^{\Delta}, \quad \forall m \in \mathbb{N}; \\ \displaystyle p\Big(e - \sum_{m=1}^{M} \langle e, e'_m\rangle\, e_m\Big) \to 0 \text{ si } M \to \infty, \quad \forall e \in E. \end{cases}$$

Théorème 4.6.1 a) *Tout sous-espace vectoriel d'un espace nucléaire, muni de la topologie induite, est nucléaire.*

b) *Tout produit d'espaces nucléaires est nucléaire.*

c) *Tout quotient d'un espace nucléaire par un sous-espace vectoriel fermé est nucléaire.* ∎

Définition. Une semi-norme p sur un espace vectoriel E est *pré-hilbertienne* s'il existe un semi-produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E tel que $p(\cdot) = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ sur E.

Proposition 4.6.2 *Tout espace nucléaire admet un système fondamental de semi-normes pré-hilbertiennes.*▮

Exemple. *L'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est nucléaire.*□

Exemple. *L'espace s est un espace de Fréchet nucléaire.*□

Rappelons que l'espace s des *suites rapidement décroissantes* est l'espace vectoriel

$$\left\{ \boldsymbol{c} \in \omega : \lim_{m\to\infty} |c_m|\, m^k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

muni du système de semi-normes $\{ q_k : k \in \mathbb{N} \}$ où chaque q_k est défini selon

$$q_k(\boldsymbol{c}) := \left(\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2 m^{2k} \right)^{1/2}.$$

Critère 4.6.3 (Kômura, Kômura, 1964) a) *Un espace localement convexe E est nucléaire si et seulement s'il existe un ensemble I tel que E est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de s^I.*

b) *Un espace de Fréchet est nucléaire si et seulement s'il est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de $s^{\mathbb{N}}$.*▮

4.6.2 Propriété (DN)

Définition. L'espace de Fréchet $(E, \{ p_m : m \in \mathbb{N} \})$ *a la propriété* (DN) s'il existe une norme continue $\|\cdot\|$ sur E telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $l \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $p_k^2(\cdot) \le C \|\cdot\| \, p_l(\cdot)$ sur E.

On vérifie aisément que cette propriété est indépendante du système de semi-normes $\{ p_m : m \in \mathbb{N} \}$ choisi.

Critère 4.6.4 *Un espace de Fréchet $(E, \{ p_m : m \in \mathbb{N} \})$ a la propriété* (DN) *si et seulement s'il existe une norme continue $\|\cdot\|$ sur E telle que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 1[$, il existe $l \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$p_k(\cdot) \le C \|\cdot\|^{1-\theta} p_l^\theta(\cdot) \text{ sur } E.$$ ▮

Proposition 4.6.5 *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Fréchet qui a la propriété* (DN) *a la propriété* (DN).▮

Exemple. *Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, l'espace de Fréchet $\mathcal{D}^\infty(K)$ a la propriété* (DN).□

Exemple. *L'espace Fréchet nucléaire s a la propriété* (DN).□

4.6.3 La propriété (Ω)

Définition. Un espace de Fréchet $(E, \{\, p_m : m \in \mathbb{N} \,\})$ *a la propriété* (Ω) si, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que

$$p_k^*(e') \leq C p_l^*(e')^{1-\theta} p_n^*(e')^{\theta}, \quad \forall e' \in E',$$

où, pour une semi-norme p sur E, p^* est défini selon

$$p^*(e') := \sup_{p(e) \leq 1} |\langle e, e' \rangle|, \quad \forall e' \in E'.$$

On vérifie aisément que cette propriété est indépendante du système de semi-normes $\{\, p_m : m \in \mathbb{N} \,\}$ choisi.

Proposition 4.6.6 a) *Si E est un espace de Fréchet ayant la propriété* (Ω) *et si L est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors l'espace de Fréchet E/L a la propriété* (Ω).

b) *Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet ayant la propriété* (Ω) *est un espace de Fréchet ayant la propriété* (Ω).∎

Exemple. *Pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}^\infty(K)$ est un espace de Fréchet ayant la propriété* (Ω).□

Exemple. *Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a la propriété* (Ω) *mais n'a pas la propriété* (DN).□

Exemple. *L'espace de Fréchet nucléaire s a les propriétés* (DN) *et* (Ω).□

Exemple. *Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, le sous-espace de Fréchet $\mathcal{J}_K$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a la propriété* (Ω).□

4.6.4 Un théorème de scission

Définition. Un *espace de Fréchet-Hilbert* est un espace de Fréchet dont la topologie est équivalente à celle déterminée par un système dénombrable de semi-normes pré-hilbertiennes.

Théorème 4.6.7 (scission, Vogt, [16]) *Si*

$$0 \to E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{R} G \to 0$$

est une suite exacte courte d'espaces de Fréchet-Hilbert, si E a la propriété (Ω) *et si G a la propriété* (DN), *alors la suite se scinde, c'est-à-dire que la surjection linéaire continue R admet un inverse linéaire continu à droite.*∎

Théorème 4.6.8 *Pour tout espace de Fréchet nucléaire E, il existe un sous-espace vectoriel fermé L de s et des opérateurs linéaires continus T et R tels que*

$$0 \to s \xrightarrow{T} L \xrightarrow{R} E \to 0$$

est une suite exacte courte.∎

Ces résultats donnent lieu aux théorèmes d'isomorphie suivants.

Théorème 4.6.9 *Un espace de Fréchet est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de s si et seulement s'il est nucléaire et a la propriété* (DN).∎

Théorème 4.6.10 *Un espace de Fréchet est isomorphe à un espace quotient de s si et seulement s'il est nucléaire et a la propriété* (Ω).∎

4.6.5 Les résultats de Tidten

Théorème 4.6.11 (Tidten, 1979, [32]) *Si K est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(K)$ est un espace de Fréchet nucléaire ayant la propriété* (Ω).

De plus, les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) *$\mathcal{E}(K)$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de s;*

(b) *$\mathcal{E}(K)$ a la propriété* (DN)*;*

(c) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*∎

Théorème 4.6.12 (Tidten, 1979, [32]) *Si F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;*

(b) *pour tout fermé L de $\mathbb{R}^n$ de complémentaire borné, $\mathcal{J}_L(F)$ a la propriété* (DN)*;*

(c) *pour tout compact K de F, $\mathcal{D}(K, F)$ a la propriété* (DN)*;*

(d) *pour tout $x \in \partial F$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{D}(b(x;\varepsilon), F)$ a la propriété* (DN).∎

Chapitre 5

Existence d'opérateurs linéaires continus d'extension analytique

5.1 Position du problème

Dans le chapitre précédent, étant donné un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$, nous avons obtenus des résultats affirmant l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Comparant ces résultats avec les théorèmes de Borel-Ritt ou de Whitney, Valdivia s'est étonné du fait que l'holomorphie et même l'analyticité des extensions ne soient pas envisagées.

Là se trouve le point de départ d'une recherche fructueuse.

Dans le développement de cette théorie, nous allons suivre la voie historique; elle correspond également à un souci pédagogique.

Cela étant, dans ce chapitre, nous allons envisager la question de l'existence des opérateurs linéaires continus

$$E\colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

d'extension analytique, c'est-à-dire dont les images sont analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ car admettant un prolongement holomorphe sur $(\mathbb{R}^n \setminus F)^*$.

Dans le chapitre suivant, nous envisagerons ensuite l'existence d'opérateurs linéaires continus d'extension holomorphe, c'est-à-dire à valeurs dans un espace du type $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}_\infty(U)$ pour un certain ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

A chaque fois, tout repose sur l'obtention d'un théorème d'approximation portant sur l'espace $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.

Espace $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$

Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ *est l'espace de Fréchet* obtenu en munissant l'espace vectoriel des fonctions infiniment continûment dérivables sur Ω qui sont bornées sur Ω ainsi que chacune de leurs dérivées, de la convergence uniforme, c'est-à-dire que $\operatorname{cs}(\mathcal{BC}^\infty(\Omega))$ est équivalent au système dénombrable de semi-normes $\{\|\cdot\|_{\Omega,p} : p \in \mathbb{N}\}$.

5.2 Construction de la suite $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{N}}$, [28]

A tout ouvert propre Ω de $\mathbb{R}^n$, nous allons associer une suite spéciale $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs. Sa construction est plutôt assez longue et fastidieuse mais tous les ingrédients introduits sont utilisés pour obtenir le théorème d'approximation 5.4.1.

Nous introduisons successivement:

(a) une suite $\{\, K_r : r \in \mathbb{N}\,\}$ de compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que $K_1 \neq \emptyset$, $\mathbb{K}_r^{\circ,-} = K_r \subset K_{r+1}^\circ$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $\cup_{r=1}^\infty K_r = \Omega$;

(b) pour tout $r \in \mathbb{N}$, une fonction $u_r \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{aligned} &u_r \equiv 1 \ \text{ sur un voisinage de } K_{r+2} \setminus (K_{r+1})^\circ,\\ &\operatorname{supp}(u_r) \subset (K_{r+3})^\circ \setminus K_r. \end{aligned}$$

(c) pour tous m, $r \in \mathbb{N}$, un entier positif $d_{r,m}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_{r,m} & \leq & d_{r,m+1};\\ (r+1)d_{r,m}^2 & \leq & d_{r+1,m}\\ \sup\limits_{|\alpha|\leq m} 2^{(m+r+1)|\alpha|}\, \|\mathrm{D}^\alpha u_r\|_{\mathbb{R}^n} & \leq & d_{r,m}. \end{array} \right.$$

(d) $p_r = d_{r,r}$, $\varepsilon_r = 2^{-rp_{r+2}}$ et $\delta_r = \varepsilon_r \left(3np_r^2 p_{r+1} 2^{2r+2}\right)^{-1}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Cela étant, pour tout $\rho > 0$, nous posons

$$\Psi(\rho) = \pi^{-n/2} \int_{|y|\leq\rho} \mathrm{e}^{-|y|^2}\, dy$$

et remarquons que la formule de Poisson donne $\Psi(\rho) \uparrow 1$ si $\rho \uparrow +\infty$.

Nous pouvons enfin introduire la suite $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{N}}$: les λ_r sont des nombres strictement positifs obtenus par récurrence et soumis aux conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_r & \uparrow & +\infty,\\ p_r^2(1-\Psi(\lambda_r\delta_r)) & \leq & \delta_r,\\ \pi^{-n/2} p_r^2 \lambda_r^n \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 r^{-2}} \operatorname{mes}(K_{r+3}) & \leq & 2^{-r}. \end{array} \right.$$

5.3 Résultats auxiliaires, [28]

Convention. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, Ω désigne un ouvert propre de $\mathbb{R}^n$ et f un élément fixe de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.

Notre attention va se concentrer sur les fonctions G_0, G_1, G_2, … définies sur $\mathbb{R}^n$ au moyen de la récurrence suivante: comme étape préliminaire, nous posons $G_0(x) = 0$ et utilisons ensuite la règle de récurrence suivante

$$G_r(x) = \pi^{-n/2}\lambda_r^n \int_{\mathbb{R}^n} u_r(y)\left(f(y) - \sum_{s=0}^{r-1} G_s(y)\right)\mathrm{e}^{-\lambda_r^2|x-y|^2}\,dy$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Comme les fonctions u_r appartiennent à l'espace $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et comme la fonction $\exp(-\lambda_r^2\,|x-y|^2)$ est la restriction à $\mathbb{R}^n$ de la fonction $\exp(-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n (w_j - y_j)^2)$ holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, les propriétés du produit de convolution assurent que les fonctions G_1, G_2, … sont analytiques sur $\mathbb{R}^n$ car elles admettent un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. En fait bien davantage peut être dit.

Notations. Les nombres suivants

$$n_m = \sup_{|\alpha|\leq m} 2^{(m+1)|\alpha|}\,\|\mathrm{D}^\alpha f\|_\Omega\,, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

vont jouer un rôle important.

De plus, afin d'alléger quelque peu les notations, nous posons

$$v_r = u_r\left(f - \sum_{s=0}^{r-1} G_s\right), \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5.3.1 *Pour tous m, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, nous avons*

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{D}^\alpha\bigl(f - \textstyle\sum_{s=0}^{r-1} G_s\bigr)\right\|_\Omega &\leq n_m d_{r,m} 2^{-m|\alpha|}, & (5.1)\\ \|\mathrm{D}^\alpha v_r\|_{\mathbb{R}^n} &\leq n_m d_{r,m}^2 2^{-m|\alpha|}, & (5.2)\\ \|\mathrm{D}^\alpha G_r\|_{\mathbb{R}^n} &\leq n_m d_{r,m}^2 2^{-m|\alpha|}. & (5.3)\end{aligned}$$

Preuve. Tout d'abord nous allons établir par récurrence que pour tous m, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, nous avons

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_r\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_m d_{r,m}^2 (2^{-(m+1)} + \ldots + 2^{-(m+r+1)})^{|\alpha|}. \tag{5.4}$$

Cas $r = 1$.

Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, la définition de n_m conduit à

$$\|\mathrm{D}^\alpha f\|_\Omega \leq n_m 2^{-(m+1)|\alpha|} \tag{5.5}$$

donc, en recourant à la formule de Leibniz, à

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{D}^\alpha v_1\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \left\|\mathrm{D}^\beta u_1\right\|_{\mathbb{R}^n} \left\|\mathrm{D}^{\alpha-\beta} f\right\|_\Omega \\
&\leq n_m d_{1,m} \sum_{\beta \leq \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta 2^{-(m+2)|\beta|} 2^{-(m+1)|\alpha-\beta|} \\
&\leq n_m d_{1,m} (2^{-(m+1)} + 2^{-(m+2)})^{|\alpha|}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

et ainsi, par utilisation d'une propriété classique du produit de convolution, il vient

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_1\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_m d_{1,m} (2^{-(m+1)} + 2^{-(m+2)})^{|\alpha|}. \tag{5.7}$$

Cas $r > 1$.

A présent, supposons que pour un entier $r \geq 2$ et tous $s \in \{1, \ldots, r-1\}$, $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, nous ayons établi que

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_s\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_m d_{s,m}^2 (2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+s+1)})^{|\alpha|}.$$

Alors, pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{D}^\alpha (f - \textstyle\sum_{s=0}^{r-1} G_s)\right\|_\Omega &\leq \|\mathrm{D}^\alpha f\|_\Omega + \sum_{s=1}^{r-1} \|\mathrm{D}^\alpha G_s\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq r n_m d_{r-1,m}^2 (2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+r)})^{|\alpha|} \\
&\leq n_m d_{r,m} (2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+r)})^{|\alpha|}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Cela étant, la formule de Leibniz conduit à

$$\|\mathrm{D}^\alpha v_r\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_m d_{r,m}^2 (2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+r+1)})^{|\alpha|} \tag{5.9}$$

et dès lors il vient

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_r\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_m d_{r,m}^2 (2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+r+1)})^{|\alpha|},$$

et ainsi la récurrence est complète.

Pour conclure, il nous reste alors à constater que (5.1) (resp. (5.2); (5.3)) est une conséquence directe de (5.5) et (5.8) (resp. (5.6) et (5.9); (5.4)).∎

Lemme 5.3.2 *Pour tous m, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$ et x, $y \in \mathbb{R}^n$, nous avons*

$$|\mathrm{D}^\alpha v_r(x) - \mathrm{D}^\alpha v_r(y)| \leq n\,|x-y|\, n_{m+1} d_{r,m+1}^2 2^{-(m+1)(|\alpha|+1)}.$$

Preuve. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, désignons par ϵ_j le j-ème vecteur unité de $\mathbb{N}_0^n$. La formule intégrale de Taylor (cf. Théorème 3.4.4 de [24]) limitée à l'ordre 1 conduit à

$$|\mathrm{D}^\alpha v_r(x) - \mathrm{D}^\alpha v_r(y)| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \left\| \mathrm{D}^{\alpha+\epsilon_j} v_r \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

et nous pouvons conclure aussitôt au moyen de (5.2).∎

Lemme 5.3.3 *Pour tous m, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m < r$, nous avons*

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_r - \mathrm{D}^\alpha v_r\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_{m+1} \varepsilon_r \left(p_{r+1} 2^{2r+2}\right)^{-1}.$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons évidemment

$$|\mathrm{D}^\alpha G_r(x) - \mathrm{D}^\alpha v_r(x)| \leq J_1 + J_2$$

où

$$\begin{aligned} J_1 &= \pi^{-n/2} \lambda_r^n \int_{|x-y| \geq \delta_r} \left(|\mathrm{D}^\alpha v_r(y)| + |\mathrm{D}^\alpha v_r(x)|\right) \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 |x-y|^2}\, dy \\ &\leq 2 n_m d_{r,m}^2 2^{-m|\alpha|} (1 - \Psi(\lambda_r \delta_r)) \quad \leq \quad 2\delta_r n_m d_{r,m}^2 2^{-m|\alpha|} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_2 &= \pi^{-n/2} \lambda_r^n \int_{|x-y| \leq \delta_r} |\mathrm{D}^\alpha v_r(y) - \mathrm{D}^\alpha v_r(x)|\, \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 |x-y|^2}\, dy \\ &\leq n \delta_r n_{m+1} d_{r,m+1}^2 2^{-(m+1)(|\alpha|+1)}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion par recours à la valeur de δ_r puisque nous venons d'établir la majoration

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_r - \mathrm{D}^\alpha v_r\|_{\mathbb{R}^n} \leq 3n\delta_r n_{m+1} d_{r,m+1}^2.$$∎

Lemme 5.3.4 *Pour tous m, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m < r$, nous avons*

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_{r+1}\|_{K_{r+2}} \leq n_{m+1} \varepsilon_r 2^{-(r+1)}.$$

Preuve. Comme la fonction u_r est identique à 1 sur un voisinage de l'ensemble $K_{r+2} \setminus (K_{r+1})^\circ$, le Lemme 5.3.3 conduit directement à l'inégalité auxiliaire suivante

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}^\alpha(f - \textstyle\sum_{s=1}^r G_s)\|_{K_{r+2}\setminus(K_{r+1})^\circ} &= \|\mathrm{D}^\alpha G_r - \mathrm{D}^\alpha v_r\|_{K_{r+2}\setminus(K_{r+1})^\circ} \\ &\leq n_{m+1}\varepsilon_r \left(p_{r+1}2^{2r+2}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dès lors, en recourant à la formule de Leibniz, cette forrmule (5.10) conduit à

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}^\alpha v_{r+1}\|_{K_{r+2}\setminus(K_{r+1})^\circ} &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta d_{r+1,m} 2^{-(m+r+2)|\beta|} n_{m+1}\varepsilon_r \left(p_{r+1}2^{2r+2}\right)^{-1} \\ &\leq n_{m+1}\varepsilon_r 2^{-(r+2)}. \end{aligned}$$

A présent, comme la fonction u_{r+1} s'annule identiquement sur un voisinage de K_{r+1}, ces inégalités sont en fait valables sur K_{r+2}. Dès lors, le Lemme 5.3.3 conduit à

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}^\alpha G_{r+1}\|_{K_{r+2}} &\leq \|\mathrm{D}^\alpha G_{r+1} - \mathrm{D}^\alpha v_{r+1}\|_{\mathbb{R}^n} + \|\mathrm{D}^\alpha v_{r+1}\|_{K_{r+2}} \\ &\leq n_{m+1}\varepsilon_r 2^{-(r+1)}.\blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 5.3.5 *Pour toute partie compacte K de Ω et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, la série $\sum_{r=1}^\infty \|\mathrm{D}^\alpha G_r\|_K$ converge.*

Dès lors, la série $G = \sum_{r=1}^\infty G_r$ définit une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et peut être dérivée terme à terme..

Preuve. De fait, si nous choisissons m, $r \in \mathbb{N}$ tels que $|\alpha| \leq m < r$ et $K \subset K_r$, le Lemme 5.3.4 conduit à

$$\|\mathrm{D}^\alpha G_{r+p}\|_K \leq \|\mathrm{D}^\alpha G_{r+p}\|_{K_{r+p+1}} \leq n_{m+1}\varepsilon_{r+p-1}2^{-(r+p)}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'où la conclusion.$\blacksquare$

Lemme 5.3.6 *Pour tous m, $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m < r$, nous avons*

$$\|\mathrm{D}^\alpha G - \mathrm{D}^\alpha f\|_{\Omega\setminus K_{r+1}} \leq n_{m+1}\varepsilon_r.$$

Preuve. Soit x un élément quelconque de $\Omega \setminus K_{r+1}$. Désignons alors par q le premier entier positif tel que $x \in K_{r+q}$; bien sûr, nous avons $q \geq 2$. Dès lors, d'une part, le Lemme 5.3.4 conduit à

$$|\mathrm{D}^\alpha G_{r+s}(x)| \leq n_{m+1}\varepsilon_{r+s-1}2^{-(r+s)}$$

pour tout entier $s \geq q-1$. D'autre part, l'inégalité auxiliaire (5.10) conduit à

$$\left|\mathrm{D}^\alpha\big(f(x) - \textstyle\sum_{s=1}^{r+q-2} G_s(x)\big)\right| \leq n_{m+1}\varepsilon_{r+q-2}2^{-(2r+q)}.$$

Finalement nous arrivons à

$$|\mathrm{D}^\alpha G(x) - \mathrm{D}^\alpha f(x)| \leq n_{m+1}\varepsilon_{r+q-2}2^{-(2r+q)} + n_{m+1}\varepsilon_r 2^{-r} \leq n_{m+1}\varepsilon_r.\blacksquare$$

Proposition 5.3.7 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_m > 0$ indépendante de f telle que*
$$\sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha G\|_\Omega \leq C_m n_{m+1}.$$

Preuve. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$. D'une part, pour tout $x \in K_{m+2}$, la formule (5.3) et le Lemme 5.3.4 conduisent à

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}^\alpha G(x)| &\leq \sum_{r=1}^{m+1} \|\mathrm{D}^\alpha G_r\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{r=m+2}^{\infty} |\mathrm{D}^\alpha G_r(x)| \\ &\leq \sum_{r=1}^{m+1} n_m d_{r,m}^2 2^{-m|\alpha|} + \sum_{r=m+2}^{\infty} n_{m+1}\varepsilon_{r-1}2^{-r} \\ &\leq (\textstyle\sum_{r=1}^{m+1} d_{r,m}^2 + 1) n_{m+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \Omega \setminus K_{m+2}$, le Lemme 5.3.6 conduit à

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}^\alpha G(x)| &\leq |\mathrm{D}^\alpha G(x) - \mathrm{D}^\alpha f(x)| + |\mathrm{D}^\alpha f(x)| \\ &\leq n_{m+1}\varepsilon_{m+1} + n_m 2^{-(m+1)|\alpha|} \quad \leq \quad 2n_{m+1}. \end{aligned}$$

Cela étant, nous pouvons poser $C_m = \sum_{r=1}^{m+1} d_{r,m}^2 + 2.$ ∎

Proposition 5.3.8 *La fonction G a une extension holomorphe sur l'ouvert Ω^*. En particulier, la fonction G est analytique sur Ω.*
De plus, pour tout compact $H \subset \Omega^*$, il existe une constante $C_H > 0$, indépendante de f, telle que $\|G\|_H \leq C_H \|f\|_{\Omega,1}$.

Preuve. Pour toute partie compacte H de Ω^*, nous savons (cf. la fin de la preuve de la Proposition 3.5.3) qu'il est aisé d'établir par contradiction l'existence d'un entier $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\delta^2 = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{n}((u_j - y_j)^2 - v_j^2) : u, v, y \in \mathbb{R}^n; u + iv \in H; y \notin K_{r_0} \right\} > 0.$$

Dès lors pour tout entier $r > \sup\{r_0, \delta^{-1}\}$ et tout point $w = u + iv$ de H tel que u, $v \in \mathbb{R}^n$, la formule (5.2) de la Proposition 5.3.1 conduit à

$$\begin{aligned} |G_r(w)| &= \left| \pi^{-n/2}\lambda_r^n \int_{\mathbb{R}^n} v_r(y) \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n (w_j - y_j)^2} \, dy \right| \\ &\leq \pi^{-n/2}\lambda_r^n \|v_r\|_{\mathbb{R}^n} \int_{K_{r+3}\setminus K_r} \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - y_j)^2 - v_j^2)} \, dy \\ &\leq \pi^{-n/2}\lambda_r^n n_1 p_r^2 \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 r^{-2}} \ \mathrm{mes}(K_{r+3}). \end{aligned}$$

Nous avons donc $\|G_r\|_H \leq n_1 2^{-r}$ vu la définition même de λ_r. De la sorte, la série $\sum_{r=1}^{\infty} G_r$ converge absolument et uniformément sur H; elle représente donc une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω^* car chacune des fonctions $G_r(w)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$.

Soit ensuite r_1 un entier strictement supérieur à $\sup\{r_0, \delta^{-1}$. Vu la première partie de cette preuve, nous avons déjà

$$\sum_{r=r_1}^{\infty} \|G_r\|_H \leq n_1 2^{-r_1+1}.$$

De plus, pour tout entier $r \in \{1, \ldots, r_1 - 1\}$, si nous posons

$$C_r = \sup_{\substack{u+iv \in H \\ y \in K_{r+3}}} \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - y_j)^2 - v_j^2},$$

nous obtenons

$$\|G_r\|_H \leq \|v_r\|_{\mathbb{R}^n} \, \pi^{-n/2} \lambda_r^n C_r \mathrm{mes}(K_{r+3})$$

avec $\|v_r\|_{\mathbb{R}^n} \leq n_1 d_{r,1}^2$, en recourant à la définition de G_r. D'où la conclusion en recourant à la définition de n_1.

D'où la conclusion.▮

5.4 Le théorème d'approximation au bord

Théorème 5.4.1 (Whitney, 1934, [28]) *Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur linéaire continu*

$$T_\Omega \colon \mathcal{BC}^\infty(\Omega) \to \mathcal{BC}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega^*)$$

tel que, pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de Ω telle que

$$\sup_{|\alpha| \leq m} \|\mathrm{D}^\alpha f - \mathrm{D}^\alpha (T_\Omega f)\|_{\Omega \setminus K} \leq \varepsilon.$$

Preuve. Pour tout $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, il suffit de définir $T_\Omega f$ comme étant la série $G = \sum_{r=1}^{\infty} G_r$ sur Ω^*. En effet,
(1) la Propositions 5.3.5 assure que G appartient à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et la Proposition 5.3.7 précise que $T_\Omega f$ appartient à $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.
(2) la Proposition 5.3.8 affirme que G est holomorphe sur Ω^*.
(3) la linéarité de l'opérateur T_Ω ainsi introduit découle aussitôt de la construction des G_r donc de G. Sa continuité à valeurs dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ résulte aussitôt de la Proposition 5.3.7; celle à valeurs dans $\mathcal{O}(\Omega^*)$ de la Proposition 5.3.8.

La propriété d'approximation au bord a été obtenue au Lemme 5.3.6.▮

5.5 Théorèmes d'extension, cas compact, [28]

Théorème 5.5.1 *Soit φ un jet de Whitney sur le compact non vide K de $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Pour tout compact H de $\mathbb{R}^n$ tel que $K \subset H^\circ$, φ vient d'une fonction f appartenant à $\mathcal{D}^\infty(H) \cap \mathcal{O}((H^\circ \setminus K)^*)$; en particulier, f est analytique sur $H^\circ \setminus K$.*

(b) *Le jet φ vient d'une fonction f appartenant à $\mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}((\mathbb{R}^n \setminus K)^*)$; en particulier, f est analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus K$.*

Preuve. Vu le théorème de Whitney, $\boldsymbol{\varphi}$ vient d'une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

a) Soit h un élément de $\mathcal{D}^\infty(H)$ identique à 1 sur un voisinage de K. Comme $\boldsymbol{\varphi}$ vient aussi de hg, le théorème d'approximation au bord permet de vérifier directement que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n \cup (H^\circ \setminus K)^*$ selon

$$f(z) = \begin{cases} \varphi_0(z) & \text{si} \quad z \in K \\ \big(T_{H^\circ \setminus K}(hg)|_{H^\circ \setminus K}\big)(z) & \text{si} \quad z \in H^\circ \setminus K, \\ 0 & \text{si} \quad z \in \mathbb{R}^n \setminus H^\circ, \end{cases}$$

convient.

b) Soit h un élément de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ identique à 1 sur un voisinage de K. Comme $\boldsymbol{\varphi}$ vient aussi de hg et comme hg appartient évidemment à $\mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$, le théorème d'approximation au bord permet de vérifier directement que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)^*$ selon

$$f(z) = \begin{cases} \varphi_0(z) & \text{si} \quad z \in K \\ \big(T_{\mathbb{R}^n \setminus K}(hg)|_{\mathbb{R}^n \setminus K}\big)(z) & \text{si} \quad z \in (\mathbb{R}^n \setminus K)^*, \end{cases}$$

convient.∎

Théorème 5.5.2 *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension E de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors*
(a) *pour tout compact H de $\mathbb{R}^n$ tel que $K \subset H^\circ$, il existe un opérateur linéaire continu d'extension*

$$E_1 \colon \mathcal{E}(K) \to \mathcal{D}^\infty(H) \cap \mathcal{O}((H^\circ \setminus K)^*);$$

en particulier, les images de E_1 sont analytiques sur $H^\circ \setminus K$.
(b) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension*

$$E_2 \colon \mathcal{E}(K) \to \mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}((\mathbb{R}^n \setminus K)^*);$$

en particulier, les images de E_2 sont analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Preuve. On vérifie directement qu'il suffit de remplacer f par $E\varphi$ dans la preuve précédente.∎

Remarque. Si F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, dont le complémentaire est borné, et si E est un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a bien sûr

$$\{\, (E\varphi)|_{\mathbb{R}^n \setminus F} : \varphi \in \mathcal{E}(F) \,\} \subset \mathcal{BC}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$$

car $(\mathbb{R}^n \setminus F)^-$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Cette considération et la preuve du cas (b) du théorème précédent conduit alors aussitôt au résultat suivant.□

Théorème 5.5.3 *Soit F un fermé propre de $\mathbb{R}^n$, dont le complémentaire est borné.*

S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, il en existe également un de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}((\mathbb{R}^n \setminus F)^*)$.∎

5.6 Théorème d'extension, cas fermé, [12]

Définition. Un fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ *vérifie la condition* (FV) de Frerick-Vogt si, pour tout borné B de $\mathbb{R}^n$, la frontière de la réunion des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus F$ d'intersection non vide avec B est compacte.

Remarque. *Tout fermé propre F de $\mathbb{R}$ vérifie la condition* (FV). De fait, les composantes connexes de $\mathbb{R} \setminus F$ étant des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, on vérifie de suite que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la frontière de la réunion des composantes connexes de $\mathbb{R} \setminus F$ qui rencontrent $[-m, m]$ est soit vide, soit un singleton, soit un ensemble de deux points.□

Remarque. *Tout compact non vide de $\mathbb{R}^n$ vérifie la condition* (FV).□

Remarque. *Tout fermé propre F de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est borné vérifie la condition* (FV).□

Remarque. *Si le fermé propre et non compact F de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ vérifie la condition* (FV)*, alors chacune des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus F$ est bornée.* Cela résulte aisément du théorème du passage des douanes: si la composante connexe Ω de $\mathbb{R}^n \setminus F$ n'est pas bornée, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une courbe incluse dans $\{\, x : |x| \geq m \,\}$ dont les extrémité appartiennent à F et à Ω respectivement. La courbe étant connexe, elle doit contenir un point de la frontière de Ω; de la sorte, la frontière de Ω ne peut être compacte.□

Notations. Afin d'alléger les écritures, convenons d'abréger "composante connexe" en "c.c." dans la définition des ouverts Ω_j qui suit et où, pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous posons $B_m = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \, |x| \leq m \,\}$.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, nous introduisons les ouverts Ω_j au moyen de la récurrence suivante: comme point de départ, nous posons

$$\Omega_1 := \cup\{\omega \colon \omega = \text{c.c. de } \Omega, \omega \cap B_1 \neq \emptyset\},$$

puis nous utilisons la règle de récurrence

$$\Omega_j := \cup\{\omega \colon \omega = \text{c.c. de } \Omega, \omega \cap B_j \neq \emptyset, \omega \cap (\cup_{k=1}^{j-1}\Omega_k) = \emptyset\}$$

pour $j = 2, 3, \ldots$ et nous posons $J := \{j \in \mathbb{N} \colon \Omega_j \neq \emptyset\}$.

Théorème 5.6.1 (Frerick-Vogt, 2001, [12]) *Soit F un fermé propre de $\mathbb{R}^n$.*
S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension E de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, les assertions suivantes sont équivalentes:
(a) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension E_1 de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont les images sont analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus F$;*
(b) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension*

$$E_2 \colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}((\mathbb{R}^n \setminus F)^*);$$

en particulier, les images de E_2 sont analytiques sur $\mathbb{R}^n \setminus F$;
(c) *le fermé F vérifie la condition* (FV).

Preuve. (b) $\Rightarrow$ (a) est trivial.
(a) $\Rightarrow$ (c). Si ce n'est pas le cas, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que la frontière de

$$\omega_r = \cup\{\omega \colon \omega = \text{ c.c. de } \Omega, \omega \cap B_r \neq \emptyset\}$$

n'est pas bornée. Comme $\|\cdot\|_{B_r}$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, la continuité de l'opérateur linéaire d'extension E_1 assure l'existence d'un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > r$ et

$$\|E_1\varphi\|_{B_r} \leq m \, \|\varphi\|_{m,K_m}\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(F),$$

où $\|\cdot\|_{m,K_m}$ désigne la m-ème semi-norme continue de $\mathcal{E}(F)$. A présent, nous choisissons un point $x_0 \in (\partial_{\mathbb{R}^n}\omega_r) \setminus B_{m+1}$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $g(x_0) = 1$ et $g \equiv 0$ sur B_m. Cela étant, considérons enfin le jet $\varphi = ((\mathrm{D}^\alpha g)|_F)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$; il s'agit bien sûr d'un jet de Whitney sur F. D'une part, comme nous avons $\|\varphi\|_{m,K_m} = 0$, $E_1\varphi$ est identiquement nul sur B_r; par analyticité, $E_1\varphi$ est aussi identiquement nul sur ω_r. D'autre part, $E_1\varphi$ prend la valeur 1 en x_0. D'où une contradiction.

(c) $\Rightarrow$ (b). Si F est compact ou si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est borné, nous pouvons recourir aux théorèmes du paragraphe précedent.

Si F n'est pas compact et si $\mathbb{R}^n \setminus F$ n'est pas borné, nous procédons comme suit.

Si $n \geq 2$, comme F n'est pas compact, la condition (c) implique que toutes les composantes connexes de $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus F$ sont bornées et même que, pour tout $j \in J$, Ω_j est borné; on a donc $E\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$ pour tout $j \in J$. De plus, comme Ω n'est pas borné, l'ensemble J est infini. Si $n = 1$, comme F n'est pas compact, la condition (c) implique que Ω a au plus une composante connexe non bornée: elle est du type $]-\infty, a[$ ou du type $]b, +\infty[$. Nous choisissons alors une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ identique à 1 sur un voisinage de $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ et à 0 sur $]-\infty, a-1]$ ou $[b+1, +\infty[$ respectivement et vérifions que

$$E_2 \colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad \varphi \mapsto g.E\varphi$$

est un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.

De la sorte, à une substitution près, nous pouvons supposer que, pour tout $j \in J$, $(E\cdot)|_{\Omega_j}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$.

Maintenant nous appliquons le théorème d'approximation pour tout $j \in J$ et obtenons des opérateurs T_{Ω_j} de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$ dans lui-même, à images admettant des prolongements holomorphes sur Ω_j^*, tels que pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$, $\varepsilon > 0$ et $s \in \mathbb{N}$, il existe un compact K_j inclus dans Ω_j tel que

$$\left| \mathrm{D}^\alpha(T_{\Omega_j} f)(x) - \mathrm{D}^\alpha f(x) \right| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in \Omega_j \setminus K_j$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\alpha| \leq s$.

A tout jet $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(F)$, nous associons alors la fonction $E_1\boldsymbol{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$(E_1\boldsymbol{\varphi})(x) := \begin{cases} \varphi_0(x), & \forall x \in F, \\ T_{\Omega_j}((E\boldsymbol{\varphi})|_{\Omega_j})(x), & \forall x \in \Omega_j, \forall j \in J. \end{cases}$$

On vérifie alors directement que E_1 est un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}((\mathbb{R}^n \setminus F)^*)$ si on remarque que tout compact de $(\mathbb{R}^n \setminus F)^*$ est inclus dans une union finie de Ω_j.

D'où la conclusion.∎

Chapitre 6

Existence d'opérateurs linéaires continus d'extension holomorphe, [29]

6.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous mettons au point des résultats qui tiennent compte du fait que le théorème d'approximation s'applique à des éléments de l'espace $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$. Les éléments de l'espace de départ sont bornés ainsi que leurs dérivées sur Ω, la topologie étant de convergence uniforme. Cela étant, y a-t-il moyen de mettre une convergence uniforme sur l'espace des fonctions holomorphes d'arrivée? La solution va nous amener à remplacer l'ouvert Ω^* par un ouvert D_Ω.

6.2 Construction de l'ouvert D_Ω of $\mathbb{C}^n$

Etant donné un ouvert proper Ω de $\mathbb{R}^n$, la construction de l'ouvert D_Ω de $\mathbb{C}^n$ provient d'un raffinement de la construction de la suite $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{N}}$ effectuée dans le chapitre précédent.

Afin d'être clair et complet, nous allons donner cette construction de manière explicite bien qu'elle "ne soit qu'une précision" de la précédente. Une raison assez impérieuse nous suggérant d'agir de la sorte est notre souhait de pouvoir utiliser les inégalités obtenues au chapitre précédent et qui recourent aux nombres λ_r, afin d'améliorer les résultats obtenus sur l'espace $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.

Nous fixons un recouvrement compact $\{K_r : r \in \mathbb{N}\}$ de Ω soumis aux conditions suivantes: $(K_1)^\circ \neq \emptyset$, $d(K_1, \partial\Omega) < 1$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $(K_r)^{\circ,-} = K_r \subset (K_{r+1})^\circ$

ainsi que

$$\eta_r := d(K_r, \mathbb{R}^n \setminus K_{r+1}) > \tfrac{1}{2} d(K_r, \partial\Omega).$$

Bien sûr la suite $(\eta_r)_{r\in\mathbb{N}}$ décroît strictement vers 0 avec $\eta_1 < 1$.

Ensuite, pour tout $r \in \mathbb{N}$, a_r désigne un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, identique à 1 sur un voisinage de $K_{r+2} \setminus (K_{r+1})^\circ$ et ayant son support inclus dans $(K_{r+3})^\circ \setminus K_r$.

Cela étant, pour tous r, $m \in \mathbb{N}$, nous choisissons $d_{r,m} > 1$ tel que

$$\begin{aligned}(r+1)d_{r,m}^2 &< d_{r+1,m},\\ d_{r,m} &< d_{r,m+1},\\ \sup_{|\alpha|\leq m} 2^{(m+r+1)|\alpha|} \left\|\mathrm{D}^\alpha a_r\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq d_{r,m}.\end{aligned}$$

Enfin, en recourant à la formule de Poisson, remarquons que

$$\Phi(\rho) := \pi^{-n/2} \int_{|y|\leq\rho} \mathrm{e}^{-|y|^2}\, dy \uparrow 1$$

si $\rho > 0$ croît vers $+\infty$.

Dès lors, si nous posons $p_r = d_{r,r}$, $\varepsilon_r = 2^{-rp_{r+2}}$ et $\delta_r = \varepsilon_r(3np_r^2 p_{r+1} 2^{2r+2})^{-1}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, nous pouvons fixer une suite strictement croissante $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs en procédant comme suit.

Nous choisissons $\lambda_1 > 1$ vérifiant les conditions ci-dessous pour autant qu'elles s'appliquent à λ_1 et ensuite les nombres λ_2, λ_3, ... successivement, soumis aux conditions ci-dessous:

(1) $p_r^2(1 - \Phi(\lambda_r\delta_r)) < \delta_r$;
(2) $\pi^{-n/2}\lambda_r^n \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 r^{-2}} p_r^2 \mu(K_{r+3}) < 2^{-r}$, où μ désigne la mesure de Lebesgue;
(3) $\lambda_r^{-1} 2^{n+2} \pi^{-n/2} p_r^2 (1 + \mu(K_{r+3})) \leq 2^{-r}$;
(4) $\lambda_{r+1}^{-1} < \mathrm{d}(K_r, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$;
(5) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_r} \leq \lambda_r^{-(n+1)}$;
(6) $\lambda_r(\eta_p^2 - \lambda_{p+1}^{-2}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout $p \in \{1, \ldots, r-1\}$;
(7) $\lambda_{r+1}^{-n} \leq \lambda_r^{-(n+1)}$;
(8) $\mathrm{e}^{\lambda_r^2\lambda_{r+1}^{-2}} - 1 \leq \lambda_r^{-(n+1)}$;
(9) pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous posons $R_p = \sup\{|u| : u \in K_p\}$ et, si λ_1, ..., λ_p sont fixés, nous choisissons tout d'abord $\Theta_p > 0$ tel que $\left|\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| \leq \lambda_p^{-(n+1)}$ pour tout $\theta \in [-\Theta_p, \Theta_p]$ et imlposons ensuite $4\lambda_p^2\lambda_r^{-1}R_{r+2} \leq \Theta_p$ pour tout $r > p$.

Remarquons que les conditions (1) et (2) coïncident avec les conditions imposées au chapitre précédent dans la définition de la suite $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{N}}$. De la sorte, toutes les inégalités établies au chapitre précédent, qui font appel à ces nombres, subsistent dans notre nouveau contexte.

Définition. Nous avons ainsi à notre disposition tous les éléments nécessaires pour introduire l'ouvert D_Ω de $\mathbb{C}^n$ comme étant l'intérieur de l'ensemble

$$\bigcup_{r=0}^{\infty}\{u+iv\colon u\in K_{r+1}\setminus K_r, v\in\mathbb{R}^n, |v|<\lambda_{r+2}^{-1}\}$$

où nous avons posé $K_0 := \emptyset$.

La condition (4) a été imposée afin d'avoir $D_\Omega \subset \Omega^*$.

6.3 Résultat auxiliaire sur $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$

Tout comme au chapitre précédent, à tout $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, nous associons la suite $(G_r(\cdot, f))_{r\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{C}^n$ au moyen de la récurrence suivante: comme point de départ, nous posons $G_0(w, f) = 0$ puis utilisons la règle de récurrence suivante:

$$G_r(w,f) = \pi^{-n/2}\lambda_r^n \int_{\mathbb{R}^n} a_r(y)\Big(f(y) - \sum_{j=1}^{r-1} G_j(y,f)\Big)\mathrm{e}^{-\lambda_r^2\sum_{j=1}^n (w_j-y_j)^2}\,dy$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $w \in \mathbb{C}^n$.

Comme les fonctions $a_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ont un support compact inclus dans Ω, la définition de ces fonctions est assurée et en fait, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $G_r(\cdot, f)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. De plus nous avons

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}^\alpha G_r(w,f)\\ &= \pi^{-n/2}\lambda_r^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{D}^\alpha\left(a_r(y)\Big(f(y) - \sum_{j=1}^{r-1} G_j(y,f)\Big)\right)\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_r^2\sum_{j=1}^n (w_j-y_j)^2}\,dy\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et tout $r \in \mathbb{N}$.

Notre première tâche consiste à estimer $|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u, f)|$ pour tous $u + iv \in D_\Omega$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et $r \in \mathbb{N}$. En recourant à l'inégalité 5.1 de la Proposition 5.3.1, nous obtenons évidemment

$$|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv,f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u,f)| \le \pi^{-n/2}\lambda_r^n \cdot d_{r,m}^2 2^{-m|\alpha|}\,\|f\|_m \cdot I_r$$

pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ vérifiant $|\alpha| \le m$, avec

$$I_r := \sup_{u+iv\in D} \int_{K_{r+3}\setminus K_r} \left|\mathrm{e}^{-\lambda_r^2\sum_{j=1}^n (u_j+iv_j-y_j)^2} - \mathrm{e}^{-\lambda_r^2\sum_{j=1}^n (u_j-y_j)^2}\right|\,dy.$$

Lemme 6.3.1 *Nous avons* $I_1 \leq (1 + \mathrm{e})\mu(K_4)$ *et*

$$I_r \leq 2^{n+2}(1 + \mu(K_{r+3}))\lambda_r^{-(n+1)}, \quad \forall r \in \{2, 3, \ldots\}.$$

Preuve. L'estimation de I_1 est une conséquence directe des inégalités

$$\left|\mathrm{e}^{-\lambda_1^2 \sum_{j=1}^n (u_j + iv_j - y_j)^2}\right| \leq \mathrm{e}^{\lambda_1^2 |v|^2} \leq \mathrm{e}^{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2}} \leq \mathrm{e}$$

et

$$\mathrm{e}^{-\lambda_1^2 \sum_{j=1}^n (u_j - v_j)^2} \leq 1.$$

Le cas $r \geq 2$ nécessite davantage de soin. Etablissons tout d'abord quelques évaluations de

$$X := \lambda_r^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - y_j)^2 - v_j^2) = \lambda_r^2(|u - y|^2 - |v|^2).$$

a) Si u appartient à K_1, la condition (6) mentionnée dans la définition des nombres λ_r conduit à

$$X \geq \lambda_r^2(d^2(K_1, \mathbb{R}^n \setminus K_r) - |v|^2) \geq \lambda_r^2(\eta_1^2 - \lambda_2^{-2}) \geq \tfrac{1}{2}\lambda_r.$$

b) Si u n'appartient pas à K_1, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ unique tel que u appartienne à $K_{p+1} \setminus K_p$ et nous distinguons les deux possibilités suivantes:
b.1) si $p + 1 \leq r - 1$, la condition (6) procure

$$X \geq \lambda_r^2(d^2(K_{p+1}, \mathbb{R}^n \setminus K_r) - \lambda_{p+2}^{-2}) \geq \lambda_r^2(\eta_{p+1}^2 - \lambda_{p+2}^{-2}) \geq \tfrac{1}{2}\lambda_r;$$

b.2) si $p + 1 \geq r$, alors nous posons

$$J_r := \prod_{j=1}^n [u_j - \lambda_{r+1}^{-1}, u_j + \lambda_{r+1}^{-1}]$$

et obtenons successivement
b.2.i) si $y \in J_r$: $X \geq -\lambda_r^2 \lambda_{p+2}^{-2} \geq -1$;
b.2.ii) si $y \notin J_r$: comme $y \in K_{r+3}$, les conditions (8) et (9) donnent

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{e}^{-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n (u_j + iv_j - y_j)^2} - \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n (u_j - y_j)^2}\right| \\
&\leq \left|\mathrm{e}^{\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n (v_j^2 - 2iv_j(u_j - y_j))} - 1\right| \leq \mathrm{e}^{\lambda_r^2 |v|^2} \left|\mathrm{e}^{-2i\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n v_j(u_j - y_j)} - 1\right| + (\mathrm{e}^{\lambda_r^2 |v|^2} - 1) \\
&\leq \mathrm{e}\lambda_r^{-(n+1)} + \lambda_r^{-(n+1)} \leq 2^2 \lambda_r^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

puisque

$$\left|2i\lambda_r^2 \sum_{j=1}^{n} v_j(u_j - y_j)\right| \leq 2\lambda_r^2 |v| |u-y| \leq 4\lambda_r^2 \lambda_{p+2}^{-1} R_{p+4} \leq \Theta_r.$$

Cela étant
a) si $u \in K_1$ ou si $u \in K_{p+1} \setminus K_p$ avec $p+1 \leq r-1$, la condition (5) donne

$$\begin{aligned} I_r &\leq 2 \int_{K_{r+3}\setminus K_r} \mathrm{e}^{-\lambda_r^2 \sum_{j=1}^n ((u_j-y_j)^2 - v_j^2)}\, dy \\ &\leq 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_r} \mu(K_{r+3}) \leq 2\lambda_r^{-(n+1)} \mu(K_{r+3}); \end{aligned}$$

b) si $u \in K_{p+1} \setminus K_p$ avec $p+1 \geq r$, la condition (7) conduit à

$$\begin{aligned} I_r &\leq \int_{(K_{r+3}\setminus K_r)\setminus J_r} + \int_{(K_{r+3}\setminus K_r)\cap J_r} \cdots \\ &\leq 2^2 \lambda_r^{-(n+1)} \mu(K_{r+3}) + (\mathrm{e}+1)\mu(J_r) \\ &\leq 2^2 \lambda_r^{-(n+1)} \mu(K_{r+3}) + 2^2 2^n \lambda_{r+1}^{-n} \leq 2^{n+2} \lambda_r^{-(n+1)} (1 + \mu(K_{r+3})). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 6.3.2 a) *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que*

$$|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u, f)| \leq C_m 2^{-m|\alpha|} \|f\|_m$$

pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $u+iv \in D_\Omega$, $r \in \{1, \ldots, m\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$.

b) *Pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, m, $r \in \mathbb{N}$, $u+iv \in D_\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, nous avons*

$$|\mathrm{D}^\alpha G_{m+r}(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_{m+r}(u, f)| \leq 2^{-(m+r)} 2^{-m|\alpha|} \|f\|_m .$$

Preuve. a) De fait, pour $r = 1$, le Lemme 6.3.1 conduit immédiatement à

$$\begin{aligned} &|\mathrm{D}^\alpha G_1(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_1(u, f)| \\ &\qquad \leq \pi^{-n/2} \lambda_1^n \cdot d_{1,m}^2 2^{-m|\alpha|} \|f\|_m \cdot (1+\mathrm{e})\mu(K_4) \end{aligned}$$

et, pour $r \in \{2, \ldots, m\}$, il conduit à

$$\begin{aligned} &|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u, f)| \\ &\qquad \leq \lambda_r^{-1} (1 + \mu(K_{r+3})) \cdot \pi^{-n/2} p_m^2 2^{n+2} \cdot 2^{-m|\alpha|} \|f\|_m . \end{aligned}$$

b) Cette fois également, le recours au Lemme 6.3.1 conduit à

$$\begin{aligned} &|\mathrm{D}^\alpha G_{m+r}(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_{m+r}(u, f)| \\ &\qquad \leq \lambda_{m+r}^{-1} \pi^{-n/2} 2^{n+2} (1 + \mu(K_{m+r+3})) p_{m+r}^2 \cdot 2^{-m|\alpha|} \|f\|_m \end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit aussitôt par utilisation de la condition (3) de la définition des nombres λ_r. $\blacksquare$

6.4 Le nouveau théorème d'approximation

Posons à présent $G(u+iv,f) = \sum_{r=0}^{\infty} G_r(u+iv,f)$ pour tout $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ et tout $u+iv \in \Omega^*$. Vu la Proposition 5.3.8, nous savons déjà que $G(\cdot,f)$ est une fonction holomorphe sur Ω^* donc sur D_Ω. En fait, la situation est bien plus intéressante.

Définition. Si U est un ouvert propre de $\mathbb{C}^n$, *l'espace de Fréchet* $\mathcal{O}_\infty(U)$ est l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur U, qui sont bornées sur U ainsi que chacune de leurs dérivées, muni de la topologie localement convexe provenant du système de semi-normes $\{\, \|\cdot\|_m : m \in \mathbb{N}\,\}$ où

$$\|f\|_m := \sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_U\,.$$

Tout est maintenant en place pour obtenir un nouveau théorème d'approximation, véritable clef pour les résultats que nous avons en vue.

Théorème 6.4.1 *Il existe un opérateur linéaire continu*

$$T_\Omega \colon \mathcal{BC}^\infty(\Omega) \to \mathcal{O}_\infty(D_\Omega)$$

tel que, pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ *et* $s \in \mathbb{N}$, *il existe une partie compacte* K *de* Ω *telle que*

$$|\mathrm{D}^\alpha(T_\Omega f)(u+iv) - \mathrm{D}^\alpha f(u)| \leq \varepsilon$$

pour tous $u+iv \in D_\Omega$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *tels que* $u \in \Omega \setminus K$ *et* $|\alpha| \leq s$.

Preuve. En fait, il suffit de poser $(T_\Omega f)(u+iv) = G(u+iv,f)$ pour tout $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ et tout $u+iv \in D_\Omega$.

Nous savons déjà que, pour tout $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $G(\cdot,f)$ est une fonction holomorphe sur Ω^* donc sur D_Ω, vu la Proposition 5.3.8. De plus, il est clair que la construction de $G(\cdot,f)$ dépend linéairement de f. Comme, pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $u+iv \in D_\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}^\alpha G(u+iv,f)| &\leq |\mathrm{D}^\alpha G(u,f)| + \sum_{r=1}^{m} |\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv,f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u,f)| \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\infty} |\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv,f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u,f)| \\
&\leq c_m \|f\|_{m+1} + mC_m 2^{-m|\alpha|} \|f\|_m + 2^{-m}2^{-m|\alpha|} \|f\|_m \\
&\leq (c_m + mC_m + 2^{-m}) \|f\|_{m+1}
\end{aligned}$$

en recourant à la Proposition 5.3.7 et à la Proposition 6.3.2 pour obtenir la deuxième inégalité, nous avons déjà établi que T_Ω est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_\infty(D_\Omega)$.

Etablissons à présent la deuxième partie de l'énoncé: supposons $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ et $s \in \mathbb{N}$ fixés.

La partie b) de la Proposition 6.3.2 conduit à

$$|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv,f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u,f)| \leq 2^{-r}2^{-s|\alpha|}\,\|f\|_s$$

pour tous $u+iv \in D_\Omega$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $r \geq s+1$ et $|\alpha| \leq s$. Dès lors il est possible de fixer un entier $m \geq s$ tel que

$$\sum_{r=m+1}^{\infty} |\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv,f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u,f)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tous $u+iv \in D_\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq s$.

Comme la suite $(\varepsilon_r)_{r\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, le Lemme 5.3.6 procure alors l'existence d'un entier $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\mathrm{D}^\alpha G(u,f) - \mathrm{D}^\alpha f(u)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tous $u \in \Omega \setminus K_{d_0}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $|\alpha| \leq s$.

A présent, procédons à l'évaluation de

$$|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv,f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u,f)|$$

pour tous $r \in \{1,\ldots,m\}$, $u+iv \in D_\Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $u \in \Omega \setminus K_d$ avec $d \geq d_0$ et $|\alpha| \leq s$. Nous savons déjà que cette expression est

$$\leq \pi^{-n/2}\lambda_r^n \cdot d_{r,s}^2 2^{-s|\alpha|}\,\|f\|_s \cdot I_{r,u+iv} \leq \pi^{-n/2}\lambda_m^n \cdot p_m^2 2^{-s|\alpha|}\,\|f\|_s \cdot I_{r,u+iv}$$

avec

$$\begin{aligned} I_{r,u+iv} &:= \int_{K_{r+3}\setminus K_r} \mathrm{e}^{-\lambda_r^2|u-y|^2} \left|\mathrm{e}^{\lambda_r^2\sum_{j=1}^n (v_j^2 - 2iv_j(u_j-y_j))} - 1\right| dy \\ &\leq \int_{K_{r+3}\setminus K_r} \left|\mathrm{e}^{\lambda_r^2|v|^2}\mathrm{e}^{-2i\lambda_r^2\sum_{j=1}^n v_j(u_j-y_j)} - 1\right| dy. \end{aligned}$$

Pour $u+iv \in D_\Omega$ tel que $u \in K_{d+1} \setminus K_d$ avec $d \geq \sup\{m+2, d_0\}$, il vient

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{e}^{\lambda_r^2|v|^2}\mathrm{e}^{-2i\lambda_r^2\sum_{j=1}^n v_j(u_j-y_j)} - 1\right| \\ &\qquad \leq \mathrm{e}^{\lambda_r^2\lambda_{d+2}^{-2}} \left|\mathrm{e}^{-2i\lambda_r^2\sum_{j=1}^n v_j(u_j-y_j)} - 1\right| + (\mathrm{e}^{\lambda_r^2\lambda_{d+2}^{-2}} - 1) \end{aligned}$$

avec $\exp(\lambda_r^2\lambda_{d+2}^{-2}) \leq \mathrm{e}$ et $\exp(\lambda_r^2\lambda_{d+2}^{-2}) - 1 \to 0$ si $d \to \infty$. De plus, nous avons

$$\left|2\lambda_r^2 \sum_{j=1}^{n} v_j(u_j - y_j)\right| \leq 2\lambda_r^2\lambda_{d+2}^{-1}(|u| + |y|)$$
$$\leq 2\lambda_r^2\lambda_{d+2}^{-1}(R_{d+1} + R_{r+3}) \leq 4\lambda_m^2\lambda_{d+2}^{-1}R_{d+1}.$$

Dès lors nous pouvons choisir $d_1 \geq \sup\{m+2, d_0\}$ tel que

$$|\mathrm{D}^\alpha G_r(u+iv, f) - \mathrm{D}^\alpha G_r(u, f)| \leq \frac{\varepsilon}{3m}$$

pour tous $r \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et $u + iv \in D_\Omega$ tels que $|\alpha| \leq s$ et $u \in \Omega \setminus K_{d_1}$.

Grâce à toutes ces informations, nous obtenons que $K = K_{d_1}$ convient.∎

6.5 Existence d'opérateurs d'extension holomorphe

Cas 1: F est compact ou $\mathbb{R}^n \setminus F$ est borné.

Définition. Etant donné un ouvert propre Ω de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}_\infty\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ désigne l'espace de Fréchet suivant. Ses éléments sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^n \cup D_\Omega$ telles que
(1) $f|_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;
(2) $f|_{D_\Omega} \in \mathcal{O}_\infty(D_\Omega)$;
(3) $\lim_{z\to x} \mathrm{D}^\alpha(f|_{D_\Omega}) = \mathrm{D}^\alpha(f|_{\mathbb{R}^n})(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et tout $x \in \partial_{\mathbb{R}^n}\Omega$.
Il est muni du système de semi-normes $\{|||\cdot|||_m : m \in \mathbb{N}\}$ défini selon

$$|||f|||_m = \sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(f|_{\mathbb{R}^n})\|_{b_m\setminus\Omega} + \sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(f|_{D_\Omega})\|_{D_\Omega}$$

où $b_m := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq m\}$.

Théorème 6.5.1 *Soit F un fermé propre de $\mathbb{R}^n$. Posons $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus F$.*
Si F est compact ou si Ω est borné, alors l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension E de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ implique l'existence d'un opérateur linéaire continu d'extension E_F de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{O}_\infty\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Preuve. Si F est compact, nous choisissons une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ identique à 1 sur un voisinage de F et ayant un support compact. Il est alors aisé d'établir que l'opérateur

$$E_1 : \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \quad \varphi \mapsto \psi.E\varphi$$

est aussi un opérateur linéaire continu d'extension. Ainsi, quitte à substituer E_1 à E lui-même, nous pouvons sans restriction supposer que E est un opérateur linéaire continu d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $(E\,\cdot)|_\Omega$ soit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.

A présent, à tout jet $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(F)$, associons la fonction $E_F\boldsymbol{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}^n \cup D_\Omega$ comme suit

$$\begin{cases} (E_F\boldsymbol{\varphi})(x) &= \varphi_0(x), & \forall x \in F, \\ (E_F\boldsymbol{\varphi})(z) &= T_\Omega((E\boldsymbol{\varphi})|_\Omega)(z), & \forall z \in D_\Omega. \end{cases}$$

Un recours au Théorème 6.4.1 permet de vérifier directement que E_F défini de la sorte est un opérateur linéaire d'extension de $\mathcal{E}(F)$ into $\mathcal{O}_\infty\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Etablissons qu'il est continu. Etablissons donc que, pour toute semi-norme continue $|||\cdot|||_m$ sur $\mathcal{O}_\infty\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, il existe une semi-norme continue p sur $\mathcal{E}(F)$ telle que

$$|||E_F\varphi|||_m \leq p(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(F).$$

Cela est aisé: il suffit de noter que

$$|||\varphi|||_m = \sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(E\varphi)|_{\mathbb{R}^n}\|_{b_m\setminus D_\Omega} + \sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(T_\Omega(E\varphi)|_\Omega)\|_{D_\Omega}$$

avec

$$\sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(E\varphi)|_{\mathbb{R}^n}\|_{b_m\setminus D_\Omega} = \sup_{|\alpha|\leq m} \|\varphi_\alpha\|_{b_m\cap F}$$

et

$$\sup_{|\alpha|\leq m} \|\mathrm{D}^\alpha(T_\Omega(E\varphi)|_\Omega)\|_{D_\Omega} \leq q((E\varphi)|_\Omega) \leq p(\varphi)$$

pour une semi-norme continue q sur $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ car T_Ω est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_\infty(D_\Omega)$ et pour une semi-norme continue p sur $\mathcal{E}(F)$ car $(E\cdot)|_\Omega$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega)$.∎

Cas 2: F est un fermé propre de $\mathbb{R}^n$.

Définitions. Afin d'alléger les écritures, convenons une fois de plus d'abréger "composante connexe" en "c.c." dans la définition suivante des ouverts Ω_j.

Pour tout ouvert propre Ω de $\mathbb{R}^n$, nous posons

$$\Omega_1 := \cup\{\omega\colon \omega = \text{c.c. of } \Omega, \omega \cap B_1 \neq \emptyset\},$$

nous introduisons par récurrence les ensembles

$$\Omega_j := \cup\{\omega\colon \omega = \text{c.c. of } \Omega, \omega \cap B_j \neq \emptyset, \omega \cap (\cup_{k=1}^{j-1}\Omega_k) = \emptyset\}$$

pour $j = 2, 3, \ldots$ et nous posons $J := \{j \in \mathbb{N}\colon \Omega_j \neq \emptyset\}$.

Pour tout $j \in J$, la construction du Paragraphe 6.2 appliquée à Ω_j procure une partie ouverte D_{Ω_j} de $\mathbb{C}^n$ telle que notamment $\mathbb{R}^n \cap D_{\Omega_j} = \Omega_j$ et $(u + iv \in D_{\Omega_j} \Rightarrow u \in \Omega_j)$.

Ensuite nous posons $D := \cup_{j \in J} D_{\Omega_j}$ et introduisons l'espace de Fréchet suivant: $\mathcal{OC}^\infty(\Omega)$. Il a pour éléments les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^n \cup D$ et telles que
(1) $f|_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;
(2) $f|_D \in \mathcal{O}(D)$;
(3) f est ses dérivées sont bornées sur D_{Ω_j} quel que soit $j \in J$;
(4) $\lim_{z \to x} \mathrm{D}^\alpha(f|_D)(z) = \mathrm{D}^\alpha(f|_{\mathbb{R}^n})(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et tout $x \in \partial_{\mathbb{R}^n}\Omega$.
Il est muni du système dénombrable de semi-normes $\{|||\cdot|||_m : m \in \mathbb{N}\}$ défini selon

$$|||f|||_m = \sup_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha(f|_{\mathbb{R}^n})\|_{b_m \setminus \Omega} + \sup_{j \le m} \sup_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha f\|_{D_{\Omega_j}}.$$

Théorème 6.5.2 *Soit F un fermé propre de $\mathbb{R}^n$. Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$.*

S'il existe un opérateur linéaire continu d'extension $E\colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) *il existe un opérateur linéaire continu d'extension E_1 de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{OC}^\infty(\Omega)$;*

(2) *le fermé F vérifie la condition* (FV).

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). L'argument de Frerick-Vogt s'applique également dans cette situation. Par souci de complétion, répetons-le.

Si ce n'est pas le cas, il existe $r > 0$ tel que la frontière de

$$\omega_r = \cup\{\omega\colon \omega = \text{ c.c. of } \Omega, \omega \cap b_r \neq \emptyset\}$$

est non bornée. Comme $\|\cdot\|_{b_r}$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{OC}^\infty(\Omega)$, la continuité de l'opérateur linéaire E_1 assure l'existence d'un entier $m > r$ tel que

$$\|E_1\varphi\|_{b_r} \le m\, |\varphi|_m\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(F),$$

où $|\cdot|_m$ représente la m-ième semi-norme continue sur $\mathcal{E}(F)$ (c'est-à-dire celle correspondant au compact $F \cap b_m$). A présent, choisissons $x_0 \in (\partial_{\mathbb{R}^n}\omega_r) \setminus b_{m+1}$ et $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi_0(x_0) = 1$ et $\psi_0 \equiv 0$ sur b_m, et finalement considérons le jet $\varphi_0 = ((\mathrm{D}^\alpha\psi_0)|_F)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \in \mathcal{E}(F)$. D'une part, comme $|\varphi_0|_m = 0$, $E_1\varphi_0$ est identique à 0 sur b_r donc sur ω_r. D'autre part $E_1\varphi_0$ doit prendre la valeur 1 en x_0.

D'où une contradiction.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si F est compact ou si Ω est borné, la condition (2) est automatiquement satisfaite et le théorème précédent donne un meilleur résultat.

Si F n'est pas compact et si Ω n'est pas borné, nous procédons comme suit.

Si $n \ge 2$, comme F n'est pas compact, la condition (2) implique que toutes les composantes connexes de Ω sont bornées et, comme Ω n'est pas borné, J est infini.

Si $n = 1$, comme F n'est pas compact, la condition (2) implique qu'une et seulement une composante connexe ω de Ω au plus peut ne pas être bornée; elle est alors d'un des types $]-\infty, a[$ ou $]b, +\infty[$. Cela étant, nous choisissons une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ identique à 1 sur un voisinage de $[a, +\infty[$ ou de $]-\infty, b]$ et à 0 sur $]-\infty, a-1]$ ou $[b+1, +\infty[$ respectivement et vérifions que

$$E_2 \colon \mathcal{E}(F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}); \quad \varphi \mapsto \psi . E\varphi$$

est un opérateur linéaire continu d'extension tel que $(E_2 \cdot)|_\omega$ soit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\omega)$.

De la sorte, nous pouvons sans restriction supposer que, pour tout $j \in J$, $(E\cdot)|_{\Omega_j}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$.

Maintenant nous appliquons le Théorème 6.4.1 pour tout $j \in J$: nous obtenons des opérateurs linéaire continus T_{Ω_j} de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$ dans $\mathcal{O}_\infty(D_j)$ tels que, pour tous $f \in \mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$, $\varepsilon > 0$ et $s \in \mathbb{N}$, il existe une partie compacte K_j de Ω_j telle que

$$\left|\mathrm{D}^\alpha (T_{\Omega_j} f)(u + iv) - \mathrm{D}^\alpha f(u)\right| \le \varepsilon$$

pour tous $u + iv \in D_j$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tels que $u \in \Omega_j \setminus K_j$ and $|\alpha| \le s$.

A tout jet $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(F)$, nous associons alors la fonction $E_1\boldsymbol{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}^n \cup D$ par

$$\begin{cases} (E_1\boldsymbol{\varphi})(x) &= \varphi_0(x), & \forall x \in F, \\ (E_1\boldsymbol{\varphi})(z) &= T_{\Omega_j}((E\boldsymbol{\varphi})|_{\Omega_j})(z), & \forall z \in D_j, j \in J. \end{cases}$$

Il est clair que E_1 défini de la sorte est un opérateur linéaire d'extension de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{OC}^\infty(\Omega)$. Pour conclure, il nous reste alors à prouver que cet opérateur linéaire E_1 est continu. Il nous suffit en fait d'établir que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une semi-norme continue p sur $\mathcal{E}(F)$ telle que $|||E_1\varphi|||_m \le p(\boldsymbol{\varphi})$ pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{E}(F)$. Ceci est direct car nous avons

$$|||E_1\boldsymbol{\varphi}|||_m = \sup_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha((E_1\boldsymbol{\varphi})|_{\mathbb{R}^n})\|_{b_m \setminus \Omega} + \sup_{j \le m} \sup_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha(E_1\boldsymbol{\varphi})\|_{D_{\Omega_j}}$$

avec

$$\sup_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha((E_1\boldsymbol{\varphi})|_{\mathbb{R}^n})\|_{b_m \setminus \Omega} \le \sup_{|\alpha| \le m} \|\varphi_\alpha\|_{b_m \cap F}$$

et

$$\sup_{j \le m} \sup_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha(E_1\boldsymbol{\varphi})\|_{D_{\Omega_j}} \le \sup_{j \le m} q_j((E\boldsymbol{\varphi})|_{\Omega_j}) \le \sup_{j \le m} p_j(\boldsymbol{\varphi})$$

pour une semi-norme continue q_j sur $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$ car T_{Ω_j} est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$ dans $\mathcal{O}_\infty\mathcal{C}^\infty(D_{\Omega_j})$ et pour une semi-norme continue p_j sur $\mathcal{E}(F)$ car $(E\cdot)|_{\Omega_j}$est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}(F)$ dans $\mathcal{BC}^\infty(\Omega_j)$.∎

Appendice A

Compléments sur les espaces localement convexes

A.1 Introduction aux limites inductives

Convention. Dans cet appendice, sauf mention explicite du contraire, nous considérons une suite $(E_n, P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces localement convexes
(a) croissante, c'est-à-dire telle que $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(b) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'injection canonique

$$j_n\colon (E_n, P_n) \to (E_{n+1}, P_{n+1})$$

est continue ou, ce qui revient au même, $P_{n+1}|_{E_n} \leq P_n$ sur E_n.

De plus, nous posons $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$; il s'agit clairement d'un espace vectoriel que nous allons "tenter" de munir d'un système de semi-normes privilégié, lié aux P_n.

A.1.1 La limite inductive $\mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$

Notation. A toute suite $\pi = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de semi-normes telles que $p_n \in P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $\rho = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs, nous associons l'application

$$p_{\pi,\rho}\colon E \to [0, \infty[; \quad e \mapsto \inf_{e=\sum_{(n)} e_n} \sum_{n=1}^{\infty} r_n p_n(e_n),$$

la borne inférieure portant sur toutes les décompositions finies $e = \sum_{(n)} e_n$ de e telles que $e_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition A.1.1 *L'ensemble P des applications $p_{\pi,\rho}$ qui viennent d'être introduites est un ensemble filtrant de semi-normes sur E.*

Preuve. a) Etablissons d'abord que chacune de ces applications $p_{\pi,\rho}$ est une semi-norme sur E.

Il est clair que ces applications sont bien définies.

Il est tout aussi clair que l'égalité $p_{\pi,\rho}(ce) = |c|\, p_{\pi,\rho}(e)$ a lieu pour tous $e \in E$ et $c \in \mathbb{K}$.

De plus, pour tous e, $f \in E$ et toutes décompositions finies $e = \sum_{(n)} e_n$ et $f = \sum_{(n)} f_n$, nous avons bien sûr

$$p_{\pi,\rho}(e+f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n p_n(e_n + f_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n p_n(e_n) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n p_n(f_n)$$

donc $p_{\pi,\rho}(e+f) \leq p_{\pi,\rho}(e) + p_{\pi,\rho}(f)$.

b) L'ensemble P est filtrant car, étant donné $p_{\pi',\rho'}$, $p_{\pi'',\rho''} \in P$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in P_n$ et $r_n > 0$ tels que $\sup\{r'_n p'_n, r''_n p''_n\} \leq r_n p_n$ par filtration de P_n, ce qui conduit évidemment à $\sup\{p_{\pi',\rho'}, p_{\pi'',\rho''}\} \leq p_{\pi,\rho}$ sur E.∎

Proposition A.1.2 *Pour tout $p_{\pi,\rho} \in P$,*

$$b_{p_{\pi,\rho}}(< 1) = \Gamma(\cup_{n=1}^{\infty} b_{p_n}(< 1/r_n)).$$

Preuve. L'inclusion $\subset$ résulte aussitôt de ce que $b_{p_n}(< 1/r_n) \subset b_{p_{\pi,\rho}}(< 1)$ a évidemment lieu pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Inversément si $e \in b_{p_{\pi,\rho}}(< 1)$, il existe une décomposition finie $e = \sum_{(n)} e_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n p_n(e_n) < 1$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n p_n(e_n) + \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}, e_n \neq 0} r_n < 1.$$

Cela étant, si on pose

$$s_n = \begin{cases} (p_n(e_n) + \varepsilon) r_n & \text{si } e_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } e_n = 0, \end{cases}$$

il vient $e = \sum_{(n)} s_n(e_n/s_n)$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sum_{(n)} s_n < 1$ ainsi que $e_n/s_n \in b_{p_n}(< 1/r_n)$ chaque fois que $e_n \neq 0$.∎

L'invariance de P résulte du corollaire de la propriété suivante.

Proposition A.1.3 *Soit* $(F_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'espaces localement convexes telle que* $Q_{n+1}|_{F_n} \leq Q_n$ *sur* F_n *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$.

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $n(k) \in \mathbb{N}$ *tel que* $E_k \subset F_{n(k)}$ *et* $Q_{n(k)}|_{E_k} \leq P_k$ *sur* E_k, *alors on a* $Q|_E \leq P$ *sur* E.

Preuve. Soit $q_{\sigma,\tau} \in Q$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe alors $p_k \in P_k$ et $r_k > 0$ tels que $t_{n(k)}q_{n(k)} \leq r_k p_k$ sur E_k. De là, pour tout $e \in E$, il vient clairement

$$\begin{aligned} q_{\sigma,\tau}(e) &= \inf_{e=\sum_{(n)} f_n} \sum_{n=1}^{\infty} t_n q_n(f_n) \\ &\leq \inf_{e=\sum_{(k)} e_k} t_{n(k)}q_{n(k)}(e_{n(k)}) \leq p_{\pi,\rho}(e).\blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire A.1.4 *Soit* $(F_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'espaces localement convexes telle que* $Q_{n+1}|_{F_n} \leq Q_n$ *sur* F_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, *il existe des entiers positifs* $n(k)$ *et* $m(k)$ *tels que* $E_k \subset F_{n(k)}$ *avec* $Q_{n(k)}|_{E_k} \leq P_k$ *sur* E_k *et* $F_k \subset E_{m(k)}$ *avec* $P_{m(k)}|_{F_k} \leq Q_k$ *sur* F_k, *alors on a* $(E, P) = (F, Q)$.$\blacksquare$

Remarque. En général, l'ensemble filtrant de semi-normes P n'est pas séparant.$\square$

Définition. Si l'ensemble filtrant de semi-normes P est séparant, P est un système de semi-normes sur E et on dit que (E, P) est la *limite inductive séparée* $(E, P) = \operatorname{ind}_n(E_n, P_n)$ de la suite $(E_n, P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En particulier,
(a) un *espace* (LB) est une limite inductive séparée d'une suite d'espaces de Banach;
(b) un *espace* (LF) est une limite inductive séparée d'une suite d'espaces de Fréchet.

Remarque. Tout espace localement convexe (E, P) *est la limite inductive séparée de la suite* $((E_n, P_n) := (E, P))_{n\in\mathbb{N}}$. De fait, d'une part, pour toute semi-boule ouverte b de (E, P), on a $b = \Gamma(\cup_{n=1}^{\infty} b_n)$ où $b_n = b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, pour toute semi-boule ouverte b de $\operatorname{ind}_n(E_n, P_n)$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une semi-boule ouverte b_n de E_n telle que $b \supset \Gamma(\cup_{n=1}^{\infty} b_n)$.$\square$

Voici la justification de l'introduction de cette notion de limite inductive.

Théorème A.1.5 *Si* $(E, P) = \operatorname{ind}_n(E_n, P_n)$ *est une limite inductive séparée, alors on a* $P|_{E_n} \leq P_n$ *sur* E_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* P *est le système de semi-normes le plus fort sur* E *ayant cette propriété.*

Preuve. Le premier point est clair car on a bien sûr $p_{\pi,\rho} \leq r_n p_n$ sur E_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

De plus, si q est une semi-norme sur E continue sur E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe des suites π et ρ telles que $q \leq r_n p_n$ sur E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela étant, pour toute décomposition finie $e = \sum_{(n)} e_n$ de $e \in E$, il vient

$$q(e) \leq \sum_{(n)} q(e_n) \leq \sum_{(n)} r_n p_n(e_n)$$

donc $q \leq p_{\pi,\rho}$ sur E.∎

Remarque. Ce théorème procure un moyen aisé pour établir que P est séparant: il suffit de trouver un système de semi-normes Q sur E tel que $Q|_{E_n} \leq P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.□

A ce stade de généralité, voici quelques propriétés.

Proposition A.1.6 (a) *Toute limite inductive séparée d'espaces séparables (par semi-norme) est séparable (par semi-norme).*

(b) *Toute limite inductive séparée d'espaces ultrabornologiques* (resp. *bornologiques; tonnelés; quasi-tonnelés*) *est ultrabornologique* (resp. *bornologique; tonnelé; quasi-tonnelé*).

Preuve. (a) Supposons les E_n séparables par semi-norme. Soit $p_{\pi,\rho}$ un elément de P. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors une partie dénombrable $\{ e_{n,k} : k \in \mathbb{N} \}$ dense pour p_n dans E_n. Cela étant, $\{ e_{n,k} : n, k \in \mathbb{N} \}$ est une partie dénombrable de E telle que, pour tous $e \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $e \in E_n$ puis $k \in \mathbb{N}$ tel que $p_n(e - e_{n,k}) \leq \varepsilon / r_n$ donc tel que $p_{\pi,\rho}(e - e_{n,k}) \leq \varepsilon$.

Le cas où les E_n sont séparables se traite de même.

(b) Cela résulte aussitôt du fait que si A est une partie absolument convexe (resp. fermée; absorbante; bornivore; qui absorbe les compacts absolument convexes) de E, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap E_n$ est bien sûr une partie absolument convexe (resp. fermée; absorbante; bornivore; qui absorbe les compacts absolument convexes) de E_n.∎

A.1.2 Limite inductive stricte

Théorème A.1.7 (Dieudonné, Schwartz) *Si on a $P_{n+1}|_{E_n} \sim P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors P est un système de semi-normes sur E tel que $P|_{E_n} \sim P_n$ sur E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Il suffit de prouver que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p_n \in P_n$, il existe des suites π et ρ telles que $p_n \leq p_{\pi,\rho}$ sur E_n.

Posons $b_n = b_{p_n}(< 1)$. En recourant à l'hypothèse, d'une part, il existe pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ une semi-boule ouverte b_k de E_k telle que $b_k \subset b_n$ et, d'autre part, une récurrence aisée procure pour tout $k > n$ une semi-boule ouverte $b_k = b_{p_k}(< 1)$ de E_k telle que $b_k \cap E_{k-1} \subset b_{k-1}$. Pour conclure, il suffit alors d'établir que $\Gamma(\cup_{k=1}^{\infty} b_k) \cap E_n = b_n$, l'inclusion $\supset$ étant claire.

Soit e un élément de $E_n \cap \Gamma(\cup_{k=1}^{\infty} b_k)$ donc de $E_n \cap \Gamma(\cup_{k=n}^{\infty} b_k)$ car $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont inclus dans b_n. Nous savons que e admet une décomposition finie de la forme $\sum_{k=1}^{K} c_{n(k)} e_{n(k)}$ avec $n \leq n(1) < \ldots < n(K)$ et $\sum_{k=1}^{K} c_{n(k)} \leq 1$ ainsi que $c_{n(k)} > 0$ et $e_{n(k)} \in b_{n(k)}$ pour tout $k = 1, \ldots, K$. Cela étant, de

$$e_{n(K)} = \frac{1}{c_{n(K)}} \left(e - \sum_{k=1}^{K-1} c_{n(k)} e_{n(k)} \right) \in b_{n(K)} \cap E_{n(K-1)} \subset b_{n(K-1)},$$

on tire que $c_{n(K)} e_{n(K)} + c_{n(K-1)} e_{n(K-1)}$ s'écrit aussi $(c_{n(K)} + c_{n(K-1)}) f_{n(K-1)}$ avec $f_{n(K-1)} \in b_{n(K-1)}$. En répétant cet argument un nombre fini de fois, nous arrivons finalement à $e \in b_n$, ce qui suffit.∎

Définition. Une *limite inductive stricte* est une limite inductive $(E, P) = \mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}|_{E_n} \sim P_n$ sur E_n.

Vu le théorème précédent, *toute limite inductive stricte est séparée.*

A.1.3 Limite inductive hyperstricte

Définition. Une *limite inductive hyperstricte* est une limite inductive stricte $(E, P) = \mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est un fermé de E_{n+1}.

Exemple. *Toute limite inductive stricte d'espaces de Fréchet est hyperstricte.*□

L'espace $\mathcal{D}^\infty(\Omega) = \mathrm{ind}_m \mathcal{D}^\infty(K_m)$ est une limite inductive hyperstricte.

Les limites inductives hyperstrictes jouissent de propriétés très fines.

Proposition A.1.8 *Soit $(E, P) = \mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$ une limite inductive hyperstricte.*

Une partie F d'un des E_n est un fermé de E si et seulement si elle est un fermé de E_n.

Dès lors, pour toute partie A de E_n, on a $A^{-E} = A^{-E_k}$ pour tout $k \geq n$.

Preuve. La nécessité de la condition est triviale car $P|_{E_n} \leq P_n$ sur E_n.

La condition est suffisante. Soit F un fermé de (E_n, P_n). Il est clair que F est un fermé de (E_{n+k}, P_{n+k}) quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Cela étant, pour tout $e \in E \setminus F$, il existe un entier $k > n$ tel que $e \in E_{n+k}$ donc une semi-boule b_{n+k} de E_{n+k}, centrée en e et disjointe de F. Il existe ensuite une semi-boule b de E centrée en e telle que $b \cap E_{n+k} \subset b_{n+k}$ donc telle que $b \subset E \setminus F$.

Pour conclure, il suffit de noter que, pour $A \subset E_n$, nous avons bien sûr $A^{-E_n} \subset A^{-E}$ mais aussi $A^{-E} \subset A^{-E_n}$ car A^{-E_n} est un fermé de E contenant A.∎

Remarque. Si une limite inductive hyperstricte $(E, P) = \mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$ est un espace de Baire, alors on doit avoir $E = E_n$ pour tout n suffisamment grand.□

Proposition A.1.9 *Soit $(E, P) = \mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$ une limite inductive hyperstricte.*

Une suite converge dans E si et seulement si elle est incluse dans un des E_n et y converge.

Il s'ensuit que E est séquentiellement complet si et seulement si chacun des E_n l'est.

Preuve. a) Considérons d'abord la convergence des suites.

La suffisance de la condition est claire.

La condition est nécessaire. Soit $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers e_0 dans E.

Pour conclure, il suffit d'établir l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel l'inclusion $\{\, e_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\} \subset E_n$ a lieu car on a $P|_{E_n} \sim P_n$ sur E_n. Il suffit même de le faire dans le cas où $e_0 = 0$ car $e_m \to 0$ donne alors lieu à $\{\, e_m - e_0 : m \in \mathbb{N} \,\} \subset E_n$ donc à $\{\, e_m : m \in \mathbb{N} \,\} \subset E_{\sup\{n,k\}}$ si $e_0 \in E_k$.

Supposons donc avoir une suite $e_m \to 0$ dans E. Si elle n'est incluse dans aucun des E_n, il en existe une sous-suite $(e_{m(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite strictement croissante $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ telles que $e_{m(k)} \in E_{n(k)} \setminus E_{n(k)-1}$. Comme $e_{m(1)}$ n'appartient pas à E_1, il vient $e_{m(1)} \neq 0$, ce qui assure l'existence d'une semi-boule fermée $b_{n(1)}$, centrée en 0 dans $E_{n(1)}$ et telle que $e_{m(1)} \notin b_{n(1)}$. Comme $b_{n(1)}$ est un fermé de $E_{n(2)}$ ne contenant ni $e_{m(1)}$, ni $e_{m(2)}$, il existe une semi-boule $b_{n(2)}$ centrée en 0 dans $E_{n(2)}$ telle que

$$e_{m(1)}, e_{m(2)} \notin b_{n(1)} + 2b_{n(2)} \text{ donc } e_{m(1)}, e_{m(2)} \notin \overline{b_{n(1)} + b_{n(2)}}.$$

En continuant de la sorte, on arrive à

$$e_{m(1)}, \ldots, e_{m(k)} \notin \overline{\overset{\cdots}{\overline{b_{n(1)} + b_{n(2)}}} + \cdots + b_{n(k)}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela étant, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{n(k)+1, \ldots, n(k+1)-1\}$, choisissons une semi-boule fermée b_j centrée en 0 dans E_j telle que $b_j \subset b_{n(k+1)}$. Comme nous avons

$$\Gamma(\cup_{j=1}^{\infty} b_j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (b_{n(1)} + \cdots + b_{n(k)}),$$

il vient $e_{m(k)} \notin \Gamma(\cup_{j=1}^{\infty} b_j)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde car $e_{m(k)} \to 0$ dans E.

b) Passons à la complétion séquentielle.

La nécessité de la condition est claire car chacun des E_n est un fermé de E.

La condition est suffisante. Soit $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Cette suite étant bornée, nous avons $e_m/m \to 0$ dans E, ce qui assure que la suite $(e_m/m)_{m \in \mathbb{N}}$ est incluse dans un des E_n. Cela étant, la suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est incluse dans le même espace E_n, ce qui permet de conclure aussitôt.∎

Proposition A.1.10 *Soit* $(E, P) = \mathrm{ind}_n(E_n, P_n)$ *une limite inductive hyper-stricte.*

Une partie de E est bornée (resp. *précompacte; compacte; extractable*) *si et seulement si elle est incluse dans un des E_n et y est bornée* (resp. *précompacte; compacte; extractable*).

Preuve. La suffisance de la condition est triviale.

La condition est nécessaire car, dans chaque cas, il s'agit d'un borné donc d'une partie incluse dans un des E_n: si $A \subset E$ n'est inclus dans aucun des E_n, il contient une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $e_m \notin E_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Cela étant, A ne peut être borné sinon la suite $(e_m/m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et doit donc être incluse dans un des E_n.∎

A.2 Critères de fermeture dans le dual

A.2.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème A.2.1 (Banach-Steinhaus) *Soit* $(E, \{\, p_n : n \in \mathbb{N}\,\})$ *est un espace séparable à semi-normes dénombrables.*

Si A' est une partie de E', les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) *A' est* pc*-fermé;*

(b) *A' est* pc*-fermé pour les suites;*

(c) *pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, $A' \cap b_{p_n}^{\triangle}(r)$ est* s*-fermé;*

(d) *pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, $A' \cap b_{p_n}^{\triangle}(r)$ est* s*-fermé pour les suites.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) est trivial.

(b) $\Rightarrow$ (d). Etant s-fermé, $b_{p_n}^{\triangle}(r)$ est pc-fermé. Dès lors, $A' \cap b_{p_n}^{\triangle}(r)$ est pc-fermé pour les suites alors que sur toute partie équicontinue de E', les topologies τ_{pc} et τ_{s} sont équivalentes.

(d) $\Rightarrow$ (c). L'espace E étant séparable, nous savons que, sur toute partie équicontinue de E', la topologie τ_{s} est métrisable. Dès lors, $A' \cap b_{p_n}^{\triangle}(r)$ est une partie s-fermée du s-fermé $b_{p_n}^{\triangle}(r)$ donc est une partie s-fermée de E'.

(c) $\Rightarrow$ (a). Posons $b_n = b_{p_n}(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons donc $E' = \cup_{n=1}^{\infty} b_n^{\triangle}$.

Si $e_0' \in E'$ n'appartient pas à A', établissons par récurrence l'existence d'une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de E telles que

$$F_n \subset b_{n-1} \text{ et } e_0' + (F_1 \cup \ldots \cup F_n)^{\triangle} \cap b_n^{\triangle} \subset E' \setminus A', \quad \forall n \geq 2.$$

A cet effet, remarquons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A' \cap (e_0' + b_n^{\triangle})$ est un s-compact de E': de fait, étant équicontinu, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A' \cap (e_0' + b_n^{\triangle}) \subset b_m^{\triangle}$ et ainsi $A' \cap (e_0' + b_n^{\triangle}) = (A' \cap b_m^{\triangle}) \cap (e_0' + b_n^{\triangle})$ est s-compact comme intersection d'un s-fermé et d'un s-compact. Cela étant, comme $A' \cap (e_0' + b_1^{\triangle})$ est s-fermé et ne contient pas e_0', il existe une partie finie F_1 de E telle que

$$A' \cap (e_0' + b_1^{\triangle}) \cap (e_0' + F_1^{\triangle}) = A' \cap (e_0' + b_1^{\triangle} \cap F_1^{\triangle}) = \emptyset$$

donc telle que $e_0' + (b_1^{\triangle} \cap F_1^{\triangle}) \subset E' \setminus A'$. Si, à présent, $F_1, \ldots, F_n$ sont obtenus, nous procédons comme suit pour assurer l'existence de F_{n+1}. Les ensembles

$$e_0' + (F_1 \cup \ldots \cup F_n \cup \{e\})^{\triangle}, \quad (e \in b_n),$$

sont s-fermés et leur intersection $e_0' + (F_1 \cup \ldots \cup F_n)^{\triangle} \cap b_n^{\triangle}$ est disjointe de A' donc est disjointe du s-compact $A' \cap (e_0' + b_{n+1}^{\triangle})$. Dès lors il existe un nombre fini de ces fermés, donc une partie finie F_{n+1} de b_n, telle que

$$(e_0' + (F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1})^{\triangle}) \cap A' \cap (e_0' + b_{n+1}^{\triangle}) = \emptyset,$$

ce qui suffit.

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ est un précompact de E tel que

$$\left(e_0' + (\cup_{n=1}^{\infty} F_n)^{\triangle} \cap b_k^{\triangle}\right) \cap A' = \emptyset, \quad \forall k \geq 2,$$

donc tel que $(e_0' + (\cup_{n=1}^{\infty} F_n)^{\triangle}) \cap A' = \emptyset$ car $\cup_{n=1}^{\infty} b_k^{\triangle} = E'$. ∎

A.2.2 Théorème de Krein-Smulian

Théorème A.2.2 (Krein-Smulian) *Soit* $(E, \{ p_n : n \in \mathbb{N} \})$ *un espace de Fréchet séparable.*

Si A' *est une partie absolument convexe de* E'*, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) A' *est* s*-fermé;*

(b) A' *est* s*-fermé pour les suites;*

(c) *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $r > 0$, $A' \cap b^{\triangle}_{p_n}(r)$ *est* s*-fermé;*

(d) *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $r > 0$, $A' \cap b^{\triangle}_{p_n}(r)$ *est* s*-fermé pour les suites.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) est trivial.

(b) $\Rightarrow$ (d) résulte du théorème de Banach-Dieudonné car toute partie s-fermée pour les suites est pc-fermée pour les suites.

(d) $\Rightarrow$ (c) a lieu, vu le théorème de Banach-Dieudonné.

(c) $\Rightarrow$ (a). Vu le théorème de Banach -Dieudonné, nous savons que A' est pc-fermé. Comme A' est absolument convexe, il suffit alors de prouver que E'_{pc} et E'_{s} ont le même dual pour établir que A' est s-fermé. L'inclusion $(E'_{\mathrm{s}})' \subset (E'_{\mathrm{pc}})'$ est claire. Pour établir l'autre inclusion, remarquons que, pour tout $e'' \in (E'_{\mathrm{pc}})'$, il existe un précompact K de l'espace de Fréchet E et $C > 0$ tels que

$$|\langle \cdot, e'' \rangle| \le C \sup_{e \in K} |\langle e, \cdot \rangle| = C \sup_{e \in \overline{\Gamma}(K)} |\langle \cdot, \delta_e \rangle| \quad \text{sur } E'$$

avec $\overline{\Gamma}(K)$ compact et absolument convexe. Comme alors $\overline{\Gamma}(K)$ est a-compact, $\{ \delta_e : e \in \overline{\Gamma}(K) \}$ est compact dans $(E'_{\mathrm{pc}})'_s$. On en déduit que $e'' \in \{ \delta_e : e \in \overline{\Gamma}(K) \}$ vu le théorème de séparation relatif aux fermés absolument convexes appliqué à la situation $F = (E'_{\mathrm{pc}})'_s$ de dual $F' = E'$.∎

A.3 Théorème d'homomorphisme

Théorème A.3.1 (Théorème d'homomorphisme) *Toute surjection linéaire continue d'un espace de Fréchet sur un espace tonnelé est ouverte.*

Preuve. Soient E un espace de Fréchet, F un espace tonnelé et T une surjection linéaire continue de E sur F.

Soient alors π la projection linéaire canonique de E sur $E/\ker(T)$ et S l'opérateur linéaire de $E/\ker(T)$ sur F tel que $T = S\pi$. Comme π est ouvert, il nous reste à établir que la bijection linéaire continue S est ouverte; cela revient à supposer T injectif et devoir établir que T est ouvert.

Pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, $\overline{Tb_p}$ est un tonneau de F donc est un voisinage de 0 dans F. Dès lors, $T^{',-1}b_p^{\triangle} = (Tb_p)^{\triangle}$ est une partie absolument convexe, s-fermée et équicontinue, donc s-compacte de F'. L'opérateur T étant injectif, $T'F'$ est un sous-espace vectoriel dense dans E'_{s}. Comme T' apartient à $\mathrm{L}(F'_{\mathrm{s}}, E'_{\mathrm{s}})$, nous obtenons donc que $T'(Tb_p)^{\triangle} = b_p^{\triangle} \cap T'F'$ est une partie s-compacte donc s-fermée de E'. Il s'ensuit que $T'F' = E'$ vu le théorème de Krein-Smulian, donc que T est ouvert de E_{a} dans F_{a}. Dès lors, Tb_p est a-fermé dans F car b_p est a-fermé dans E; nous obtenons donc $Tb_p = \overline{Tb_p}$ et pouvons conclure.∎

Remarque. Ce résultat nous suffira dans la suite mais en fait il s'agit d'un cas particulier d'une théorie beaucoup plus fine. Pour de plus amples renseignements, nous renvoyons ([22], pp 161–166) où notamment le résultat suivant est établi: *toute surjection linéaire continue d'un espace de Ptak sur un espace tonnelé est ouverte.*□

Corollaire A.3.2 *Soit $E = \mathrm{ind}_n E_n$ un espace* (LF).
Si T est une surjection linéaire continue de E sur un espace de Fréchet F, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $TE_n = F$.

Preuve. Comme $(TE_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de l'espace de Fréchet donc de Baire F, et comme $\cup_{n=1}^{\infty} TE_n = F$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que TE_{n_0} soit dense dans F pour tout $n \geq n_0$. Nous pouvons alors appliquer la proposition B.5.4 de [26] et obtenir l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que TE_{n_1} soit un sous-espace dense et de Baire de F. Cela étant, la restriction $T\colon E_{n_1} \to TE_{n_1}$ est une surjection linéaire continue d'un espace de Fréchet sur un espace de Baire donc tonnelé et, par conséquent, est un homomorphisme. Il s'ensuit que TE_{n_1} est un sous-espace dense et de Fréchet de F donc coïncide avec F.∎

A.4 Le théorème d'interpolation d'Eidelheit

A.4.1 Caractérisation de la surjectivité

Proposition A.4.1 *Toute image linéaire continue d'un disque de Banach est un disque de Banach.*

Preuve. Soient $T \in \mathrm{L}(E, F)$ et B un disque de Banach de E. Il est clair que TB est une partie absolument convexe et bornée de F. Il reste donc à établir que l'espace normé F_{TB} est de Banach. De toute suite de Cauchy dans F_{TB}, nous pouvons extraire une sous-suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_{m+1} - f_m\|_{TB} < 2^{-m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et il suffit d'établir qu'une telle sous-suite converge.

A cet effet, choisissons $e_1 \in E$ tel que $Te_1 = f_1$ puis, de proche en proche, des $e_m \in E$ tels que $\|e_m\|_B < 2^{-m}$ et

$$f_{m+1} = f_m + Te_{m+1} = T(e_1 + \cdots + e_{m+1}).$$

Comme nous avons $\|e_m\|_B < 2^{-m}$ pour tout $m \geq 2$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} e_m$ converge dans E_B; soit e_0 sa limite. En fait, nous avons alors $f_m \to Te_0$ dans F_{TB} car ce qui précède implique

$$Te_0 - f_m = T \sum_{k=m+1}^{\infty} e_k \in 2^{-m}TB, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$ ∎

Théorème A.4.2 (surjectivité) *Si E et F sont des espaces de Fréchet, un opérateur linéaire continu T de E dans F est surjectif si et seulement si, pour tout borné B' de E'_b, $T'^{,-1}B'$ est un borné de F'_b.*

Preuve. Rappelons que, pour toute partie A non vide de E, nous avons

$$T'^{,-1}A^{\triangle} = \left\{ f' : T'f' \in A^{\triangle} \right\} = \{ f' : |\langle Te, f' \rangle| \leq 1, \forall e \in A \} = (TA)^{\triangle}.$$

La condition est nécessaire. Comme B' est une partie équicontinue de E', il existe $p \in \mathrm{cs}(E)$ tel que $B' \subset b_p^{\triangle}$. Cela étant, nous avons $T'^{,-1}B' \subset T'^{,-1}b_p^{\triangle} = (Tb_p)^{\triangle}$ alors que Tb_p est un voisinage de 0 dans F car T est un opérateur ouvert.

La condition est suffisante. Pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, $b_p^{\triangle}$ est un borné de E'_b. Dès lors, $T'^{,-1}b_p^{\triangle}$ est un borné de F'_b donc une partie équicontinue de F' et ainsi $(Tb_p)^{\triangle\triangledown} = (Tb_p)^{-}$ est un voisinage de 0 dans F. On peut alors établir comme d'habitude (F est un espace métrisable) que $\overline{Tb_p(1/2)} \subset Tb_p$ donc que T est surjectif. ∎

Théorème A.4.3 (surjectivité) *Soient E et F deux espaces de Fréchet.*

Un opérateur linéaire continu T de E dans F et d'image dense dans F est surjectif si et seulement si, pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, l'ensemble $b_p^{\triangle} \cap \mathrm{im}(T')$ est un disque de Banach dans E'_b.

Preuve. La condition est nécessaire. Nous avons

$$\begin{aligned} b_p^{\triangle} \cap \mathrm{im}(T') &= \left\{ e' \in b_p^{\triangle} : \exists f' \in F' \text{ tel que } e' = T'f' \right\} \\ &= T' \{ f' \in F' : |\langle \cdot, T'f' \rangle| \leq p(\cdot) \text{ sur } E \} = T'(Tb_p)^{\triangle}. \end{aligned}$$

Vu le théorème de l'opérateur ouvert, Tb_p est un voisinage de 0 dans F. Par conséquent, $(Tb_p)^{\triangle}$ est une partie absolument convexe, équicontinue et s-fermée donc un disque de Banach de F'_s. Comme T' est un opérateur linéaire continu de F'_s dans E'_s, $T'(Tb_p)^{\triangle}$ est un disque de Banach de E'_s donc de E'_b.

La condition est suffisante. Pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, $B'_p = b_p^{\triangle} \cap \mathrm{im}(T')$ est un disque de Banach de E'_b donc de E'_s. Par conséquent, l'inclusion canonique $j_p \colon E'_{B'_p} \to E'_s$ est linéaire et continue. Si $\mathrm{cs}(F) \sim \{\, q_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ et si nous posons $b_n = b_{q_n}(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $F' = \cup_{n=1}^{\infty} b_n^{\triangle}$ donc $\mathrm{im}(T') = \cup_{n=1}^{\infty} T' b_n^{\triangle}$. Comme l'opérateur linéaire T' est continu de F'_s dans E'_s, chacun des ensembles $T'b_n^{\triangle}$ est compact donc fermé dans E'_s et, par conséquent, $E_{B'_p} \cap T'b_n^{\triangle}$ est un fermé de $E'_{B'_p}$. Vu que

$$E'_{B'_p} = E'_{B'_p} \cap \mathrm{im}(T') = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E'_{B'_p} \cap T'b_n^{\triangle}),$$

le théorème de Baire procure l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $E'_{B'_p} \cap T'b_n^{\triangle}$ soit un voisinage de 0 dans $E'_{B'_p}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $rB'_p \subset T'b_n^{\triangle}$. Comme l'image de T est dense dans F, T' est injectif et, par conséquent, $T'^{,-1}B'_p$ est inclus dans $r^{-1}b_n^{\triangle}$ donc est un borné de F'_b, ce qui suffit vu le théorème précédent.∎

A.4.2 Théorème d'Eidelheit

Théorème A.4.4 (interpolation, Eidelheit) *Soient E un espace de Fréchet et $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments linéairement indépendants de E'.*

Alors, pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$, il existe $e \in E$ tel que $\langle e, e'_n \rangle = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si, pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, l'espace vectoriel

$$\{\, e' \in E' : \exists C > 0 \text{ tel que } |\langle \cdot, e' \rangle| \le Cp \,\} \cap \mathrm{span}(\{\, e'_n : n \in \mathbb{N} \,\})$$

est de dimension finie.

Preuve. L'opérateur

$$T \colon E \to \omega; \quad e \mapsto (\langle e, e'_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

est clairement linéaire et continu entre deux espaces de Fréchet et tout revient à caractériser quand il est surjectif.

Comme nous avons

$$T' \colon \omega' = \phi \to E'; \quad \boldsymbol{c} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n e'_n$$

car

$$\boldsymbol{c} \mapsto \langle \cdot, T'\boldsymbol{c} \rangle = \langle T\cdot, \boldsymbol{c} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, e'_n \rangle \, c_n$$

le théorème de surjectivité A.4.2 assure que T est surjectif si et seulement si, pour tout borné B' de E'_b, $T'^{,-1}B'$ est un borné de l'espace ϕ, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout borné B' de E'_b, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $T'^{,-1}B'$ soit inclus dans $\mathbb{K}^N$ et y soit borné.

La condition est nécessaire. Si T est surjectif et si $\{ p_m : m \in \mathbb{N} \} \sim \mathrm{cs}(E)$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$T'^{,-1}b^{\triangle}_{p_m} = \left\{ \boldsymbol{c} \in \phi : T'\boldsymbol{c} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e'_n \in b^{\triangle}_{p_m} \right\}$$

est un borné de ϕ donc est de dimension finie. La conclusion s'ensuit aussitôt car, T' étant injectif, nous avons alors

$$\mathrm{span}(T'T'^{,-1}b^{\triangle}_{p_m}) = E'_{b^{\triangle}_{p_m}} \cap \mathrm{span}(\{ e'_n : n \in \mathbb{N} \}).$$

La condition est suffisante. Vu l'indépendance linéaire des e'_n, il est clair que T' est injectif. Dès lors, pour tout $p \in \mathrm{cs}(E)$, $T'^{,-1}b^{\triangle}_p$ est une partie absolument convexe de ϕ, ne contenant aucune droite et d'enveloppe linéaire de dimension finie. Cela étant, $T'^{,-1}b^{\triangle}_p$ est un borné de ϕ et ainsi T est surjectif.∎

Corollaire A.4.5 *Si E est un espace de Fréchet non de Banach, il existe un sous-espace vectoriel fermé L de E tel que E/L soit isomorphe à ω.*

Preuve. Par hypothèse, il existe un système de semi-normes $\{ p_n : n \in \mathbb{N} \}$ équivalent à celui de E et tel que E'_{p_n} soit un sous-espace vectoriel propre de $E'_{p_{n+1}}$. Cela étant, nous pouvons choisir $e'_1 \in E'_{p_1}$ puis, pour tout entier $n \geq 2$, $e'_n \in E'_{p_n} \setminus E'_{p_{n-1}}$. Il est clair que les e'_n ainsi choisis sont linéairement indépendants et que l'opérateur linéaire continu et injectif

$$T\colon E \to \omega; \quad e \mapsto (\langle e, e'_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

vérifie l'hypothèse du théorème d'Eidelheit. Dès lors, T est surjectif. Il suffit donc de poser $L = \ker(T)$.∎

A.4.3 Retour au théorème de Borel

Il est temps maintenant de donner une première justification de l'introduction de ce théorème d'Eidelheit dans ces notes.

En fait, le théorème de Borel peut être interprété comme une application du théorème d'Eidelheit.

Théorème A.4.6 *Pour toute famille $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ de nombres complexes, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{D}^\alpha f(0) = c_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

Preuve. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\tau_\alpha \colon \mathcal{D}^\infty(\{\, x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \,\}) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto \mathrm{D}^\alpha f(0)$$

est bien sûr une fonctionnelle linéaire continue.

Il suffit alors de noter que $\mathcal{D}^\infty(\{\, x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \,\})$ est un espace de Fréchet et que ces fonctionnelles τ_α sont linéairement indépendantes et vérifient la condition d'Eidelheit. ∎

Appendice B

Comportement asymptotique des fonctions holomorphes sur un domaine de $\mathbb{C}$, [27]

Convention. Dans cet appendice, sauf mention explicite du contraire, la notation U désigne un domaine (= ouvert connexe) propre de $\mathbb{C}$ et D une partie non vide de la frontière ∂U de U.

B.1 Espace $\mathcal{O}(U)$

Définition. L'ensemble $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur U est bien sûr un espace vectoriel. De plus, pour tout compact $K \subset U$, $\|\cdot\|_K$ est une semi-norme sur $\mathcal{O}(U)$ et même une norme si K est d'intérieur non vide. Cela étant, $\{\, \|\cdot\|_K : K \text{ compact non vide de } U \,\}$ est un système de semi-normes sur $\mathcal{O}(U)$; on dit que $\mathcal{O}(U)$ est muni de la *convergence compacte*. Il est clair que si on choisit une suite $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de parties compactes de U tels que $K_1^\circ \neq \emptyset$, $K_m^{\circ,-} = K_m \subset K_{m+1}^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\cup_{m=1}^{\infty} K_m = U$, alors $\left\{\, \|\cdot\|_{K_m} : m \in \mathbb{N} \,\right\}$ est un système de semi-normes sur $\mathcal{O}(U)$ induisant la convergence compacte. La notation $\mathcal{O}(U)$ est réservée dès à présent à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(U)$ muni de la convergence compacte. Il s'agit clairement d'un espace à semi-normes dénombrables. En fait, on a beaucoup mieux.

Théorème B.1.1 *L'espace $\mathcal{O}(U)$ est un espace de Fréchet-Montel, c'est-à-dire un espace de Fréchet dont tout borné fermé est compact.*

Preuve. Nous savons déjà qu'il s'agit d'un espace à semi-normes dénombrables. Pour établir que $\mathcal{O}(U)$ est complet, il suffit de recourir au théorème de Weierstrass suivant: *si une suite de fonctions holomorphes sur U est uniformément de*

Cauchy sur tout compact de U, alors elle converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction holomorphe sur U.

Pour établir que $\mathcal{O}(U)$ est un espace de Montel, il suffit de recourir au théorème suivant de Montel: *de toute suite de fonctions holomorphes sur U uniformément bornée sur tout compact de U, on peut extraire une sous-suite uniformément de Cauchy sur tout compact de U.* ∎

B.2 Comportement asymptotique

Définitions. Une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ *admet un développement asymptotique en $u \in \partial U$* si les limites suivantes

$$a_0 := \lim_{\substack{z \to u \\ z \in U}} f(z)$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := \lim_{\substack{z \to u \\ z \in U}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j (z-u)^j}{(z-u)^n}$$

existent et sont finies.

Dans un tel cas,
a) nous disons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-u)^n$ est *le développement asymptotique de f en u*;
b) nous écrivons

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-u)^n \text{ en } u;$$

c) nous recourons aux notations

$$\begin{aligned} f^{[n]}(u) &= a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ f^{[0]}(z,u) &= f(z), \quad \forall z \in U, \\ f^{[n]}(z,u) &= \frac{f^{[n-1]}(z,u) - f^{[n-1]}(u)}{z-u}, \quad \forall z \in U, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(En fait nous avons alors

$$f^{[n]}(z,u) = \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j (z-u)^j}{(z-u)^n}, \quad \forall z \in U, \forall n \in \mathbb{N},$$

ainsi que

$$\lim_{\substack{z \to u \\ z \in U}} f^{[n]}(z,u) = f^{[n]}(u), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.)$$

B.3 Partie régulièrement asymptotique pour U

Introduisons la notion centrale de cet appendice.

Définition. L'ensemble D est *régulièrement asymptotique pour* U si, pour toute famille $(c_{u,n})_{u\in D, n\in\mathbb{N}_0}$ de nombres complexes, il existe une fonction f holomorphe sur U qui, en chacun des points u de D, admet le développement asymptotique $\sum_{n=0}^{\infty} c_{u,n}(z-u)^n$.

Rappelons que *toute fonction holomorphe et bornée sur* $U \setminus \{z_0\}$ *avec* $z_0 \in U$ *admet un prolongement holomorphe sur* U. Cette propriété élémentaire des fonctions holomorphes impose des conditions aux parties D réglièrement asymptotiques pour U.

Proposition B.3.1 *Si D est régulièrement asymptotique pour U, alors*
(a) *D ne contient aucun point isolé de ∂U;*
(b) *D n'a pas de point d'accumulation. En particulier D est dénombrable.*

Preuve. (a) est clair: ayant une limite en u point isolé de ∂U, f admet un prolongement holomorphe sur l'ouvert $U \cup \{u\}$ et ceci impose à la suite $(c_{u,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ de vérifier la condition de Cauchy.

(b) Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de points distincts de D convergente vers un point u_0 de D avec $u_0 \neq u_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Nous devons alors au moins avoir $\lim_{m\to\infty} c_{u_m,0} = c_{u_0,0}$, en contradiction avec la définition des parties régulièrement asymptotiques qui n'impose aucune condition à $c_{u_0,0}$.∎

Remarque. Ces restrictions sur les parties régulièrement asymptotiques pour U ne sont pas des conditions suffisantes. Ainsi $U = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\, 1/m : m \in \mathbb{N}\,\})$ est un domaine propre de $\mathbb{C}$ et $D = \{0\}$ est bien une partie non vide de ∂U, ne contenant aucun point isolé de ∂U et sans point d'accumulation. Cependant si $f \in \mathcal{O}(U)$ a un développement asymptotique en 0, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que f soit borné sur $V \cap U$. Il s'ensuit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/m \in V$, f admet un prolongement holomorphe sur $U \cup \{1/m\}$ et ... finalement en 0, ce qui est en contradiction avec la définition des parties régulièrement asymptotiques.□

B.4 But de cet appendice

Avec les définitions que nous venons d'introduire, le théorème de Ritt 2.3.4 peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème B.4.1 (Ritt, 1916, [21]) *L'ensemble* $\{0\}$ *est régulièrement asymptotique pour tout secteur de* $\mathbb{C}$.∎

Après ce résultat de Ritt, on trouve encore dans la littérature les résultats suivants relativement au comportement asymptotique des fonctions holomorphes sur un domaine de $\mathbb{C}$.

Théorème B.4.2 (Carleman, 1926, [9]) a) *Toute partie finie de la frontière d'un ouvert convexe et borné U de $\mathbb{C}$ est régulièrement asymptotique pour U.*

b) *Pour tout $R > 0$, l'ensemble $\{0\}$ est régulièrement asymptotique pour le domaine*

$$\{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \} \setminus \{ (x, 0) : x \leq 0 \}. \blacksquare$$

Le résultat suivant de Franklin est le corollaire "pratique" de son théorème.

Corollaire B.4.3 (Franklin, 1926, [10]) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit d_n une demi-droite fermée de sommet u_n dans $\mathbb{C}$. Si ces demi-droites sont disjointes deux à deux, alors $\{ u_n : n \in \mathbb{N} \}$ est régulièrement asymptotique pour $\mathbb{C} \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} d_n)$.* $\blacksquare$

Le but de cet appendice est d'établir un résultat généralisant tous ces résultats (cf. le théorème B.10.1 et son corollaire pratique B.10.3).

B.5 Quelques notations

Notations. A cet effet, introduisons les notations suivantes:
a) $\mathcal{A}(U, D)$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}(U)$ qui admettent un développement asymptotique en chacun des points de D; il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(U)$ que nous allons munir de la topologie induite par $\mathcal{O}(U)$;
b) T désigne l'opérateur linéaire

$$T\colon \mathcal{A}(U, D) \to \mathbb{C}^{D\times\mathbb{N}_0}; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u))_{(u,n)\in D\times\mathbb{N}_0}.$$

Cela étant, D est régulièrement asymptotique pour U si et seulement si cet opérateur T est surjectif.
c) pour tous $u \in D$ et $n \in \mathbb{N}_0$, $\eta_{u,n}$ est la fonctionnelle linéaire

$$\eta_{u,n}\colon \mathcal{A}(U, D) \to \mathbb{C}; \quad f \mapsto f^{[n]}(u).$$

Cela étant, D est régulièrement asymptotique pour U si et seulement si l'ensemble des fonctionnelles linéaires $\{ \eta_{u,n} : u \in D, n \in \mathbb{N}_0 \}$ *a la propriété d'interpolation* sur $\mathcal{A}(U, D)$.

Lemme B.5.1 *Les éléments de $\{ \eta_{u,n} : u \in D, n \in \mathbb{N}_0 \}$ sont linéairement indépendants sur l'ensemble $\mathcal{P}(U)$ des restrictions à U des polynômes donc également sur $\mathcal{A}(U, D)$.*

Preuve. Si ce n'est pas le cas, il existe une partie finie D' de D, un entier positif N et des nombres complexes non tous nuls $c_{u,n}$ pour $u \in D'$ et $n \in \{0, \ldots, N\}$ tels que

$$\left\langle P, \sum_{u \in D'} \sum_{n=0}^{N} c_{u,n} \eta_{u,n} \right\rangle = 0$$

pour tout polynôme P. Il existe alors $u_0 \in D'$ et $n_0 \in \{0, \ldots, \mathbb{N}\}$ tels que $c_{u_0,n_0} \neq 0$ et $c_{u_0,n} = 0$ pour tout $n \in \{n_0+1, \ldots, N\}$. Cela étant, la considération du polynôme

$$P(z) = (z - u_0)^{n_0} \cdot \prod_{u \in D' \setminus \{u_0\}} (z - u)^{N+1}$$

conduit aussitôt à une contradiction.∎

B.6 Préliminaires

Convention. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, u désigne un point de la frontière de U. En fait, nous préparons la considération du cas où $D = \{u\}$.

Notation. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathrm{A}_r(U, \{u\}) = \left\{ f \in \mathcal{A}(U, \{u\}) : \sup_{\substack{z \in U \\ |z-u| \leq 1/r}} |f(z)| < \infty \right\};$$

il s'agit bien sûr d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(U, \{u\})$. De plus, nous avons bien évidemment

$$\mathcal{A}(U, \{u\}) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathrm{A}_r(U, \{u\}).$$

Proposition B.6.1 *Pour tout $f \in \mathrm{A}_r(U, \{u\})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{[n]}(\cdot, u)$ est une fonction bornée sur $\{\, z \in U : |z - u| \leq 1/r \,\}$.*

Preuve. Le cas $n = 0$ est trivial car $f^{[0]}(\cdot, u) = f(\cdot)$.

Procédons par récurrence. Supposons $f^{[0]}(\cdot, u)$, ..., $f^{[n-1]}(\cdot, u)$ bornés sur l'ensemble $\{\, z \in U : |z - u| \leq 1/r \,\}$. Comme

$$f^{[n]}(z, u) = \frac{f^{[n-1]}(z, u) - f^{[n-1]}(u)}{z - u}$$

converge vers $f^{[n]}(u)$ si $z \to u$ dans U, il existe $s > r$ tel que $\left| f^{[n]}(z, u) \right|$ soit borné sur $\{\, z \in U : |z - u| \leq 1/s \,\}$ alors que sa bornation sur $\{\, z \in U : 1/s \leq |z - u| \leq 1/r \,\}$ est claire.∎

Notations. Cela étant, pour tous r, $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{u,r,n} \colon \mathrm{A}_r(U, \{u\}) \to [0, \infty[; \quad f \mapsto \|f\|_{K_n} + \left\| \sum_{j=0}^{n} \left| f^{[j]}(\cdot, u) \right| \right\|_{\{ z \in U : |z-u| \leq 1/r \}}$$

est une semi-norme sur $\mathrm{A}_r(U, \{u\})$. C'est même une norme sur $\mathrm{A}_r(U, \{u\})$ car U est un domaine alors que $K_n^\circ \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dès lors, $P_{u,r} := \{ p_{u,r,n} : n \in \mathbb{N} \}$ est un système dénombrable de normes sur $\mathrm{A}_r(U, \{u\})$ plus fort que celui induit par $\mathcal{A}(U, \{u\})$, c'est-à-dire par $\mathcal{O}(U)$. Au paragraphe suivant, nous allons établir que l'espace $(\mathrm{A}_r(U, \{u\}), P_{u,r})$ est un espace de Fréchet.

Les ensembles

$$V_{u,r,n} := \{ f \in \mathrm{A}_r(U, \{u\}) : p_{u,r,n}(f) \leq 1/n \} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

constituent alors une base fondamentale de voisinages de 0 dans $\mathrm{A}_r(U, \{u\})$ et, pour toute suite $\boldsymbol{m} = (m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{N}$,

$$B_{u,r,\boldsymbol{m}} := \bigcap_{n=1}^{\infty} m_n V_{u,r,n}$$

est un borné absolument convexe et fermé de $\mathrm{A}_r(U, \{u\})$. En fait, on peut dire bien davantage.

Proposition B.6.2 *Pour tous $u \in \partial U$, $r \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $B_{u,r,\boldsymbol{m}}$ est un compact absolument convexe de $\mathcal{O}(U)$ donc de $\mathcal{A}(U, \{u\})$.*

Preuve. Comme $B_{u,r,\boldsymbol{m}}$ est un borné absolument convexe de l'espace de Fréchet-Montel $\mathcal{O}(U)$, il suffit de prouver que $B_{u,r,\boldsymbol{m}}$ est une partie séquentiellement fermée de $\mathcal{O}(U)$.

Soit donc $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $B_{u,r,\boldsymbol{m}}$ convergente vers f_0 dans $\mathcal{O}(U)$.

Etablissons d'abord que f_0 admet un développement asymptotique en u donné par

$$f_0^{[j]}(u) = \lim_{k \to \infty} f_k^{[j]}(u), \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Le cas $j = 0$ se traite comme suit. Vu la définition des semi-normes de $\mathrm{A}_r(U, \{u\})$, il est clair que nous avons $f_k(z) \to f_0(z)$ en tout $z \in U$. Cela étant, de la majoration

$$\left\| f^{[0]}(\cdot, u) \right\|_{\{ z \in U : |z-u| \leq 1/r \}} \leq p_{u,r,1}(f), \quad \forall f \in \mathrm{A}_r(U, \{u\}),$$

nous tirons

$$f_k^{[0]}(\cdot, u) \rightrightarrows f_0^{[0]}(\cdot, u),$$

la convergence uniforme ayant lieu sur l'ensemble $\{\, z \in U : |z-u| \leq 1/r \,\}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\lim_{\substack{z \in U \\ z \to u}} f_k^{[0]}(z,u) = f_k^{[0]}(u).$$

Dès lors, le théorème de permutation des limites (cf. [25], p. 42) assure que les limites

$$\lim_{\substack{z \in U \\ z \to u}} \lim_{k \to \infty} f_k^{[0]}(z,u) \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} \lim_{\substack{z \in U \\ z \to u}} f_k^{[0]}(z,u)$$

existent, sont finies et sont égales, donc que

$$f_0^{[0]}(u) = \lim_{k \to \infty} f_k^{[0]}(u).$$

Les autres cas se traitent de la même manière, par récurrence, à partir des majorations

$$\left\| f^{[j]}(\cdot,u) \right\|_{\{\, z \in U : |z-u| \leq 1/r \,\}} \leq p_{u,r,j}(f), \quad \forall f \in \mathrm{A}_r(U,\{u\}),$$

valables pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Il est alors aisé de vérifier que f_0 appartient à $B_{u,r,\boldsymbol{m}}$ par passage à la limite dans les majorations.

D'où la conclusion.∎

B.7 Si D est fini

Convention. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, D désigne une partie finie $\{u_1, \ldots, u_J\}$ de ∂U.

Notations. a) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, nous posons

$$\mathrm{A}_r(U,D) := \bigcap_{u \in D} \mathrm{A}_r(U,\{u\}) = \left\{ f \in \mathcal{A}(U,D) : \sup_{\substack{z \in U \\ |z-u| \leq 1/r}} |f(z)| < \infty, \forall u \in D \right\}.$$

Il s'agit bien sûr d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(U,D)$. De plus, nous avons

$$\mathcal{A}(U,D) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathrm{A}_r(U,D).$$

b) Pour tous r, $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{D,r,n} \colon \mathrm{A}_r(U,D) \to [0,\infty[; \quad f \mapsto \sup_{u \in D} p_{u,r,n}(f)$$

est une norme sur $\mathrm{A}_r(U,D)$ et

$$P_{D,r} := \{\, p_{D,r,n} : n \in \mathbb{N} \,\}$$

un système dénombrable de normes sur $\mathrm{A}_r(U,D)$, munissant cet espace vectoriel d'une topologie localement convexe plus fine que celle induite par $\mathcal{O}(U)$.

A partir de maintenant, dans ce paragraphe, la notation

$$\mathrm{A}_r(U,D) = \mathrm{A}_r(U,\{u_1,\ldots,u_J\})$$

réfère à l'espace à normes dénombrables

$$\mathrm{A}_r(U,D) = \mathrm{A}_r(U,\{u_1,\ldots,u_J\}) = (\mathrm{A}_r(U,D), P_{D,r}).$$

Les ensembles

$$V_{D,r,n} := \{\, f \in \mathrm{A}_r(U,D) : p_{D,r,n} \leq 1/n \,\} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

constituent alors une base fondamentale de voisinages de 0 dans cet espace $\mathrm{A}_r(U,D)$.

c) Pour toute suite $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$,

$$B_{D,\boldsymbol{r}} := \bigcap_{u\in D} B_{u,r_1,\boldsymbol{r}_1} = \bigcap_{u\in D} \bigcap_{n=1}^{\infty} r_{n+1} V_{u,r_1,n},$$

où $\boldsymbol{r}_1$ est la suite $(r_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, est alors un borné absolument convexe de $\mathrm{A}_{r_1}(U,D)$, qui est aussi un compact de $\mathcal{O}(U)$.

Proposition B.7.1 *Si D est fini, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_r(U,D)$ est un espace de Fréchet.*

Preuve. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{A}_r(U,D)$. Etant de Cauchy dans l'espace de Fréchet $\mathcal{O}(U)$, elle converge déjà dans $\mathcal{O}(U)$ vers une fonction f_0.

Prouvons à présent que cette fonction f_0 appartient à $\mathrm{A}_r(U,D)$. De fait, pour tous $u \in D$ et $j \in \mathbb{N}_0$, d'une part, nous avons

$$\lim_{\substack{z\in U\\ z\to u}} f_k^{[j]}(z,u) = f_k^{[j]}(u), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et, d'autre part,

$$f_k^{[j]}(\cdot,u) \rightrightarrows,$$

la convergence uniforme ayant lieu sur $\{\, z \in U : |z-u| \leq 1/r \,\}$. Dès lors, le théorème de permutation des limites (cf. [25], p. 42) affirme que les limites

$$\lim_{\substack{z\in U\\ z\to u}} \lim_{k\to\infty} f_k^{[j]}(z,u) \;\text{ et }\; \lim_{k\to\infty} \lim_{\substack{z\in U\\ z\to u}} f_k^{[j]}(z,u)$$

existent, sont finies et sont égales. Une preuve directe par récurrence sur $j \in \mathbb{N}_0$ établit ensuite que f_0 admet un comportement asymptotique en u pour U.

Cela étant, on établit aisément comme d'habitude que $f_m \to f_0$ dans $\mathrm{A}_r(U,D)$. ∎

Proposition B.7.2 *Si D est fini, alors $\left\{ B_{D,\boldsymbol{r}} : \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$ est une représentation quasi-*LB *de l'espace $\mathcal{A}(U, D)$ composée de compacts absolument convexes.*

Preuve. Nous savons déjà que les ensembles $B_{D,\boldsymbol{r}}$ sont des compacts absolument convexes de $\mathcal{A}(U, D)$. De plus, pour tous $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tels que $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{s}$, il est clair que $B_{D,\boldsymbol{r}}$ est inclus dans $B_{D,\boldsymbol{s}}$.

Pour conclure, il nous reste à établir que $\cup_{\boldsymbol{r}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} B_{D,\boldsymbol{r}}$ est égal à $\mathcal{A}(U, D)$. C'est direct: pour tout $f \in \mathcal{A}(U, D)$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathrm{A}_r(U, D)$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n tel que $f \in s_n V_{D,r,n}$. Cela étant, f appartient à $B_{D,\boldsymbol{r}}$ où $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini selon $r_1 = r$ et $r_n = s_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$.∎

Remarque. Cela étant, la théorie des espaces quasi-(LB) (cf. [34]) procure une autre méthode pour établir que, pour toute partie finie D de ∂U et tout $r \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathrm{A}_r(U, D)$ est un espace de Fréchet.

En effet, selon cette construction, pour toute suite $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, nous savons que l'espace $(\mathrm{A}_{a_1}(U, D), \{ p_{\boldsymbol{a},n} : n \in \mathbb{N} \})$ est de Fréchet pour autant que:
(a) $R_{a_1,\ldots,a_n} := \cup_{*\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} B_{D,(a_1,\ldots,a_n,*)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, comme on le vérifie aisément,

$$R_{a_1} = \mathrm{A}_{a_1}(U, D) \text{ et } R_{a_1,\ldots,a_n} = (a_2 V_{D,a_1,1}) \cap \ldots \cap (a_n V_{D,a_1,n-1})$$

pour tout $n \geq 2$;
(b) $E_{a_1,\ldots,a_n} = \mathrm{span}(R_{a_1,\ldots,a_n}) = \mathrm{A}_{a_1}(U, D)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(c) $E_{\boldsymbol{a}} = \cap_{n=1}^{\infty} E_{a_1,\ldots,a_n} = \mathrm{A}_{a_1}(U, D)$;
(d) $p_{\boldsymbol{a},n}$ est la semi-norme déterminée par l'ensemble $E_{\boldsymbol{a}} \cap \frac{1}{n} R_{a_1,\ldots,a_n}$.□

Définition. Si $D \subset \partial U$ est fini, la suite $(\mathrm{A}_r(U, D))_{r\in\mathbb{N}}$ d'espaces de Fréchet est emboîtée en croissant et, pour tous r, $s \in \mathbb{N}$ tels que $r < s$, l'injection canonique de $\mathrm{A}_r(U, D)$ dans $\mathrm{A}_s(U, D)$ est bien sûr continue; nous pouvons donc considérer la limite inductive correspondante.

Il s'agit clairement d'un espace (LF) car $\mathcal{A}(U, D) = \cup_{r=1}^{\infty} \mathrm{A}_r(U, D)$ est muni d'une topologie localement convexe séparée induisant une topologie plus faible sur chacun des espaces définissant cette limite inductive.

Cela étant, si $D \subset \partial U$ est fini, nous introduisons *l'espace* (LF)

$$\mathrm{A}(U, D) = \mathrm{ind}_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_r(U, D)$$

et remarquons que l'opérateur identité

$$\mathrm{id} \colon \mathrm{A}(U, D) \to \mathcal{A}(U, D)$$

est continu.

Notations. Si $D = \{u_1, \ldots, u_J\}$ est une partie finie de ∂U, nous allons recourir aux notations suivantes:
(a) pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, T_j désigne l'application

$$T_j \colon \mathrm{A}(U, D) \to \omega; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u_j))_{n \in \mathbb{N}_0};$$

il s'agit évidemment d'un opérateur linéaire continu;
(b) pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, nous posons

$$L_j := \mathrm{span}(\{\, \eta_{u_j,n} : n \in \mathbb{N}_0 \,\});$$

il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel du dual de $\mathrm{A}(U, D)$;
(c) nous posons $L := \mathrm{span}(L_1 \cup \ldots \cup L_J)$.

A présent, nous sommes armés pour aborder l'étude de conditions nécessaires et suffisantes assurant que D est régulièrement asymptotique pour U.

Définition. Etant donné $r \in \mathbb{N}$, la partie finie D de ∂U est *r-régulièrement asymptotique pour U* si la restrcition de T à $\mathrm{A}_r(U, D)$, c'est-à-dire

$$T_r \colon \mathrm{A}_r(U, D) \to \mathbb{C}^{D \times \mathbb{N}_0}; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u))_{(u,n) \in D \times \mathbb{N}_0},$$

est surjectif.

Proposition B.7.3 *La partie finie D de ∂U est régulièrement asymptotique pour U si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que D soit r-régulièrement asymptotique pour U.*

Preuve. La suffisance de la condition est évidente.
La condition est nécessaire. Il suffit de noter que l'opérateur

$$T \colon \mathrm{ind}_r \mathrm{A}_r(U, D) \to \mathbb{C}^{D \times \mathbb{N}_0}; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u))_{(u,n) \in D \times \mathbb{N}_0}$$

étant linéaire, continu et surjectif, le corollaire A.3.2 assure l'existence de $r \in \mathbb{N}$ tel que $T\mathrm{A}_r(U, D) = C^{D \times \mathbb{N}_0}$.∎

Corollaire B.7.4 *Si la partie finie D de ∂U est régulièrement asymptotique pour U, alors le noyau de T a $2^{\aleph_0}$ pour dimension algébrique.*

Preuve. La dimension algébrique de $\mathrm{A}(U, D) = \mathrm{ind}_r \mathrm{A}_r(U, D)$ est égale à $2^{\aleph_0}$. De plus, il existe $r > 0$ tel que T_r soit surjectif. Pour conclure, il suffit alors d'établir que la dimension algébrique du noyau de T_r est égale à $2^{\aleph_0}$. Si ce n'est pas le cas, $\ker(T_r)$ est de dimension finie et a un complément topologique L. Cela étant, $T_r \colon L \to \mathbb{C}^{D \times \mathbb{N}_0}$ est un isomorphisme entre deux espaces de Fréchet dont l'un a des normes continues et l'autre aucune, ce qui est contradictoire.∎

Théorème B.7.5 *La partie finie D de ∂U est régulièrement asymptotique pour U si et seulement si, pour tout $u \in D$, $\{u\}$ est régulièrement asymptotique pour U.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Le cas où D est un singleton étant trivial, considérons le cas $D = \{u_1, \ldots, u_J\}$ avec $J \geq 2$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$,

$$T_j \colon \mathrm{A}(U, D) \to \omega; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u_j))_{n \in \mathbb{N}_0}$$

étant une surjection linéaire continue, le corollaire A.3.2 procure $r_j \in \mathbb{N}$ tel que $T_j \mathrm{A}_{r_j}(U, D) = \omega$.

Pour conclure, nous allons établir que l'ensemble $\{\, \eta_{u,n} : u \in D, n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ a la propriété d'interpolation sur l'espace de Fréchet $\mathrm{A}_r(U, D)$ si $r = \sup\{r_1, \ldots, r_J\}$.

Comme les fonctionnelles $\eta_{u,n}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathrm{A}_r(U, D)$, il suffit, vu le théorème d'interpolation d'Eidelheit, d'établir que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel

$$\mathrm{span}(\{\, \eta_{u,n} : u \in D, n \in \mathbb{N}_0 \,\}) \cap \mathrm{span}(V_{D,r,s}^{\triangle})$$

est de dimension finie.

Fixons $s \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, la restriction de T_j à $\mathrm{A}_r(U, D)$ est surjective. Dès lors, la dimension de

$$\mathrm{span}(\{\, \eta_{u_j,n} : n \in \mathbb{N}_0 \,\}) \cap \mathrm{span}(V_{D,r,s}^{\triangle})$$

est finie: il existe donc $N(j) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(r_0, \ldots, r_N \in \mathbb{K}; r_N \neq 0; \sum_{n=0}^{N} r_n \eta_{u_j,n} \in \mathrm{span}(V_{D,r,s}^{\triangle}) \right) \Rightarrow N \leq N(j).$$

Pour conclure, nous allons prouver que la condition

$$\eta = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=0}^{N} r_{j,n} \eta_{u_j,n} \in \mathrm{span}(V_{D,r,s}^{\triangle}) \ \text{ avec } \ N > \sup\{s, N(1), \ldots, N(J)\}$$

implique $r_{j,N} = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$.

A cet effet, procédons par contradiction. Supposons l'existence d'une telle fonctionnelle η avec $N > \sup\{s, N(1), \ldots, N(J)\}$ et $r_{k,N} \neq 0$ pour un indice $k \in \{1, \ldots, J\}$. Nous savons qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\eta \in tV_{D,r,s}^{\triangle}$.

Construisons un polynôme particulier Q de la manière suivante. Le polynôme

$$P(z) = \prod_{\substack{1 \le j \le J \\ j \ne k}} (z - u_j)^{N+1}$$

s'écrit aussi sous la forme

$$P(z) = c_0 + c_1(z - u_k) + \cdots + c_{(N+1)(J-1)}(z - u_k)^{(N+1)(J-1)}$$

avec $c_0 \neq 0$. Choisissons une boule fermée B de $\mathbb{C}$, centrée à l'origine et contenant

$$K_s \cup \left(\bigcup_{j=1}^{J} \{ \, z \in U : |z - u_j| \le 1/r \, \} \right),$$

puis posons

$$C_1 := \sup \left\{ \left\| \frac{P(.)}{(\cdot - u_j)^h} \right\|_B : h \in \{0, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, J\} \setminus \{k\} \right\},$$

et

$$C_2 := \sup \left\{ \left\| c_h + \cdots + c_{(N+1)(J-1)}(z - u_k)^{(N+1)(J-1)-h} \right\|_B : h = 0, \ldots, s \right\}$$

et enfin introduisons le polynôme

$$Q(z) := \frac{P(z)}{2(C_1 + C_2)(s+1)^2}.$$

Pour tout $g \in V_{D,r,s}$, il est clair que Qg appartient à $\mathrm{A}_r(U, D)$ mais nous avons beaucoup mieux: Qg appartient à $V_{D,r,s}$ car
(a) pour tout $j \in \{1, \ldots, J\} \setminus \{k\}$ et $h \in \{0, \ldots, s\}$, nous avons

$$(Qg)^{[h]}(z, u_j) = \frac{Q(z)}{(z - u_j)^h} g(z)$$

donc

$$\left|(Qg)^{[h]}(z, u_j)\right| \le \frac{C_1}{2(C_1 + C_2)(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} \le \frac{1}{2s(s+1)^2}$$

pour tout $z \in U$ tel que $|z - u_j| \le 1/r$;
(b) pour tout $h \in \{0, \ldots, s\}$, nous avons

$$(Qg)^{[h]}(z, u_k) = \frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{h-1} c_l g^{[h-l]}(z, u_k) + \left(c_h + \cdots + c_{(N+1)(J-1)}(z - u_k)^{(N+1)(J-1)-h}\right) g^{[0]}(z, u_k)}{2(C_1 + C_2)(s+1)^2}$$

avec $|c_h| \leq C_2$ car c_h est la valeur de $c_h + \cdots + c_{(N+1)(J-1)}(z-u_k)^{(N+1)(J-1)-h}$ en $z = u_k$. Au total, nous obtenons

$$\left|(Qg)^{[h]}(z,u_k)\right| \leq \frac{(s+1)C_2}{2(C_1+C_2)(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} \leq \frac{1}{2s(s+1)}$$

pour tout $z \in U$ tel que $|z-u_k| \leq 1/r$;
(c) pour tout $z \in K_s$, nous avons

$$|(Qg)(z)| \leq \frac{C_1}{2(C_1+C_2)(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} \leq \frac{1}{2s(s+1)^2}.$$

A ce stade, considérons la fonctionnelle linéaire continue

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} r_{k,n} \sum_{l=0}^{n} Q^{[n-l]}(u_k)\eta_{u_k,l}$$

sur $\mathrm{A}_r(U,D)$. Dans ξ, le coefficient de $\eta_{u_k,N}$ égal à $r_{k,N}Q^{[0]}(u_k)$ diffère de 0. De plus, comme nous avons $N > N(k)$, ξ n'appartient pas à $\mathrm{span}(V_{D,r,s}^{\triangle})$; il existe donc $f \in V_{D,r,s}$ tel que $|\langle f,\xi\rangle| > t$.

Comme Qf appartient à $V_{D,r,s}$, nous arrivons finalement à la contradiction suivante:
(a) d'une part, nous avons $|\langle Qf,\eta\rangle| \leq t$ car $\eta \in tV_{D,r,s}^{\triangle}$;
(b) d'autre part, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
|\langle Qf,\eta\rangle| &= \left|\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=0}^{N} r_{j,n}\left\langle Qf,\eta_{u_j,n}\right\rangle\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} r_{k,n}\left\langle Qf,\eta_{u_k,n}\right\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N} r_{k,n}\sum_{l=0}^{n} Q^{[n-l]}(u_k)f^{[l]}(u_k)\right| \\
&= \left|\left\langle f, \sum_{n=0}^{N} r_{k,n}\sum_{l=0}^{n} Q^{[n-l]}(u_k)\eta_{u_k,l}\right\rangle\right| \\
&= |\langle f,\xi\rangle| > t.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion.∎

A ce stade, nous pouvons généraliser le théorème 4 de [36] de la manière suivante.

Proposition B.7.6 *La partie finie $D = \{u_1,\ldots,u_J\}$ de ∂U est régulièrement asymptotique pour U si et seulement si la condition (*) suivante est satisfaite:*

(*) *il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout compact* $K \subset U$ *et tout* $j_0 \in \{1, \ldots, J\}$*, il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $h > 0$*, il existe* $f \in \mathrm{A}_r(U, D)$ *vérifiant*

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in K \cup \left(\bigcup_{j=1}^{J} \{ z \in U : |z - u_j| \leq 1/r \} \right),$$

et

$$\left| f^{[p]}(u_{j_0}) \right| > h.$$

Preuve. La condition est nécessaire. Vu la proposition B.7.3, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que l'opérateur linéaire continu

$$T_r \colon \mathrm{A}_r(U, D) \to \mathbb{C}^{D \times \mathbb{N}_0}; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u))_{(u,n) \in D \times \mathbb{N}_0}$$

soit surjectif. Considérons alors un compact $K \subset U$ et un entier $j_0 \in \{1, \ldots, J\}$ et choisissons enfin un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_s$.

Comme la suite de fonctionnelles linéaires continues $(\eta_{u_{j_0}, n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathrm{A}_r(U, D)$ a la propriété d'interpolation, le théorème d'interpolation d'Eidelheit assure que l'espace vectoriel

$$\operatorname{span}(\{ \eta_{u_{j_0}, n} : n \in \mathbb{N}_0 \}) \cap \operatorname{span}(V_{D,r,s}^{\triangle})$$

est de dimension finie. Dès lors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\eta_{u_{j_0}, p}$ n'appartient pas à $\operatorname{span}(V_{D,r,s}^{\triangle})$. Cela étant, pour tout $h > 0$, il existe $f \in V_{D,r,s}$ tel que

$$\left| f^{[p]}(u_{j_0}) \right| = \left| \langle f, \eta_{u_{j_0}, p} \rangle \right| > h,$$

ce qui permet de conclure à la nécessité de la condition.

La condition est suffisante. Vu le théorème précédent, il suffit d'établir que, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, l'opérateur linéaire continu

$$S_j \colon \mathrm{A}_r(U, D) \to \omega; \quad f \mapsto (f^{[n]}(u_j))_{n \in \mathbb{N}_0}$$

est surjectif.

Fixons donc $j \in \{1, \ldots, J\}$. Comme $\{ \eta_{u_j, n} : n \in \mathbb{N}_0 \}$ est une partie du dual de l'espace de Fréchet $\mathrm{A}_r(U, D)$ dont les éléments sont linéairement indépendants, l'opérateur S_j est surjectif si et seulement si la suite $(\eta_{u_j, n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ a la propriété d'interpolation sur $\mathrm{A}_r(U, D)$. Vu le théorème d'interpolation d'Eidelheit, pour conclure, il suffit donc d'établir que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel

$$\operatorname{span}(\{ \eta_{u_j, n} : n \in \mathbb{N}_0 \}) \cap \operatorname{span}(V_{D,r,s}^{\triangle})$$

est de dimension finie.

Fixons $s \in \mathbb{N}$ et désignons par p_j le premier entier pour lequel la condition (*) de l'énoncé est satisfaite pour $K = K_s$ et $j_0 = j$. Il existe alors $k > 0$ tel que, pour tout $g \in \mathrm{A}_r(U, D)$ vérifiant

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in H := K_s \cup \left(\bigcup_{u \in D} \{ z \in U : |z - u| \leq 1/r \} \right),$$

nous avons

$$\left| g^{[n]}(u_j) \right| \leq k, \quad \forall n \in \{0, \ldots, p_j - 1\}.$$

Pour conclure, nous allons établir par contradiction que, dans ces conditions, aucune combinaison linéaire du type

$$\eta = \sum_{n=0}^{N} a_n \eta_{u_j,n} \text{ avec } N > p_j + s \text{ et } a_N \neq 0$$

n'appartient à $\operatorname{span}(V^{\triangle}_{D,r,s})$.

Supposons donc qu'une telle fonctionnelle $\eta = \sum_{n=0}^{N} a_n \eta_{u_j,n}$ appartienne $hV^{\triangle}_{D,r,s}$ avec $h > 0$.

Cela étant, choisissons un entier $d \in \mathbb{N}$ supérieur au diamètre de H et posons ensuite

$$\begin{aligned} a &= \sup\{|a_0|, \ldots, |a_N|\}, \\ P(z) &= (z - u_j)^{N - p_j} \prod_{\substack{1 \leq k \leq J \\ k \neq j}} (z - u_k)^N, \\ L &= \sup \left\{ \left| P^{[n]}(u_j) \right| : n = 0, \ldots, N \right\}. \end{aligned}$$

Vu la condition (*) de l'énoncé, il existe $f \in \mathrm{A}_r(U, D)$ tel que

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in H,$$

et

$$\left| f^{[p_j]}(u_j) \right| > \frac{s(s+2)hd^{NJ} + 2LaN^2k}{\left| a_N P^{[N-p_j]}(u_j) \right|}.$$

Cela étant, introduisons la fonction $g := Pf$. Bien sûr, g appartient à $\mathrm{A}_r(U, D)$. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned} & p_{D,r,s}(g) \\ &= \sup_{u \in D} \left(\|Pf\|_{K_s} + \sup \left\{ \sum_{l=0}^{s} \left| \frac{P(z) f(z)}{(z-u)^l} \right| : z \in U, |z - u| \leq 1/r \right\} \right) \\ &\leq d^{NJ} + (s+1) d^{NJ} = (s+2) d^{NJ}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, notons que nous avons également $\left|f^{[N-l]}(u_j)\right| \le k$ pour tout $l \in \{N-p_j+1,\ldots,N\}$ donc successivement

$$\begin{aligned}
&|\langle g,\eta\rangle| \\
=\ & \left|\sum_{n=0}^{N} a_n g^{[n]}(u_j)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n (Pf)^{[n]}(u_j)\right| \\
=\ & \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{l=0}^{n} P^{[l]}(u_j) f^{[n-t]}(u_j)\right| = \left|\sum_{n=N-p_j}^{N} a_n \sum_{l=N-p_j}^{n} P^{[l]}(u_j) f^{[n-l]}(u_j)\right| \\
\ge\ & |a_N| \left|P^{[N-p_j]}(u_j) f^{[p_j]}(u_j)\right| - |a_N| \sum_{l=N-p_j+1}^{N} \left|P^{[l]}(u_j)\right| \left|f^{[N-l]}(u_j)\right| \\
& - \sum_{n=N-p_j}^{N-1} |a_n| \sum_{l=N-p_j}^{n} \left|P^{[l]}(u_j)\right| \left|f^{[n-l]}(u_j)\right| \\
\ge\ & s(s+2)hd^{NJ} + 2LaN^2k - aNLk - N^2aLk > s(s+2)hd^{NJ}.
\end{aligned}$$

D'où une contradiction et nous concluons.∎

Définitions. Pour tout $u \in \mathbb{C}$ et toute partie propre A de $\mathbb{C}$, nous notons

$$\mathrm{d}(u,A) = \inf\{\,|u-z| : z \in A\,\}$$

la *distance* de u à A et

$$\mathrm{e}(u,A) = \sup\{\,|u-z| : z \in A\,\}$$

l'*écart* de u à A.

Cela étant, la frontière ∂U de U est *quasi-connectée en* $u \in \partial U$ si, pour tous ε, $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \varepsilon < \delta$, il existe une partie connexe C de ∂U telle que

$$\mathrm{d}(u,C) < \varepsilon \mathrm{e}(u,C) \;\text{ et }\; \mathrm{e}(u,C) < \delta.$$

Théorème B.7.7 *Si ∂U est quasi-connecté en tout point de la partie finie D de ∂U, alors D est régulièrement asymptotique pour U.*

Preuve. Soit $D = \{u_1,\ldots,u_J\}$ avec $J \in \mathbb{N}$. Comme D est fini, il existe $r > 0$ tel que les boules $\{\,z \in C : |z-u_j| \le r\,\}$ soient disjointes deux à deux pour $j \in \{1,\ldots,J\}$.

Cela étant, nous allons établir que la condition (*) de la proposition précédente est satisfaite pour tout compact $K \subset U$ et tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ par l'entier 1.

Quels que soient a, $b \in \mathbb{C}$, la fonction $|z-a| \cdot |z-b|$ étant continue sur le compact

$$L := H \times \{\, a \in \mathbb{C} : |a - u_j| \leq 1/r \,\} \times \{\, b \in \mathbb{C} : |b - u_j| \leq 1/r \,\}$$

de $\mathbb{C}^3$, avec $H := K \cup (\cup_{u \in D} \{\, c \in \mathbb{C} : |c - u| \leq 1/r \,\})$, il existe $A > 0$ tel que la majoration $|z-a| \cdot |z-b| < A^2$ a lieu pour tout $(z, a, b) \in L$.

Vu la quasi-connexité de ∂U en u_j, pour tout $h > 0$, il existe une partie connexe C de ∂U telle que

$$0 \leq \mathrm{d}(u_j, C) < \inf \left\{ \frac{1}{2r}, \frac{1}{16A^2h^2} \right\} \cdot \mathrm{e}(u_j, C) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}(u_j, C) < \frac{1}{r}.$$

Par conséquent, vu la connexité de C, il existe des points a, $b \in C$ tels que

$$|u_j - a| < \inf \left\{ \frac{1}{2r}, \frac{1}{16A^2h^2} \right\} |u_j - b| \,.$$

Il existe ensuite une détermination $g(\cdot)$ de $\sqrt{(\cdot - a)(\cdot - b)}$ holomorphe sur $U \cup V$ où V est un voisinage ouvert de D. Cela étant, $f = g/A$
a) appartient à $\mathrm{A}_r(U, D)$;
b) vérifie $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in H$;
c) donne lieu à

$$\begin{aligned} \left| f^{[1]}(u_j) \right| &= \frac{1}{A} \lim_{\substack{z \in \Omega \\ z \to u_j}} \left| \frac{g(z) - g(u_j)}{z - u_j} \right| = \frac{|2u_j - (a+b)|}{2A\, |u_j - a|^{1/2}\, |u_j - b|^{1/2}} \\ &\geq \frac{1 - \left| \frac{u_j - a}{u_j - b} \right|}{2A \left| \frac{u_j - a}{u_j - b} \right|^{1/2}} > \frac{1 - 1/2}{2A \cdot \frac{1}{4Ch}} = h. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.∎

Remarque. Signalons dès à présent qu'au paragraphe B.10, nous établissons que *si la composante connexe de $u \in \partial U$ dans ∂U contient plus d'un point, alors ∂U est quasi-connecté en u.* En particulier, *si U est simplement connexe, ∂U est quasi-connecté en tout $u \in \partial U$.* Ceci établit que le résultat précédent est bien une généralisation des théorèmes de Carleman.□

B.8 Si D est infini

Comme toute partie régulièrement asymptotique $D \subset \partial U$ pour U est dénombrable, nous sommes amenés à introduire les notations suivantes pour étudier le cas où D n'est pas fini.

Notations. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, nous allons systématiquement recourir aux notations suivantes:
a) D est la partie $\{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$ de ∂U.
b) pour toute suite $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$, nous posons

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D) &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{A}_{r_j}(U, \{u_j\}) \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A}(U, D) : \sup_{\substack{z \in U \\ |z-u_j| \leq 1/r_j}} |f(z)| < \infty, \forall j \in \mathbb{N} \right\}.\end{aligned}$$

De la sorte, $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(U, D)$ et

$$\bigcup_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D) = \mathcal{A}(U, D).$$

c) pour tout $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{D,\boldsymbol{r},n} \colon \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D) \to [0, \infty[; \quad f \mapsto \sup \{ p_{u_j, r_j, n}(f) : j = 1, \ldots, n \}$$

est une norme sur $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ et $P_{D,\boldsymbol{r}} = \{ p_{D,\boldsymbol{r},n} : n \in \mathbb{N} \}$ un système dénombrable de normes sur $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$, munissant cet espace vectoriel d'une topologie localement convexe plus fine que celle induite par $\mathcal{O}(U)$, donc séparée. Cela étant, la notation $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ réfère à l'espace localement convexe

$$\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D) = (\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D), P_{D,\boldsymbol{r}})$$

dont

$$V_{D,\boldsymbol{r},n} := \{ f \in \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D) : p_{D,\boldsymbol{r},n}(f) \leq 1/n \} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

est une suite fondamentale de voisinages de 0.
d) nous fixons une fois pour toutes une partition infinie

$$\{ \{ n_{j,k} : k \in \mathbb{N} \} : j \in \mathbb{N} \}$$

de $\{ 2n : n \in \mathbb{N} \}$ et, pour tout $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, posons

$$B_{D,\boldsymbol{r}} := \bigcap_{j=1}^{\infty} B_{u_j, r_{2j-1}, \boldsymbol{r}_j}$$

où $\boldsymbol{r}_j := (r_{n_{j,k}})_{k \in \mathbb{N}}$. Il est clair que ces ensembles $B_{D,\boldsymbol{r}}$ sont des compacts absolument convexes de $\mathcal{A}(U, D)$ et même que, pour tout $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $B_{D,\boldsymbol{r}}$ est un borné de l'espace $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}'}(U, D)$ où $\boldsymbol{r}' := (r_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Bien sûr, ces notations dépendent fortement de la numérotation choisie des éléments de D mais nous allons voir que toute numérotation de D convient.

Avec ces notations, le résultat suivant est clair.

Proposition B.8.1 *Si $D = \{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$, la famille $\left\{ B_{D,\boldsymbol{r}} : \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$ est une quasi-*LB *représentation de l'espace $\mathcal{A}(U, D)$, dont les éléments sont des compacts absolument convexes.*∎

Proposition B.8.2 *Si $D = \{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$, alors, pour tout $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,* $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ *est un espace de Fréchet.*

Preuve. On peut soit recourir à une preuve directe tout comme dans le cas où D est fini, soit utiliser la technique des espaces quasi-LB, ce que nous allons faire.

Pour tout $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous sommes amenés à poser

$$B_{D,r_1,\ldots,r_n} = \bigcup_{* \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} B_{D,(r_1,\ldots,r_n,*)}$$

puis

$$F_{D,r_1,\ldots,r_n} = \mathrm{span}(B_{D,r_1,\ldots,r_n})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin à introduire

$$F_{D,\boldsymbol{r}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{D,r_1,\ldots,r_n}.$$

En fait, nous obtenons $F_{D,\boldsymbol{r}} = \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}'}(U, D)$; il s'agit bien d'un espace de Fréchet et ceci procure bien que $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ est un espace de Fréchet.∎

Définition. Si $D = \{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$, nous avons

$$\mathcal{A}(U, D) = \bigcup_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$$

et, pour tous $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tels que $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{s}$, l'injection canonique de $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ dans $\mathrm{A}_{\boldsymbol{s}}(U, D)$ est un opérateur linéaire continu. Dès lors, nous pouvons munir l'espace vectoriel $\mathcal{A}(U, D)$ de la topologie τ de la limite inductive de cette famille d'espaces de Fréchet. Bien sûr, τ est une topologie plus fine que celle de l'espace $\mathcal{A}(U, D)$. Nous posons

$$\mathrm{A}(U, D) = (\mathrm{A}(U, D), \tau) = \mathrm{ind}_{\boldsymbol{r}} \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D);$$

il s'agit d'un espace localement convexe qui n'est pas un espace (LF).

Définition. Si $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, la partie $D = \{\, u_j : j \in \mathbb{N} \,\}$ de ∂U est $\boldsymbol{r}$*-régulièrement asymptotique pour* U si la restriction de l'opérateur T à $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ est surjective.

Théorème B.8.3 *Si* $D = \{\, u_j : j \in \mathbb{N} \,\}$ *est une partie de* D *n'ayant pas de point d'accumulation, les assertions suivantes sont équivalentes:*
(a) D *est régulièrement asymptotique pour* U*;*
(b) *pour tout* $j \in \mathbb{N}$, $\{u_j\}$ *est régulièrement asymptotique pour* U*;*
(c) *il existe* $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *tel que* D *soit* $\boldsymbol{r}$*-régulièrement asymptotique pour* U*.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (a) sont triviaux.

(b) $\Rightarrow$ (c). Construisons d'abord une suite particulière $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Comme D n'a pas de point d'accumulation, il existe une suite $\boldsymbol{s} = (s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que les disques $b(u_j; 1/s_j)$ soient deux à deux disjoints. Nous posons $r_1 = s_1$ et déterminons les r_j suivants au moyen de la loi de récurrence suivante. Si $r_1, \ldots, r_j$ sont obtenus, nous désignons par d_j la distance de u_{j+1} au compact

$$H_j = K_j \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} b(u_j; 1/s_j) \right).$$

Ensuite comme $\{u_{j+1}\}$ est régulièrement asymptotique pour U, u_{j+1} n'est pas un point isolé de ∂U et il existe donc un point v_j de ∂U tel que

$$0 < |v_j - u_{j+1}| < \inf \left\{ \frac{d_j}{4}, \frac{1}{s_{j+1}} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(v_j, H_j) \geq \frac{d_j}{2}.$$

Cela étant, nous choisissons pour r_{j+1} un entier tel que $r_{j+1} \geq s_{j+1}$ et $1/r_{j+1} < |v_j - u_{j+1}|$.

Comme $\{\, \eta_{u,n} : u \in D, n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ est une partie du dual de $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ dont les éléments sont linéairement indépendants, pour conclure au moyen du théorème d'interpolation d'Eidelheit, il nous suffit d'établir que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, la dimension de l'espace vectoriel

$$\operatorname{span}(\{\, \eta_{u,n} : n \in \mathbb{N}_0 \,\}) \cap \operatorname{span}(V^{\triangle}_{D,\boldsymbol{r},s})$$

est finie.

Soit donc s un élément de $\mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous savons déjà que

$$\operatorname{span}(\{\, \eta_{u_j,n} : n \in \mathbb{N}_0 \,\}) \cap \operatorname{span}(V^{\triangle}_{D,\boldsymbol{r},s})$$

est un espace vectoriel de dimension finie: il existe donc $N(j) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}; c_N \neq 0; \sum_{n=0}^{N} c_n \eta_{u_j,n} \in \operatorname{span}(V^{\triangle}_{D,\boldsymbol{r},s}) \right) \Rightarrow N \leq N(j).$$

Pour conclure, nous allons établir que si la fonctionnelle linéaire

$$\xi = \sum_{l=1}^{j+1} \sum_{n=0}^{N} c_{l,n} \eta_{u_l,n} \quad \text{avec} \quad j \geq s$$

appartient à $\mathrm{span}(V^{\triangle}_{D,\boldsymbol{r},s})$, alors
a) nous avons $c_{j+1,n} = 0$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$. De fait, si ce n'est pas le cas, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\xi \in qV^{\triangle}_{D,\boldsymbol{r},s}$. Soit alors n_0 le plus grand entier tel que $c_{j+1,n} \neq 0$ et introduisons le polynôme

$$P(z) = (z - u_1)^{j+N} \ldots (z - u_j)^{j+N} (z - u_{j+1})^{n_0}.$$

Nous choisissons ensuite un entier d supérieur au diamètre de H_j puis un entier t tel que

$$|u_{j+1} - u_1|^{j+N} \ldots |u_{j+1} - u_j|^{j+N}\, 2^t > qs(s+2)d^{(j+N)(j+1)}$$

et enfin posons

$$g(z) = P(z) \left(\frac{d_j}{2(z - v_j)} \right)^t, \quad \forall z \in U.$$

Il est clair que g est un élément de $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$. De plus, de

$$\left| \frac{d_j}{2(z - v_j)} \right|^t \leq 1, \quad \forall z \in H_j,$$

nous tirons de suite

$$\begin{aligned} p_{D,\boldsymbol{r},s}(g) &\leq \sup_{1 \leq k \leq s} p_{u_k, r_k, s}(g) \\ &\leq d^{(j+N)(j+1)} + (s+1)d^{(j+N)(j+1)} = (s+2)d^{(j+N)(j+1)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que g appartient à $s(s+2)d^{(j+N)(j+1)} V_{D,\boldsymbol{r},s}$ donc donne lieu à

$$|\langle g, \xi \rangle| \leq qs(s+2)d^{(j+N)(j+1)}.$$

Mais nous avons aussi

$$\left| \frac{d_j}{2(u_{j+1} - v_j)} \right|^t > 2^t$$

donc

$$\begin{aligned} |\langle g, \xi \rangle| &= \left| \sum_{l=1}^{j+1} \sum_{n=0}^{N} c_{l,n} g^{[n]}(u_l) \right| = \left| g^{[n_0]}(u_{j+1}) \right| \\ &= |u_{j+1} - u_1|^{j+N} \ldots |u_{j+1} - u_m|^{j+N} \cdot \left| \frac{d_j}{2(u_{j+1} - v_j)} \right|^t \\ &> |u_{j+1} - u_1|^{j+N} \ldots |u_{j+1} - u_j|^{j+N} \cdot 2^t > qs(s+2)d^{(j+N)(j+1)}. \end{aligned}$$

D'où une contradiction.
b) nous avons $c_{l,N} = 0$ si $N > \sup\{s, N(1), \ldots, N(s)\}$. Il suffit de procéder comme dans la preuve du théorème B.7.5.

Cela étant, nous concluons.∎

Corollaire B.8.4 *Si $D = \{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$ est régulièrement asymptotique pour U, alors la dimension du noyau de l'opérateur T est égale à $2^{\aleph_0}$.*

Preuve. Il suffit de procéder comme dans la preuve du corollaire B.7.4, à condition de remplacer r par une suite $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et l'espace $\mathrm{A}_r(U, D)$ par $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$.∎

Proposition B.8.5 *Soit $D = \{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$ une partie de ∂U, n'ayant pas de point d'accumulation.*

Il existe donc une suite $\boldsymbol{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que les disques $b(u_j; 1/s_j)$ soient deux à deux disjoints.

Cela étant, pour toute suite $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{s}$, les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) *D est $\boldsymbol{r}$-régulièrement asymptotique pour U;*

(b) *pour tout compact K de U et tout entier $j_0 \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $h > 0$, il existe $f \in \mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$ tel que*

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in K \cup \left(\bigcup_{j=1}^{j_0} \{ u \in \Omega : |u - u_j| \leq 1/r_j \} \right),$$

et

$$\left| f^{[p]}(u_{j_0}) \right| > h.$$

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). Il suffit de procéder comme dans la preuve de la nécessité de la condition de la proposition B.7.6, en remplaçant bien sûr $\mathrm{A}_r(U, D)$ par $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). La preuve de la suffisance de la condition de la proposition B.7.6 s'applique moyennant quelques adptations mineures:
remplacer $\mathrm{A}_r(U, D)$ par $\mathrm{A}_{\boldsymbol{r}}(U, D)$,
fixer $j \in \mathbb{N}$,
imposer en plus la condition $s > j$,
remplacer $V_{D,r,s}$ par $V_{D,\boldsymbol{r},s}$,
poser

$$H = K_s \cup \left(\bigcup_{j=1}^{s} b(u_j; 1/r_j) \right)$$

et

$$P(z) = (z - u_j)^{N - p_j} \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ k \neq j}} (z - u_k)^N,$$

et enfin remplacer $p_{D,r,s}$ par $p_{D,\boldsymbol{r},s}$ bien sûr.∎

Théorème B.8.6 *Soit $D = \{ u_j : j \in \mathbb{N} \}$ une partie de ∂U, n'ayant pas de point d'accumulation.*

Il existe donc une suite $\boldsymbol{r} = (r_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que les disques $b(u_j; 1/_j)$ soient deux à deux disjoints.

Si ∂U est quasi-connecté en tout point de D, alors D est $\boldsymbol{r}$-régulièrement asymptotique pour U donc est régulièrement asymptotique pour U.

Preuve. Il suffit de procéder comme dans la preuve du théorème B.7.7: on fixe $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$H = K \cup \left(\bigcup_{k=1}^{j} b(u_j; 1/r_j) \right)$$

et on choisit A soumis à la condition $\mathrm{e}(u_j, A) < 1/r_j$ et non $< 1/r$. La conclusion suit alors de la proposition précédente.∎

B.9 Compléments sur les espaces connexes, [42]

B.9.1 Limites supérieure et inférieure d'une suite d'ensembles

Convention. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, (X, d) désigne un espace métrique séparable, bien souvent noté X tout simplement.

Définitions. Si $\boldsymbol{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de l'espace métrique séparable (X, d),

(a) *la limite supérieure de* $\boldsymbol{A}$, notée $\sup \boldsymbol{A}$, est l'ensemble des points $x \in X$ tels que, pour tout $r > 0$, la boule $b(x; r)$ rencontre une infinité des A_n;

(b) *la limite inférieure de* $\boldsymbol{A}$, notée $\inf \boldsymbol{A}$, est l'ensemble des points $x \in X$ tels que, pour tout $r > 0$, la boule $b(x; r)$ rencontre tous les A_n sauf un nombre fini au plus.

Il est clair qu'on a toujours

$$\inf \boldsymbol{A} \subset \sup \boldsymbol{A}.$$

Si l'égalité a lieu, on dit que la suite $\boldsymbol{A}$ *converge* et que sa *limite*, notée $\lim \boldsymbol{A}$, est donnée par $\lim \boldsymbol{A} = \inf \boldsymbol{A} = \sup \boldsymbol{A}$.

Remarque. D'une part, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X converge vers x_0 et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n appartient à A_n, il est clair que x_0 appartient à $\inf \boldsymbol{A}$.

D'autre part, si $(A_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $\boldsymbol{A}$ et s'il existe une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n appartienne à $A_{k(n)}$, alors la limite de cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\sup \boldsymbol{A}$.

Exemple. *La suite* $(A_n = \{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties de* $\mathbb{R}$ *converge vers* $\emptyset$. Il suffit de remarquer que, dans ce cas, nous avons $\sup \boldsymbol{A} = \emptyset$.□

Exemple. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est le segment de $\mathbb{R}^2$ dont les extrémités sont $((-1)^n(1-1/n), 0)$ et $((-1)^n(1-1/n), 1)$, alors nous avons $\inf \boldsymbol{A} = \emptyset$ alors que $\sup \boldsymbol{A}$ est la réunion des deux segments d'extrémités $(-1, 0)$ et $(-1, 1)$ pour l'un et $(1, 0)$ et $(1, 1)$ pour l'autre.□

Proposition B.9.1 *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une suite de parties de l'espace métrique séparable* X*,*

(a) $\inf \boldsymbol{A}$ *et* $\sup \boldsymbol{A}$ *sont des fermés de* X*;*

(b) *et si* $\boldsymbol{B}$ *est une sous-suite de* $\boldsymbol{A}$*, on a*

$$\inf \boldsymbol{A} \subset \inf \boldsymbol{B} \subset \sup \boldsymbol{B} \subset \sup \boldsymbol{A}.\blacksquare$$

Théorème B.9.2 *Toute suite* $\boldsymbol{A}$ *de parties d'un espace métrique séparable contient une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit $\{\, d_j : j \in \mathbb{N} \,\}$ une partie dénombrable dense dans X. On a tôt fait de vérifier que $\{\, b(d_j; < 1/r) : j, r \in \mathbb{N} \,\}$ est une *suite fondamentale d'ouverts de* X, c'est-à-dire une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que tout ouvert non vide de X soit réunion des Ω_n qu'il contient. (C'est ici que la séparabilité de X est utilisée.)

Cela étant, posons $A_n^1 = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et construisons les suites $\boldsymbol{A}^k = (A_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X au moyen de la loi de récurrence suivante. Si les suites $\boldsymbol{A}^1$, ..., $\boldsymbol{A}^k$ sont déterminées,

(a) et si $\boldsymbol{A}^k$ contient une sous-suite $\boldsymbol{B} = (A_{k(n)}^k)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(\sup \boldsymbol{B}) \cap \Omega_k = \emptyset$, nous posons $A_n^{k+1} = A_{k(n)}^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(b) et si $(\sup \boldsymbol{B}) \cap \Omega_k \neq \emptyset$ pour toute sous-suite $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$, nous posons $A_n^{k+1} = A_n^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour conclure, nous allons établir que la sous-suite $\boldsymbol{B} = (A_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\boldsymbol{A}$ converge.

Si ce n'est pas le cas, il existe un point $x \in X$ appartenant à $\sup \boldsymbol{B}$ et pas à $\inf \boldsymbol{B}$. Il existe alors un voisinage de x, donc un des ensembles Ω_k, et une sous-suite $(A_{l(n)}^{l(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\boldsymbol{B}$ telle que $A_{l(n)}^{l(n)} \cap \Omega_k = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela étant, la suite $(A_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite, à savoir $(A_{l(n)}^{l(n)})_{n\geq k}$ dont la limite supérieure est disjointe de Ω_k. Vu la construction, nous obtenons alors $(\sup(A_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}) \cap \Omega_k = \emptyset$, ce qui est absurde car x appartient à Ω_k et à $\sup \boldsymbol{B}$ avec

$$\sup \boldsymbol{B} \subset \sup(A_n^n)_{n>k} \subset \sup(A_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}.\blacksquare$$

Théorème B.9.3 *Si $\boldsymbol{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de l'espace métrique séparable (X, d) et si $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est relativement compact,*
(a) $\sup \boldsymbol{A} = \emptyset$ *a lieu si et seulement s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$;*
(b) *si* $\sup \boldsymbol{A} \neq \emptyset$*, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_n soit inclus dans $\{ x \in X : \mathrm{d}(x, \sup \boldsymbol{A}) < \varepsilon \}$ quel que soit $n \geq n_0$.*

Preuve. (a) La condition est nécessaire. Si $\sup \boldsymbol{A} = \emptyset$, alors tout $x \in X$ est centre d'une boule ouverte qui ne rencontre qu'un nombre fini des A_n. D'où la conclusion car un nombre fini de ces boules suffit pour recouvrir le compact $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^-$.

La condition est évidemment suffisante.

(b) Procédons par l'absurde: supposons l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que x_n appartienne à $A_{k(n)} \setminus \{ x \in X : \mathrm{d}(x, \sup \boldsymbol{A}) < \varepsilon \}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ étant une sous-suite de $\boldsymbol{A}$. Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_{k(n)}$ est relativement compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente, soit $x_{l(n)} \to x_0$. Cette limite x_0 doit alors appartenir à $\sup \boldsymbol{A}$ alors que nous avons $\mathrm{d}(x_{l(n)}, \sup \boldsymbol{A}) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.∎

B.9.2 Chaînes

Définition. Etant donné deux points a, b de l'espace métrique (X, d) et $\varepsilon > 0$, une *ε-chaîne joignant a à b* est une suite finie $(x_j)_{j=1}^{J}$ de X telle que $a = x_1$, $b = x_J$ et $d(x_j, x_{j+1}) \leq \varepsilon$ pour tout $j = 1, \ldots, J-1$. Cette chaîne est *dans* $A \subset X$ si on a $x_1, \ldots, x_J \in A$.

Cela étant, une partie A de X est *bien enchaînée* si, pour tous $a, b \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε-chaîne dans A joignant a à b.

Lemme B.9.4 *Pour toute partie non vide A de l'espace métrique (X, d) et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble A_ε des points x de X pour lesquels il existe une ε-chaîne joignant un point de A à x est ouvert et fermé.*

Preuve. Posons $B = X \setminus A_\varepsilon$. Il est alors clair que $A_\varepsilon \cap \overline{B} = \emptyset$ donc que $A_\varepsilon = X \setminus \overline{B}$ est ouvert. Il est tout aussi clair que $\overline{A_\varepsilon} \cap B = \emptyset$ donc que $A = \overline{A_\varepsilon}$ est fermé.∎

Théorème B.9.5 *Tout espace métrique connexe est bien enchaîné.*

Preuve. Si a est un point de cet espace X, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{a\}_\varepsilon$ des points x de X pour lesquels il existe une ε-chaîne joignant a à x est ouvert et fermé donc égal à X sinon $\{\{a\}_\varepsilon, X \setminus \{a\}_\varepsilon\}$ serait une disconnexion de X.∎

Remarque. La réciproque de cette propriété est fausse: il suffit de prendre pour X le sous-espace $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Elle a cependant lieu si X est compact (patientez un peu).□

B.9.3 Espaces connexes

Nous renvoyons à [25] pour les propriétés élémentaires des espaces connexes.

Remarque. Si C est une partie de l'espace métrique (X, d), remarquons bien que $\{A, B\}$ est une disconnexion de (C, d) si et seulement si $\{A, B\}$ est une partition de C en deux parties non vides telles que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (les adhérences pouvant être considérées dans X ou dans C). En effet, A est alors égal à $C \setminus \overline{B}$ et B à $C \setminus \overline{A}$: A et B sont donc des ouverts de (C, d).□

Proposition B.9.6 *Soit C une partie connexe non vide de l'espace métrique connexe (X, d). Si $X \setminus C$ n'est pas connexe, alors, pour toute disconnexion $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ de $X \setminus C$, les espaces $(\Omega_1 \cup C, d)$ et $(\Omega_2 \cup C, d)$ sont connexes.*

Preuve. Les rôles de Ω_1 et Ω_2 étant permutables, il suffit par exemple d'établir que $(\Omega_1 \cup C, d)$ est connexe.

Supposons avoir une disconnexion $\{\omega_1, \omega_2\}$ de $(\Omega_1 \cup C, d)$. Il est clair que C doit être inclus dans un des deux ensembles ω_1, ω_2 sinon $\{C \cap \omega_1, C \cap \omega_2\}$ serait une disconnexion de C. Les rôles de ω_1 et ω_2 étant permutables, supposons avoir $C \subset \omega_1$; ceci implique $\omega_2 \subset \Omega_1$. Cela étant, on vérifie de suite que $\{\Omega_2 \cup \omega_1, \omega_2\}$ est une disconnexion de X. D'où une contradiction.∎

Théorème B.9.7 *Soit $\boldsymbol{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un espace métrique séparable (X, d).*

Si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ *est une partie relativement compacte de X;*

(b) *il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $]0, \infty[$ convergente vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout couple (a, b) de points de A_n, il existe une ε_n-chaîne dans A_n joignant a à b;*

(c) $\inf \boldsymbol{A} \neq \emptyset$;

alors $\sup \boldsymbol{A}$ *est une partie connexe de X.*

Preuve. L'ensemble $\sup \boldsymbol{A}$ étant fermé et inclus dans l'adhérence de $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, est compact. Cela étant, si $\sup \boldsymbol{A}$ n'est pas connexe, il en existe une disconnexion $\{K_1, K_2\}$ en deux compacts dont l'un au moins, soit K_1, rencontre $\inf \boldsymbol{A}$. Si nous posons $r = \mathrm{d}(K_1, K_2)/3$, nous obtenons $r > 0$ et $\mathrm{d}(x, y) > r$ pour tous x, $y \in X$ tels que $\mathrm{d}(x, K_1) < r$ et $\mathrm{d}(x, K_2) < r$. Vu le théorème B.9.3, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$A_n \subset \{\, x : \mathrm{d}(x, \sup \boldsymbol{A}) < r \,\} = \{\, x : \mathrm{d}(x, K_1) < r \,\} \cup \{\, x : \mathrm{d}(x, K_2) < r \,\}$$

pour tout $n \geq n_0$. De $K_1 \cap (\inf \boldsymbol{A}) \neq \emptyset$, nous tirons $A_n \cap \{\, x : \mathrm{d}(x, K_1) < r \,\} \neq \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$, quitte à augmenter n_0. Dès lors, comme K_2 diffère de $\emptyset$, nous devons avoir

$$A_k \cap \{\, x : \mathrm{d}(x, K_1) < r \,\} \neq \emptyset \neq A_k \cap \{\, x : \mathrm{d}(x, K_2) < r \,\}$$

pour une suite d'entiers $k \in \mathbb{N}$.

Ceci est contradictoire car le raisonnement suivant est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$: si x_1 est le dernier point de $\{\, x : \mathrm{d}(x, K_1) < r \,\}$ d'une ε_k-chaîne joignant un point de $A_k \cap \{\, x : \mathrm{d}(x, K_1) < r \,\}$ à un point de $A_k \cap \{\, x : \mathrm{d}(x, K_2) < r \,\}$ et si x_2 est son premier point appartenant à $\{\, x : \mathrm{d}(x, K_2) < r \,\}$, nous devons avoir $\mathrm{d}(x_1, x_2) \leq \varepsilon_k$ et $\mathrm{d}(x_1, x_2) > r$.∎

Corollaire B.9.8 a) *Si $\boldsymbol{A}$ est une suite convergente de parties d'un espace métrique séparable et si $\boldsymbol{A}$ vérifie les conditions* (a) *et* (b) *du théorème, alors* $\lim \boldsymbol{A}$ *est connexe.*

b) *Si $\boldsymbol{A}$ est une suite de parties connexes d'un espace métrique séparable et si $\boldsymbol{A}$ vérifie les conditions* (a) *et* (c) *du théorème, alors* $\sup \boldsymbol{A}$ *est connexe.*∎

Proposition B.9.9 *Soient a et b deux points d'un espace métrique compact K. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-chaîne joignant a à b, alors a et b appartiennent à une même composante connexe de K.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n l'ensemble des points x de K pour lesquels il existe une $1/n$-chaîne joignant a à x. Il est clair que la suite $\boldsymbol{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) du théorème précédent pour $\varepsilon_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\inf \boldsymbol{A} \supset \{a, b\}$. Dès lors, $\sup \boldsymbol{A}$ est connexe. D'où la conclusion car a et b appartiennent bien sûr à $\sup \boldsymbol{A}$.∎

Corollaire B.9.10 *Tout compact métrisable bien enchaîné est connexe.*∎

Théorème B.9.11 *Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints et non vides d'un espace métrique compact (K, d).*

Si aucune composante connexe de K n'intersecte à la fois F_1 et F_2, il existe une disconnexion $\{K_1, K_2\}$ de K telle que $F_1 \subset K_1$ et $F_2 \subset K_2$.

Preuve. Etablissons tout d'abord qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune ε-chaîne ne joigne un point de F_1 à un point de F_2. Si ce n'est pas le cas, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une $1/n$-chaîne A_n joignant un point $a_n \in F_1$ à un point $b_n \in F_2$. Cela étant, la suite $\boldsymbol{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente que, sans perte de généralité, nous pouvons supposer égale à $\boldsymbol{A}$. Comme $\boldsymbol{A}$ vérifie clairement l'hypothèse du Corollaire B.9.8.a) ci-dessus, $\lim \boldsymbol{A}$ est connexe. Comme nous avons

$a_n \in A_n \cap F_1$ et $b_n \in A_n \cap F_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme F_1 et F_2 sont compacts, nous obtenons bien sûr $(\sup \boldsymbol{A}) \cap F_1 \neq \emptyset \neq (\sup \boldsymbol{A}) \cap F_2$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Cela étant, soit K_1 l'ensemble des points x de K pour lesquels il existe une ε-chaîne joignant un point de F_1 à x. Posons ensuite $K_2 = K \setminus K_1$. Il est clair que nous avons $F_1 \subset K_1$ et $F_2 \subset K_2$. Comme K_1 est à la fois fermé et ouvert, $\{K_1, K_2\}$ est une disconnexion de K et nous concluons.∎

Théorème B.9.12 *Soient F un fermé connexe et Ω un ouvert d'un espace métrique (X, d).*

Si $F \cap \Omega$ n'est pas vide et diffère de F et si $F \cap \overline{\Omega}$ est compact, alors toute composante connexe de $F \cap \overline{\Omega}$ intersecte $\partial\Omega$.

Preuve. Si ce n'est pas le cas, il existe une composante connexe C de $F \cap \overline{\Omega}$ telle que $C \cap \partial\Omega = \emptyset$. Posons $K = F \cap \overline{\Omega}$ et $B = F \cap \partial\Omega$. Remarquons que B n'est pas vide sinon $\{F \cap \Omega, F \setminus \overline{\Omega}\}$ serait une disconnexion de F. Cela étant, (K, d) est un espace métrique compact et B et C sont des parties fermées disjointes et non vides de K. Vu le théorème précédent, il existe une disconnexion $\{K_b, K_c\}$ de K telle que $B \subset K_b$ et $C \subset K_c$. Mais alors K_b contenant $B = F \cap \partial\Omega$, K_c est inclus dans Ω. Cela étant, $\{K_b \cup (F \setminus K), K_c\}$ est une disconnexion de F. D'où une contradiction.∎

B.10 Généralisation des résultats de Carleman et Franklin

Théorème B.10.1 *Soit D une partie non vide et sans point d'accumulation de ∂U.*

Si ∂U est quasi-connecté en tout point de D, alors D est régulièrement asymptotique pour U et le noyau de T est de dimension algébrique égale à $2^{\aleph_0}$.

Preuve. Sans point d'accumulation, D doit être dénombrable. Dès lors, si D est fini, il s'agit du théorème B.7.7 et du corollaire B.7.4; si D est infini, il s'agit du théorème B.8.6 et du corollaire B.8.4.∎

Voici maintenant une condition pratique permettant de vérifier que ∂U est quasi-connecté en $u \in \partial U$. Elle justifie l'étude du paragraphe précédent.

Proposition B.10.2 *Si la composante connexe C_u de $u \in \partial U$ dans ∂U n'est pas réduite au singleton $\{u\}$, alors ∂U est quasi-connecté en u.*

Preuve. Etant donné des nombres réels ε et δ tels que $0 < \varepsilon < \delta < 1$, comme C_u contient plus d'un point, il existe $r_1 \in]0, \delta/2[$ tel que $C_1 = C_u \cap b(u; r_1) \neq C_u$. Soit alors C la composante connexe de C_1 contenant u. Bien sûr, C_u est fermé et $b(u; < r_1)$ est un ouvert borné tel que $C_u \neq b(u; < r_1) \cap C_u \neq \emptyset$. Vu le théorème B.9.12, C contient un point z_1 tel que $|z_1 - u| = r_1$.

Cela étant, choisissons des nombres réels r_2 et r_3 tels que $0 < r_2 < \varepsilon r_1$ et $r_1 < r_3$. Posons $G = \{\, z \in C : r_2 < |z - u| < r_3 \,\}$. De la sorte, nous avons $u \notin \overline{G}$ et $z_1 \in G$, donc $C \neq G \cap C \neq \emptyset$. Une nouvelle application du théorème B.9.12 assure alors que la composante connexe C' de $C \cap \overline{G}$ contenant z_1 doit contenir un point z_2 de ∂G. Comme nous devons avoir $|z_2 - u| \neq r_3$, $|z_2 - u| = r_2$ a lieu. Dès lors, C' est une partie connexe de ∂U telle que $\mathrm{d}(u, C') = |z_2 - u| = r_2$ et $\mathrm{e}(u, C') = |z_1 - u| = r_1$; nous avons donc

$$\mathrm{e}(u, C') = r_1 < \delta \ \text{ et } \ 0 < \mathrm{d}(u, P) = r_2 < \varepsilon r_1 = \varepsilon \mathrm{e}(u, C').$$

D'où la conclusion.∎

Comme annoncé, le corollaire suivant est en fait la version pratique du théorème.

Corollaire B.10.3 *Soit D une partie non vide et sans point d'accumulation de ∂U.*

Si, pour tout $u \in D$, la composante connexe de u dans ∂U n'est pas réduite au singleton $\{u\}$, alors D est régulièrement asymptotique pour U et le noyau de T est de dimension algébrique égale à $2^{\aleph_0}$.∎

Bibliographie

[1] Bernstein S., *Sur les séries normales*, pp. 259–283, in d'Adhémar R., *Leçons sur les principes de l'analyse*, Tome II, Gauthier-Villars, Paris (1913).

[2] Besikowitsch A., *Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen*, Math. Zeitschr. **21**(1924), 111–118.

[3] Bierstone E., *Extension of Whitney fields from subanalytic sets*, Invent. Math. **46**(1978), 277–300.

[4] Bierstone E., Milman P. D., *Extension and lifting of $\mathcal{C}^\infty$-Whitney fields*, L'enseignement Math. **23**(1977), 129–137.

[5] Bierstone E., Schwarz G. W., *Continuous linear division and extension of $\mathcal{C}^\infty$-functions*, Duke Math. J. **50**(1983), 233–271.

[6] Boonen C., Frerick L., *Extension operators with analytic values,* manuscript (2003), 18 pages.

[7] Borel E., *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **XII**(1895), 9–55.

[8] Brück R., Frerick L., *Holomorphic extensions of Whitney jets,* Result. Math. **43**(2003), 56–73.

[9] Carleman T., *Les fonctions quasi-analytiques*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions (E. Borel), Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

[10] Franklin Ph., *Functions of a complex variable with assigned derivatives at an infinite number of points, and an analogue of Mittag-Leffler theorem,* Acta Math. **47**(1926), 371–385.

[11] Frerick L., *Extension operators for spaces of infinite differentiable functions,* Habilitationsschrift, Wuppertal (2001).

[12] Frerick L., Vogt D., *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets by means of continuous linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **130**(2001), 1775–1777.

[13] Garnir H. G., De Wilde M., Schmets J., *Analyse fonctionnelle*, **I**, Birkhäuser, Basel, (1968).

[14] Goncharov A., *A compact set without Markov's property but with an extension operator for $\mathcal{C}^\infty$-functions*, Studia Math. **119**(1996), 27–35.

[15] Langenbruch M., *Analytic extension of smooth functions,* Result. Math. **36**(1999), 281–296.

[16] Meise R., Vogt D., *Einführung in die Funktionalanalysis*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1992; traduit par Ramanujan M. S.: *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **2** (1997).

[17] Mirkil H., *Differentiable functions, formal power series and moments*, Proc. Amer. Math. Soc. **7**(1956), 650–652.

[18] Mityagin B., *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys **16**(1961), 59–127; Uspehi Mat. Nauk **16**(1961), 63–132.

[19] Pawłucki W., Plesniak W., *Extension of $\mathcal{C}^\infty$-functions from sets with polynomial cusps*, Studia Math. **88**(1988), 279–287.

[20] Plesniak W., *Markov's inaquality and the existence of an extension operator for $\mathcal{C}^\infty$-functions*, J. Approx. Theory **61**(1990), 106–117.

[21] Ritt J. F., *On the derivatives of a function at a point*, Annals of Math. **18**(1916), 18–23.

[22] Schaefer H., *Topological Vector Spaces*, Springer, Berlin, (1971).

[23] Schmets J., *Analyse mathématique*, Notes de cours, Université de Liège, Année académique 1996–1997.

[24] Schmets J., *Analyse mathématique, Introduction au calcul intégral*, Notes de cours, Université de Liège, Année académique 1994–1995.

[25] Schmets J., *Analyse mathématique, Introduction aux espaces fonctionnels*, Notes de cours, Université de Liège, Année académique 1994–1995.

[26] Schmets J., *Analyse fonctionnelle*, Notes de cours, Université de Liège, Année académique 2002–2003.

[27] Schmets J., Valdivia M., *On the existence of holomorphic functions having prescribed asymptotic expansions*, Zeitschr. für Analysis und ihre Anwendungen **13**(1994), 307–327.

[28] Schmets J., Valdivia M., *On the existence of continuous linear extension maps for Whitney jets*, Bull. Polish Acad. Sc. Math. **45**(1997), 359–367.

[29] SCHMETS J., VALDIVIA M., *Holomorphic extension maps for spaces of Whitney jets,* Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **95**(2001), 19–28.

[30] SEELEY R. T., *Extension of $\mathcal{C}^\infty$-functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc. **15**(1964), 625–626.

[31] STEIN E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

[32] TIDTEN M., *Fortsetzungen von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R}^n$ definiert sind*, Manuscripta Math. **27**(1979), 291–312.

[33] TIDTEN M., *Kriterien fűr die Existenz von Ausdehnungsoperatoren zu $\mathcal{E}^\infty(K)$ fűr kompakte Teilmengen K von $\mathbb{R}$*, Arch. Math. **40**(1983), 73–81.

[34] VALDIVIA M., *Quasi*-LB-*spaces*, J. London Math. Soc. **35**(1987), 149–168.

[35] VALDIVIA M., *Una propriedad de interpolacion en espacios de funciones holomorfas con desarrollos asintoticos*, Homenaje al Prof. Dr. Nácere Hayek Calil (1990), 351–360.

[36] VALDIVIA M., *Interpolation in spaces of holomorphic mappings with asymptotic expansions*, Proc. R. Irish Acad. **91A**(1991), 7–38.

[37] VALDIVIA M., PEREZ CARRERAS P., *On totally barrelled spaces*, Math. Z. **178**(1891), 263–269.

[38] VOGT D., *Charakterisierung der Unterrǎume von s*, Math. Z. **155**(1977), 109–117.

[39] VOGT D., *Sequence space representations of spaces of test functions and distributions*, in *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, G. I. Zapata (ed.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **83**, Dekker (1983), 405–443.

[40] WHITNEY H., *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36**(1934), 63–98.

[41] WHITNEY H., *Differentiable functions defined in closed sets I,* Trans. Amer. Math. Soc. **36**(1934), 369–387.

[42] WHYBURN G. T., *Topological analysis*, Princeton Mathematical Series, Princeton, New Jersey (1964).

Table des matières