UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences
Institut de Mathématique

THEORIE DE LA MESURE

Notes du cours de la licence
en sciences mathématiques

Jean SCHMETS

Année académique 2004–2005

Introduction

Ces notes contiennent la matière du cours à option *Introduction à la théorie de la mesure* (30h + 10h) que j'ai donné durant l'année académique 2004–2005 à la licence en sciences mathématiques. Elles en débordent largement: j'ai voulu donner la possibilité aux étudiants intéressés d'apprendre davantage. Elles ne sont cependant pas complètes: le lecteur intéressé trouvera en fin de volume une liste de références qui ne se veut pas limitative mais qu'il consultera avec beaucoup de profit.

Le but du cours oral est triple:

a) établir les résultats admis sans preuve dans le cours *Introduction au calcul intégral* enseigné en première candidature. Cela est fait dans le cadre d'une mesure quelconque.

b) comparer les notions d'intégrales de Riemann, de Darboux et de Lebesgue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

c) aborder quelques résultats transcendants de la théorie de la mesure (théorème de Radon-Nikoym, décomposition de Lebesgue, théorème de représentation de Riesz, caractérisation des mesures sur un intervalle de $\mathbb{R}$, différentiation d'une mesure, théorème de changement de variable) si j'en ai le temps.

J. Schmets

Chapitre 1

Mesures

Convention. Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, X désigne un ensemble non vide et, à partir du paragraphe 1.3, $\mathcal{S}$ un semi-anneau sur X.

1.1 Semi-anneau sur un ensemble

Définition. Etant donné $\mathcal{P} \subset \wp(X)$, une *$\mathcal{P}$-partition de $A \subset X$* est une partition de A constituée d'éléments de $\mathcal{P}$; c'est donc une famille $\mathcal{A}$ de parties de X dont les éléments appartiennent à $\mathcal{P}$, sont disjoints deux à deux et ont une réunion égale à A.

Si $\emptyset \in \mathcal{P}$, il convient de remarquer que $\emptyset$ peut appartenir à $\mathcal{A}$ de nombreuses fois.

Définition. Un *semi-anneau sur* X est une partie $\mathcal{S}$ de $\wp(X)$ qui vérifie les quatre conditions suivantes:

(sa1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

(sa2) il existe une suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ telle que $X = \cup_{m=1}^{\infty} S_m$,

(sa3) pour tous S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$, il existe une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_1 \cap S_2$,

(sa4) pour tous S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$, il existe une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_1 \setminus S_2$.

Remarque. La condition **(sa2)** est introduite pour des raisons de commodité. Pour une large partie de la théorie, elle n'est pas nécessaire. Son intervention permet d'alléger certains énoncés. De plus, elle est souvent réalisée en pratique; elle l'est toujours pour les mesures de probabilité (définies sur $(X, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X).□

Rappel. Une *σ-algèbre de parties de X* est une partie $\mathcal{A}$ de $\wp(X)$ qui vérifie les trois conditions suivantes:

(σ-a1) $X \in \mathcal{A}$,

(σ-a2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(σ-a3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

Cela étant, si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X, il vient:
i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$,
iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.□

Exemple. *L'ensemble $\{\emptyset, X\}$ est un semi-anneau sur X.*□

Exemple. *Toute σ-algèbre de parties de X est un semi-anneau sur X.*
En particulier, la σ-algèbre $\wp(X)$ est un semi-anneau sur X.□

Exemple. *Si X est dénombrable, alors l'ensemble des parties finies de X est un semi-anneau sur X.*□

Exemple. *Si $J \in \mathbb{N}_0$ et si, pour tout $j \in \{1, \cdots, J\}$, $\mathcal{S}_j$ est un semi-anneau sur l'ensemble X_j, alors*

$$\prod_{j=1}^{J} \mathcal{S}_j = \left\{ \prod_{j=1}^{J} S_j : S_j \in \mathcal{S}_j \text{ pour tout } j = 1, \ldots, J \right\}$$

est un semi-anneau sur $\prod_{j=1}^{J} X_j$.

Il est clair que $\prod_{j=1}^{J} \mathcal{S}_j$ vérifie les conditions **(sa1)** et **(sa2)**. De plus, avec des notations évidentes par elles-mêmes, il est clair que les ensembles

$$\left(\prod_{j=1}^{J} S_j\right) \bigcap \left(\prod_{j=1}^{J} T_j\right) = \prod_{j=1}^{J} (S_j \cap T_j)$$

et

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{j=1}^{J} S_j\right) \setminus \left(\prod_{j=1}^{J} T_j\right) \\ &= \left((S_1 \setminus T_1) \times \prod_{j=2}^{J} S_j\right) \bigcup \left((S_1 \cap T_1) \times (S_2 \setminus T_2) \times \prod_{j=3}^{J} S_j\right) \bigcup \ldots \\ &\qquad \ldots \bigcup \Big((S_1 \cap T_1) \times \ldots \times (S_{J-1} \cap T_{J-1}) \times (S_J \setminus T_J)\Big) \end{aligned}$$

admettent des $(\prod_{j=1}^{J} \mathcal{S}_j)$-partitions finies.□

Voici les propriétés élémentaires des semi-anneaux.

Proposition 1.1.1 *Soit $\mathcal{S}$ un semi-anneau sur X.*

a) *Si les $S_1, \ldots, S_J$ et les $T_1, \ldots, T_K$ sont des éléments de $\mathcal{S}$ en nombre fini, alors il existe une $\mathcal{S}$-partition finie de $(\cap_{j=1}^J S_j) \setminus (\cup_{k=1}^K T_k)$.*

b) *Si les $S_1, \ldots, S_J \in \mathcal{S}$ sont en nombre fini, alors il existe une $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de leur réunion telle que chacun des S_j soit la réunion des éléments de $\mathcal{P}$ qu'il contient.*

c) *Pour toute suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$, il existe une $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\mathcal{P}$ de leur réunion telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, $\cup_{m=1}^M S_m$ soit la réunion des éléments de $\mathcal{P}$ qu'il contient.*

En particulier, X admet toujours une $\mathcal{S}$-partition dénombrable.

Preuve. a) Etablissons d'abord, par récurrence sur K, que cette propriété est correcte pour $J = 1$. D'une part, le cas $(J = 1, K = 1)$ résulte de la définition même de la notion de semi-anneau. D'autre part, si le cas $(J = 1, K = M \in \mathbb{N}_0)$ est établi, alors le cas $(J = 1, K = M + 1)$ résulte aussitôt de **(sa4)** et de la formule

$$S_1 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{M+1} T_k \right) = \left(S_1 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{M} T_k \right) \right) \setminus T_{M+1}.$$

Etablissons ensuite le cas général par récurrence sur J. D'une part, pour $J = 1$ et tout $K \in \mathbb{N}_0$, nous venons d'établir le résultat. D'autre part, si, pour $J = M \in \mathbb{N}_0$ et tout $K \in \mathbb{N}_0$, la propriété a lieu, alors **(sa3)** et la formule

$$\left(\bigcap_{j=1}^{M+1} S_j \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{K} T_k \right) = \left(\left(\bigcap_{j=1}^{M} S_j \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{K} T_k \right) \right) \bigcap S_{M+1}$$

permettent d'établir que la propriété a également lieu pour $J = M + 1$ et tout $K \in \mathbb{N}_0$.

b) Pour toute partie non vide K de $\{1, \ldots, J\}$, posons

$$T_K = \left(\bigcap_{k\in K} S_k \right) \setminus \left(\bigcup_{1\leq j\leq J,\, j\notin K} S_j \right).$$

Vu a), chacun de ces ensembles T_K admet une $\mathcal{S}$-partition finie. D'où la conclusion car, d'une part, les ensembles T_K sont disjoints deux à deux et, d'autre part, chacun des S_j est bien sûr égal à la réunion des ensembles T_K tels que $j \in K$.

c) Il suffit de poser $\mathcal{P} = \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_m$ où $\mathcal{P}_1$ est égal à $\{S_1\}$ et où, pour tout entier $m \geq 2$, $\mathcal{P}_m$ est une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_m \setminus (\cup_{j=1}^{m-1} S_j)$.∎

1.2 Le semi-anneau $\mathcal{SI}(\Omega)$

Convention. Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Un *semi-intervalle dans* Ω est un semi-intervalle de l'espace $\mathbb{R}^n$, d'adhérence compacte incluse dans Ω.

C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit $]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_n, b_n]$ avec a_j, $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_j < b_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et dont l'adhérence est incluse dans Ω.

Remarques. 1) Un semi-intervalle dans Ω n'est bien sûr jamais vide. Plus précisément, l'intérieur d'un semi-intervalle dans Ω n'est jamais vide. Il s'ensuit notamment que *tout ensemble dont les éléments sont des semi-intervalles dans* Ω *disjoints deux à deux, est dénombrable.* De fait, si, à chacun de ces semi-intervalles I, on associe un point rationnel x_I de I°, on obtient une bijection entre l'ensemble considéré et une partie de l'ensemble des points rationnels de $\mathbb{R}^n$.

2) *Tout semi-intervalle dans* Ω *est convexe.*$\square$

Proposition 1.2.1 *Il existe une partition dénombrable de* Ω *en semi-intervalles dans* Ω.

Preuve. Vu ce qui précède, il suffit d'établir que Ω admet un recouvrement dénombrable constitué de semi-intervalles dans Ω.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit $\mathcal{Q}_m$ le quadrillage d'équidistance 10^{-m} de $\mathbb{R}^n$ puis $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des mailles de $\mathcal{Q}_m$ d'adhérence compacte incluse dans Ω; $\mathcal{Q}_m$ étant dénombrable, il est clair que $\mathcal{P}_m$ est dnombrable. Pour conclure, il suffit alors de constater que $\cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_m$ est dénombrable et constitue un recouvrement de Ω.$\blacksquare$

Proposition 1.2.2 *Une intersection finie de semi-intervalles dans* Ω *est égale à* $\emptyset$ *ou à un semi-intervalle dans* Ω.

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir cet énoncé pour l'intersection de deux semi-intervalles $\prod_{j=1}^n]a_j, b_j]$ et $\prod_{j=1}^n]c_j, d_j]$ dans Ω. Comme

$$\left(\prod_{j=1}^n]a_j, b_j]\right) \bigcap \left(\prod_{j=1}^n]c_j, d_j]\right) = \prod_{j=1}^n \left(]a_j, b_j] \cap]c_j, d_j]\right),$$

il suffit de prouver que l'intersection de deux semi-intervalles de $\mathbb{R}$ est égale à $\emptyset$ ou à un semi-intervalle de $\mathbb{R}$. Cela résulte aussitôt de la formule

$$]a, b] \cap]c, d] = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } \sup\{a, c\} \geq \inf\{b, d\} \\ ]\sup\{a, c\}, \inf\{b, d\}] & \text{sinon} \end{array} \right\}.\blacksquare$$

Proposition 1.2.3 a) *Si $I = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$ est un semi-intervalle dans Ω, alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $c_k \in]a_k, b_k[$, les ensembles*

$$I_1 =]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_{k-1}, b_{k-1}] \times]a_k, c_k] \times]a_{k+1}, b_{k+1}] \ldots \times]a_n, b_n]$$

$$I_2 =]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_{k-1}, b_{k-1}] \times]c_k, b_k] \times]a_{k+1}, b_{k+1}] \ldots \times]a_n, b_n]$$

constituent une partition de I en deux semi-intervalles dans Ω.

b) *Pour tous semi-intervalles I et J dans Ω, $I \setminus J$ est vide ou admet une partition finie en semi-intervalles dans Ω.*

Preuve. a) est immédiat.

b) Comme on a $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$, il suffit de considérer le cas $J \subset I$.

Soient donc $I = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$ et $J = \prod_{j=1}^{J}]c_j, d_j]$ deux semi-intervalles dans Ω tels que $J \subset I$. On a alors $a_j \leq c_j < d_j \leq b_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Cela étant, soit $\mathcal{Q}$ le réseau fini de $\mathbb{R}^n$ déterminé par ces inégalités $a_j \leq c_j < d_j \leq b_j$ pour $j = 1, \ldots, n$. On vérifie directement que l'ensemble des éléments de $\mathcal{Q}$ inclus dans I constituent une partition finie de I en semi-intervalles dans Ω à laquelle J appartient.∎

Remarque. Inversement on peut établir que *toute partition d'un semi-intervalle I dans Ω en deux semi-intervalles* (nécessairement dans Ω) *s'obtient comme annoncé en* a) *dans l'énoncé précédent.*

Suggestion. Supposons que le semi-intervalle $I = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$ dans Ω admette une partition $\{I_1, I_2\}$ en deux semi-intervalles. Le point $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ appartenant à I, appartient à I_1 ou à I_2. Quitte à permuter les rôles de I_1 et I_2, nous pouvons supposer qu'il appartient à I_1. Cela étant, il est clair que I_1 s'écrit $\prod_{j=1}^{n}]c_j, b_j]$ avec $a_j \leq c_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $a_j < c_j$ pour au moins une valeur de j. Tout revient alors à établir qu'il n'y a qu'une valeur de j pour laquelle on a cette inégalité $a_j < c_j$. Supposons avoir $a_j < c_j$ et $a_k < c_k$ avec $1 \leq j < k \leq n$. Alors les points

$$x = (b_1, \ldots, b_{j-1}, c_j, b_{j+1}, \ldots, b_n) \text{ et } y = (b_1, \ldots, b_{k-1}, c_k, b_{k+1} \ldots, b_n)$$

appartiennent à I et n'appartiennent pas à I_1. Ils appartiennent donc à I_2 ainsi que leur demi-somme car I_2 est convexe. D'où une contradiction car il est clair que cette demi-somme appartient à I_1.□

Cela étant, nous sommes à même d'introduire un semi-anneau important sur Ω: il nous permettra au paragraphe 1.4 d'introduire la notion fondamentale de mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la notation $\mathcal{SI}(\Omega)$ désigne l'ensemble dont les éléments sont soit $\emptyset$, soit un semi-intervalle dans Ω.

Théorème 1.2.4 *Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{SI}(\Omega)$ est un semi-anneau sur Ω.*∎

1.3 Mesures sur $(X, \mathcal{S})$

Définition. Une application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est
a) *finiment additive* si, pour tout $S \in \mathcal{S}$ et toute $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de S, on a $\mu(S) = \sum_{T \in \mathcal{P}} \mu(T)$,
b) *dénombrablement additive* (ou *σ-additive*) si elle est finiment additive et si, pour tout $S \in \mathcal{S}$ et toute $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\{ S_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ de S, la série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(S_m)$ converge vers $\mu(S)$.

Notation. Si l'application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est dénombrablement additive et si $\mathcal{P}$ est une $\mathcal{S}$-partition dénombrable infinie de $S \in \mathcal{S}$, alors, pour toute numérotation $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{P}$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(S_m)$ converge vers $\mu(S)$. Il s'ensuit que cette série numérique est commutativement convergente donc absolument convergente vers $\mu(S)$.

Cela étant, si $\mathcal{P}$ est une $\mathcal{S}$-partition dénombrable de $S \in \mathcal{S}$, on introduit la notation $\sum_{T \in \mathcal{P}} \mu(T)$ qui représente aussi bien le nombre $\mu(S)$ que la somme $\sum_{m=1}^{M} \mu(S_m)$ si $(S_m)_{m=1,\ldots,M}$ est une numérotation de $\mathcal{P}$ fini, ou que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(S_m)$ si $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une numérotation de $\mathcal{P}$ infini.

Ceci nous permet de dire que *l'application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est dénombrablement additive si et seulement si, pour tout $S \in \mathcal{S}$ et toute $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\mathcal{P}$ de S, on a $\sum_{T \in \mathcal{P}} \mu(T) = \mu(S)$.*

Proposition 1.3.1 *Si l'application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est finiment additive, alors on a $\mu(\emptyset) = 0$.*

Preuve. De fait, $\{\emptyset, \emptyset\}$ est une $\mathcal{S}$-partition finie de $\emptyset \in \mathcal{S}$ et on doit avoir $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$, ce qui suffit.∎

Définitions. Une application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ *a une variation sur $S \in \mathcal{S}$* s'il existe $C > 0$ tel que $\sum_{T \in \mathcal{P}} |\mu(T)| \le C$ pour toute $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de S. On pose alors

$$V\mu(S) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} |\mu(T)| \,,$$

où $\mathcal{P}(S)$ désigne l'ensemble des $\mathcal{S}$-partitions finies de S.

Une application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ *a une variation* si elle a une variation sur tout élément S de $\mathcal{S}$.

Proposition 1.3.2 *Soit $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ une application dénombrablement additive.*

a) *Si μ a une variation sur $S_0 \in \mathcal{S}$, il a aussi une variation sur tout $S \in \mathcal{S}$ inclus dans S_0 et $V\mu(S) \le V\mu(S_0)$.*

b) *Si μ a une variation sur $S_0 \in \mathcal{S}$ et si $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ disjoints deux à deux et inclus dans S_0, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m)$ converge et sa limite est majorée par $V\mu(S_0)$.*

c) *S'il existe une $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\mathcal{P}_0$ de $S_0 \in \mathcal{S}$ telle que μ ait une variation sur tout élément de $\mathcal{P}_0$ et que la série $\sum_{S\in\mathcal{P}_0} V\mu(S)$ converge, alors μ a une variation sur S_0 et on a $\sum_{S\in\mathcal{P}_0} V\mu(S) = V\mu(S_0)$.*

d) *L'application μ a une variation sur l'élément S de $\mathcal{S}$ si et seulement si la série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(S_m)$ converge pour toute suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$ et inclus dans S_0.*

Preuve. a) Si on a $S_0 = S$, c'est trivial. Sinon, il suffit de noter que, pour toute $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}_0$ de $S_0 \setminus S$ et toute $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de S, $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ est une $\mathcal{S}$-partition finie de S_0 telle que

$$\sum_{T\in\mathcal{P}} |\mu(T)| \leq \sum_{T\in\mathcal{P}\cup\mathcal{P}_0} |\mu(T)| \leq V\mu(S_0).$$

b) Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, soit $\mathcal{P}_{0,M}$ une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_0 \setminus (\cup_{m=1}^{M} S_m)$. Cela étant, pour toutes $\mathcal{S}$-partitions finies $\mathcal{P}_1$ de S_1, ..., $\mathcal{P}_M$ de S_M, l'ensemble $\mathcal{P}_{0,M} \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_M$ est une $\mathcal{S}$-partition finie de S_0 et on a donc

$$\sum_{T\in\mathcal{P}_1} |\mu(T)| + \ldots + \sum_{T\in\mathcal{P}_M} |\mu(T)| \leq \sum_{T\in\mathcal{P}_{0,M}\cup\mathcal{P}_1\cup\ldots\cup\mathcal{P}_M} |\mu(T)| \leq V\mu(S_0),$$

ce qui suffit pour conclure.

c) Soit $\mathcal{P}$ une $\mathcal{S}$-partition finie de $\mathcal{S}_0$. Pour tout $S \in \mathcal{P}_0$ et tout $T \in \mathcal{P}$, $S \cap T$ admet une $\mathcal{S}$-partition finie, que nous notons $\mathcal{P}_{S,T}$. Cela étant, la réunion de ces $\mathcal{S}$-partitions $\mathcal{P}_{S,T}$ pour $S \in \mathcal{P}_0$ et $T \in \mathcal{P}$ est une $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\mathcal{P}_1$ de S_0. La série $\sum_{R\in\mathcal{P}_1} |\mu(R)|$ est donc convergente. Il s'ensuit que μ a une variation finie sur S_0 telle que $V\mu(S_0) \leq \sum_{S\in\mathcal{P}_0} V\mu(S)$ car on a

$$\begin{aligned}\sum_{T\in\mathcal{P}} |\mu(T)| &\leq \sum_{T\in\mathcal{P}} \sum_{S\in\mathcal{P}_0} \sum_{R\in\mathcal{P}_{S,T}} |\mu(R)| = \sum_{R\in\mathcal{P}_1} |\mu(R)| \\ &\leq \sum_{S\in\mathcal{P}_0} \sum_{T\in\mathcal{P}} \sum_{R\in\mathcal{P}_{S,T}} |\mu(R)| \leq \sum_{S\in\mathcal{P}_0} V\mu(S).\end{aligned}$$

D'où la conclusion au moyen de b).

d) La nécessité de la condition résulte aussitôt de b).

La condition est suffisante. Si μ n'a pas de variation finie sur S_0, il existe une $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}_1$ de S_0 telle que $\sum_{T\in\mathcal{P}_1} |\mu(T)| \geq 2 + |\mu(S_0)|$. De plus, vu c), il existe $T_1 \in \mathcal{P}_1$ sur lequel μ n'a pas de variation finie. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{T\in\mathcal{P}_1\setminus\{T_1\}} |\mu(T)| &= \sum_{T\in\mathcal{P}_1} |\mu(T)| - |\mu(T_1)| \\ &\geq 2 + |\mu(S_0)| - \left|\mu(S_0) - \sum_{T\in\mathcal{P}_1\setminus\{T_1\}} \mu(T)\right| \\ &\geq 2 - \sum_{T\in\mathcal{P}_1\setminus\{T_1\}} |\mu(T)|\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{T\in\mathcal{P}_1\setminus\{T_1\}} |\mu(T)| \geq 1.$$

Par une récurrence aisée, on obtient alors pour tout $m \geq 2$ une $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\mathcal{P}_m$ de T_{m-1} et un élément T_m de $\mathcal{P}_m$ sur lequel μ n'a pas de variation finie, tels que

$$\sum_{T\in\mathcal{P}_m\setminus\{T_m\}} |\mu(T)| \geq 1.$$

Au total, $\mathcal{P} = \cup_{m=1}^{\infty}(\mathcal{P}_m \setminus \{T_m\})$ est une partie dénombrable de $\mathcal{S}$, dont les éléments sont inclus dans S_0, sont disjoints deux à deux et sont tels que la série $\sum_{T\in\mathcal{P}} |\mu(T)|$ diverge. D'où une contradiction.∎

Corollaire 1.3.3 *Si $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est une application dénombrablement additive et si $\mathcal{S}$ contient $\cup_{T\in\mathcal{P}} T$ pour toute partie dénombrable $\mathcal{P}$ de $\mathcal{S}$ dont les éléments sont disjoints deux à deux et tous inclus dans un même élément de $\mathcal{S}$, alors μ a une variation.*

En particulier, si $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre, toute application dénombrablement additive $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ a une variation.∎

Définitions. Une *mesure sur* $(X, \mathcal{S})$, ou plus simplement une *mesure sur* X si aucune confusion sur $\mathcal{S}$ n'est possible, est une application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

(m1) μ est dénombrablement additif,

(m2) μ a une variation.

Bien sûr, une mesure μ sur $(X, \mathcal{S})$ est *positive* (resp. *négative; réelle*) si on a $\mu(S) \geq 0$ (resp. $\mu(S) \leq 0$; $\mu(S) \in \mathbb{R}$) pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Théorème 1.3.4 *Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X, toute application $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ dénombrablement additive est une mesure.*∎

Théorème 1.3.5 *Toute application $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ dénombrablement additive est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $V\mu = \mu$.*∎

Définition. *La variation* d'une mesure μ sur $(X, \mathcal{S})$ est l'application

$$V\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty[\quad S \mapsto V\mu(S).$$

Théorème 1.3.6 *La variation $V\mu$ d'une mesure μ sur $(X, \mathcal{S})$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$.*

Preuve. Vu les parties b) et c) de la Proposition 1.3.2, $V\mu$ est une application dénombrablement additive. Comme $V\mu$ est une application positive, le théorème précédent permet de conclure aussitôt.∎

Proposition 1.3.7 *Si l'application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est dénombrablement additive et s'il existe une mesure positive ν sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $|\mu(S)| \le \nu(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}$, alors μ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $V\mu \le \nu$.*

Preuve. C'est immédiat car, pour toute $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\sum_{T \in \mathcal{P}} |\mu(T)| \le \sum_{T \in \mathcal{P}} \nu(T) = \nu(S).\blacksquare$$

Remarque. Nous avons déjà établi que si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ et si les éléments T_m de $\mathcal{S}$ pour $m \in \mathbb{N}_0$ sont disjoints deux à deux et inclus dans un même élément S de $\mathcal{S}$, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(T_m)$ converge et on a $\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(T_m) \le V\mu(S)$. Le lemme technique suivant généralise ce résultat.□

Lemme 1.3.8 *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{S})$. Si $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de $\mathcal{S}$ telle que $\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m) < \infty$, alors, pour toute suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$ telle que $\cup_{k=1}^{\infty} T_k \subset \cup_{m=1}^{\infty} S_m$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} V\mu(T_k)$ converge et on a $\sum_{k=1}^{\infty} V\mu(T_k) \le \sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m)$.*

Preuve. Nous pouvons supposer que les S_m sont deux à deux disjoints, quitte à remplacer la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ par celle des éléments d'une $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\{R_l : l \in \mathbb{N}_0\}$ de $\cup_{m=1}^{\infty} S_m$ telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, $\cup_{m=1}^{M} S_m$ soit réunion des R_l qu'il contient car on a évidemment $\sum_{l=1}^{\infty} V\mu(R_l) \le \sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m)$.

Cela étant, pour tous m, $k \in \mathbb{N}_0$, soit $\mathcal{P}_{m,k}$ une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_m \cap T_k$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,k}$ est alors une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$, deux à deux disjoints et inclus dans S_m. Vu ce qui précède, nous avons donc

$$\sum_{R \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,k}} V\mu(R) \le V\mu(S_m)$$

donc
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{R \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,k}} V\mu(R) \leq \sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m).$$
Pour conclure, il suffit alors de remarquer que
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{R \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,k}} V\mu(R) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{R \in \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,k}} V\mu(R) = \sum_{k=1}^{\infty} V\mu(T_k)$$
car, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $\cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,k}$ est une $\mathcal{S}$-partition dénombrable de T_k.∎

1.4 Exemples fondamentaux

Exemple. La mesure nulle. On vérifie de suite que l'application
$$0\colon \wp(X) \to \mathbb{C} \quad S \mapsto 0$$
est une mesure sur $(X, \wp(X))$, appelée *mesure nulle sur* X.□

Exemple. Mesure de Dirac. Pour tout $x \in X$, on vérifie de suite que l'application
$$\delta_x\colon \wp(X) \to \mathbb{C} \quad S \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une mesure sur $(X, \wp(X))$, appelée *mesure de Dirac associée à* x.□

Exemple. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Fixons $n \in \mathbb{N}_0$ et considérons le semi-anneau $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^n$, dont les éléments sont $\emptyset$ et les semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons prouver que *l'application*
$$\ell\colon \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty[\quad S \mapsto \begin{cases} 0 & si\ S = \emptyset \\ \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) & si\ S = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j] \end{cases}$$
est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n))$, appelée *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Comme l'application ℓ est positive, il suffit d'établir qu'elle est dénombrablement additive.

Soit I un semi-intervalle dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons procéder en trois étapes.

a) Il est clair que, pour tout réseau fini $\mathcal{R}$ de I, $\sum_{R \in \mathcal{R}} \ell(R) = \ell(I)$.

b) Pour toute $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-partition finie $\mathcal{P}$ de I, on a alors $\sum_{S \in \mathcal{P}} \ell(S) = \ell(I)$ car il existe un réseau fini $\mathcal{R}$ de I tel que $J = \cup_{R \in \mathcal{R}, R \subset J} R$ pour tout $J \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire tel que, pour tout $J \in \mathcal{P}$, $\{\, R : R \in \mathcal{R}, R \subset J \,\}$ soit un réseau fini de J.

c) Passons au cas général. Soit $\{\, I_k : k \in \mathbb{N}_0 \,\}$ une $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-partition dénombrable du semi-intervalle $I = \prod_{j=1}^n \left]a_j, b_j\right]$ dans $\mathbb{R}^n$.

D'une part, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$ converge et sa limite est majorée par $\ell(I)$. De fait, pour tout $K \in \mathbb{N}_0$, il existe une $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-partition finie $\mathcal{P}_K$ de I telle que $\{I_1, \ldots, I_K\} \subset \mathcal{P}_K$ donc telle que

$$\sum_{k=1}^{K} \ell(I_k) \leq \sum_{J \in \mathcal{P}_K} \ell(J) = \ell(I).$$

D'autre part, prouvons qu'on a aussi $\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe bien sûr a_1', …, $a_n' \in \mathbb{R}$ tels que $a_j < a_j'$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\ell(I) \leq \ell(I') + \varepsilon/2$ où nous avons posé $I' = \prod_{j=1}^n \left]a_j', b_j\right]$. De plus, nous pouvons évidemment supposer avoir $I_k \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, si I_k est égal à $\prod_{j=1}^n \left]a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$, il existe $b_1'^{(k)}$, …, $b_n'^{(k)} \in \mathbb{R}$ tels que $b_j^{(k)} < b_j'^{(k)}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\ell(I_k') \leq \ell(I_k) + 2^{-k-1}\varepsilon$ où nous avons posé $I_k' = \prod_{j=1}^n \left]a_j^{(k)}, b_j'^{(k)}\right]$. Cela étant, on vérifie de suite que $\{\, (I_k')^\circ : k \in \mathbb{N}_0 \,\}$ est un recouvrement ouvert du compact I'^-. Dès lors, il existe $K \in \mathbb{N}_0$ tel que $I' \subset \cup_{k=1}^K I_k'$ donc tel que

$$\ell(I) \leq \ell(I') + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^{K} \ell(I_k') + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{K} \ell(I_k) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) + \varepsilon$$

(en $(*)$, on utilise le fait qu'il existe une $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-partition finie $\mathcal{P}$ de I' telle que chacun des $I' \cap I_k'$ pour $k = 1$, …, K soit la réunion des éléments de $\mathcal{P}$ qu'il contient). La conclusion s'ensuit aussitôt.∎

Chapitre 2

Intégration

Convention. Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire,

$$(X, \mathcal{S}, \mu)$$

est un *espace mesuré*, c'est-à-dire que

(em1) X est un ensemble non vide,

(em2) $\mathcal{S}$ est un semi-anneau sur X,

(em3) μ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$.

2.1 Fonctions étagées

Définition. Une fonction $\mathcal{S}$-*étagée* (on dit aussi une fonction *étagée* si aucune confusion sur $\mathcal{S}$ n'est possible) est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'éléments de $\mathcal{S}$.

Une telle fonction s'écrit donc sous la forme $\alpha = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$, où J appartient à $\mathbb{N}_0$, où les c_j sont des nombres complexes et où les S_j sont des éléments de $\mathcal{S}$.

Certaines propriétés des fonctions étagées dépendent du résultat suivant.

Proposition 2.1.1 *Une fonction définie sur X est $\mathcal{S}$-étagée si et seulement si elle est égale à une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'éléments de $\mathcal{S}$ disjoints deux à deux.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ une fonction $\mathcal{S}$-étagée. Comme les S_1, ..., S_J appartiennent à $\mathcal{S}$ et sont en nombre fini, il existe une $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de leur union telle que chacun des S_j soit la réunion des éléments de $\mathcal{P}$ qu'il contient. On a alors

$$\alpha = \sum_{j=1}^{J} c_j \sum_{T\in\mathcal{P},\, T\subset S_j} \chi_T = \sum_{T\in\mathcal{P}} \left(\sum_{1\le j\le J,\, S_j\supset T} c_j \right) \chi_T,$$

ce qui suffit.

La suffisance de la condition est triviale.∎

Remarque. Ce résultat montre bien que l'écriture d'une fonction étagée comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'éléments de $\mathcal{S}$ n'est pas unique.

Théorème 2.1.2 a) *Toute combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{S}$-étagées est $\mathcal{S}$-étagée.*

b) *Une fonction α définie sur X est $\mathcal{S}$-étagée si et seulement si $\overline{\alpha}$ est $\mathcal{S}$-étagé.*

Dès lors, une fonction α définie sur X est $\mathcal{S}$-étagée si et seulement si

$$\Re\alpha = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} \quad et \quad \Im\alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

sont $\mathcal{S}$-étagés.

c) *Si α est une fonction $\mathcal{S}$-étagée, alors $|\alpha|$ est $\mathcal{S}$-étagé.*

Dès lors,

i) *une fonction réelle α définie sur X est $\mathcal{S}$-étagée si et seulement si*

$$\alpha_+ = \frac{|\alpha| + \alpha}{2} \quad et \quad \alpha_- = \frac{|\alpha| - \alpha}{2}$$

sont $\mathcal{S}$-étagés.

ii) *si $J \in \mathbb{N}_0$ et si les $\alpha_1, \ldots, \alpha_J$ sont des fonctions $\mathcal{S}$-étagées et réelles, les fonctions* $\sup\{\alpha_1, \ldots, \alpha_J\}$ *et* $\inf\{\alpha_1, \ldots, \alpha_J\}$ *sont $\mathcal{S}$-étagées.*

Preuve. a) et b) sont triviaux.

c) De fait, α peut s'écrire sous la forme $\alpha = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ où les S_j sont des éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{S}$. Cela étant, il vient $|\alpha| = \sum_{j=1}^{J} |c_j|\, \chi_{S_j}$, ce qui suffit.

Les cas particuliers sont immédiats.∎

Définition. Une partie $\mathcal{S}$-*étagée* (on dit aussi partie *étagée* si aucune confusion sur $(X, \mathcal{S})$ n'est possible) est une partie de X dont la fonction caractéristique est $\mathcal{S}$-étagée.

Il revient au même de dire qu'une partie de X est $\mathcal{S}$-étagée si et seulement si elle est réunion finie d'éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{S}$.

2.2 Intégration des fonctions étagées

La définition de la μ-intégrale des fonctions $\mathcal{S}$-étagées sur X repose sur le résultat suivant.

Lemme 2.2.1 *Si les fonctions $\mathcal{S}$-étagées $\sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ et $\sum_{k=1}^{K} d_k \chi_{T_k}$ sont égales, on a*

$$\sum_{j=1}^{J} c_j \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{K} d_k \mu(T_k).$$

Preuve. Comme les $S_1, \ldots, S_J$ et les $T_1, \ldots, T_K$ appartiennent à $\mathcal{S}$ et sont en nombre fini, nous savons qu'il existe une $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de leur réunion telle que chacun des S_j et des T_k soit la réunion des éléments de $\mathcal{P}$ qu'il contient. Cela étant, il vient

$$\sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j} = \sum_{R \in \mathcal{P}} e_R \chi_R = \sum_{k=1}^{K} d_k \chi_{T_k}$$

avec

$$\sum_{1 \leq j \leq J,\, S_j \supset R} c_j = e_R = \sum_{1 \leq k \leq K,\, T_k \supset R} d_k, \quad \forall R \in \mathcal{P},$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J} c_j \mu(S_j) &= \sum_{j=1}^{J} c_j \sum_{R \in \mathcal{P},\, R \subset S_j} \mu(R) = \sum_{R \in \mathcal{P}} e_R \mu(R) \\ &= \sum_{k=1}^{K} d_k \sum_{R \in \mathcal{P},\, R \subset T_k} \mu(R) = \sum_{k=1}^{K} d_k \mu(T_k). \blacksquare \end{aligned}$$

Nous pouvons alors introduire la définition suivante.

Définition. *La μ-intégrale de la fonction $\mathcal{S}$-étagée $\alpha = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$* est le nombre

$$\int \alpha \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} c_j \mu(S_j).$$

Vu le lemme précédent, cette définition a un sens: le nombre $\sum_{j=1}^{J} c_j \mu(S_j)$ est indépendant de la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ choisie pour représenter α.

Passons aux propriétés de la μ-intégrale des fonctions $\mathcal{S}$-étagées.

Théorème 2.2.2 a) *La μ-intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{S}$-étagées est égale à la combinaison linéaire correspondante des μ-intégrales de ces fonctions $\mathcal{S}$-étagées: on a*

$$\int \sum_{j=1}^{J} c_j \alpha_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} c_j \int \alpha_j \, d\mu.$$

b) *Pour toute fonction $\mathcal{S}$-étagée α, on a*

$$\left| \int \alpha \, d\mu \right| \leq \int |\alpha| \; dV\mu.$$

c) *Si la mesure μ est réelle,*
i) *pour toute fonction $\mathcal{S}$-étagée α, on a*

$$\overline{\int \alpha \, d\mu} = \int \overline{\alpha} \, d\mu$$

donc

$$\int \Re\alpha \, d\mu = \Re\left(\int \alpha \, d\mu\right) \quad et \quad \int \Im\alpha \, d\mu = \Im\left(\int \alpha \, d\mu\right).$$

ii) *pour toute fonction $\mathcal{S}$-étagée et réelle α, $\int \alpha \, d\mu$ est un nombre réel.*
d) *Si la mesure μ est positive*
i) *et si les fonctions $\mathcal{S}$-étagées α et β sont réelles et telles que $\alpha \leq \beta$, alors $\int \alpha \, d\mu \leq \int \beta \, d\mu$,*
ii) *et si la fonction $\mathcal{S}$-étagée α est positive, alors $\int \alpha \, d\mu \geq 0$.*

Preuve. a) Il suffit de vérifier que, pour toutes fonctions $\mathcal{S}$-étagées α et β, et tout $c \in \mathbb{C}$, on a

$$\int c\alpha \, d\mu = c \int \alpha \, d\mu \quad \text{et} \quad \int (\alpha + \beta) \, d\mu = \int \alpha \, d\mu + \int \beta \, d\mu,$$

ce qui est immédiat.
b) Comme α peut s'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ où les S_j sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$, il vient en effet

$$\left| \int \alpha \, d\mu \right| = \left| \sum_{j=1}^{J} c_j \mu(S_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{J} |c_j| \, V\mu(S_j) = \int |\alpha| \; dV\mu.$$

c) est immédiat.
d) i) est un cas particulier de ii): il suffit d'appliquer ii) à $\beta - \alpha$. Etablissons ii). De fait, α peut alors s'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ où les S_j sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$, donc où les c_j appartiennent à $[0, +\infty[$.∎

Définition. *La μ-mesure d'une partie $\mathcal{S}$-étagée Q de X* est le nombre

$$\mu(Q) = \int \chi_Q \, d\mu.$$

Cette notation est licite car, pour tout $S \in \mathcal{S}$, on a $\mu(S) = \int \chi_S \, d\mu$.

2.3 Parties μ-négligeables

Définition. Une partie N de X est *μ-négligeable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ telle que

$$N \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m) \leq \varepsilon.$$

Remarque. Si N est une partie de X et si les $S_1, \ldots, S_M$ sont des éléments de $\mathcal{S}$ en nombre fini tels que $N \subset \cup_{m=1}^{M} S_m$ et $\sum_{m=1}^{M} V\mu(S_m) \leq \varepsilon$, alors, en posant $S_m = \emptyset$ pour tout entier $m > M$, la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ est telle que $N \subset \cup_{m=1}^{\infty} S_m$ et $\sum_{m=1}^{\infty} \leq \varepsilon$.

Proposition 2.3.1 *Une partie de X est μ-négligeable si et seulement si elle est $V\mu$-négligeable.* ∎

Proposition 2.3.2 a) *Toute partie d'une partie μ-négligeable est μ-négligeable.*
b) *Toute union dénombrable de parties μ-négligeables est μ-négligeable.*

Preuve. a) est trivial.
b) Soit $(N_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de parties μ-négligeables. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe une suite $(S_{\varepsilon,m,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ telle que

$$N_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{\varepsilon,m,k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} V\mu(S_{\varepsilon,m,k}) \leq 2^{-m}\varepsilon.$$

Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, $\{ S_{\varepsilon,m,k} : m, k \in \mathbb{N}_0 \}$ est une partie dénombrable de $\mathcal{S}$ telle que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} N_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{\varepsilon,m,k} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V\mu(S_{\varepsilon,m,k}) \leq \varepsilon.$$

D'où la conclusion. ∎

Exemple. *L'ensemble $\emptyset$ est μ-négligeable.* □

Exemple. *L'ensemble X est* 0*-négligeable.* □

Exemple. *Pour tout $x_0 \in X$, $X \setminus \{x_0\}$ est δ_{x_0}-négligeable mais $\{x_0\}$ ne l'est pas.*□

Exemple. *Pour tout entier $n \geq 2$, tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble $H = \{\, x \in \mathbb{R}^n : x_j = r \,\}$ est ℓ-négligeable.*

Dès lors, la frontière de tout intervalle de $\mathbb{R}^n$ est ℓ-négligeable.

Afin d'alléger les notations, considérons le cas $j = 1$; les autres se traitent de la même manière. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$S_{\varepsilon,m} = \left]r - 2^{-m-n+1} m^{-n+1} \varepsilon, r\right] \times \prod_{j=1}^{n-1}]-m, m] .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il vient alors

$$H \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{\varepsilon,m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \ell(S_{\varepsilon,m}) \leq \varepsilon$$

car on a bien sûr $\ell(S_{\varepsilon,m}) = 2^{-m}\varepsilon$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.□

Exemple. *Aucune partie d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est ℓ-négligeable.*

Une telle partie contient un semi-intervalle dans $\mathbb{R}^n$ alors que le lemme 1.3.8 entraine clairement qu'aucun semi-intervalle dans $\mathbb{R}^n$ n'est ℓ-négligeable.□

2.4 μ-presque partout sur $A \subset X$

Définitions. Soit A une partie de X. Les locutions "*μ-presque partout sur A*" et "*pour μ-presque tout point de A*" sont équivalentes et signifient "sauf sur une partie μ-négligeable de A".

On écrit aussi "μ-pp *sur* A" au lieu de "μ-presque partout sur A" et "*pour* μ-p.t. $x \in A$" au lieu de "pour μ-presque tout $x \in A$". Enfin, on omet bien souvent "sur A" si $A = X$.

Ces locutions sont très utiles en théorie de l'intégration et sont notamment utilisées dans les contextes suivants.

Définition. Une fonction *définie* μ-pp *sur* $A \subset X$ est une fonction définie sur une partie A' de A telle que $A \setminus A'$ soit μ-négligeable.

Ainsi, la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$$

est une fonction définie ℓ-pp sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, toute fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ est définie ℓ-pp sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4.1 *Toute opération algébrique effectuée sur des fonctions définies* μ-pp *sur $A \subset X$ détermine une fonction définie* μ-pp *sur A pour autant que l'ensemble des zéros des dénominateurs éventuels soit μ-négligeable.*

Preuve. De fait, les seuls points de A où l'opération algébrique n'est pas définie sont les points de A où l'une au moins des fonctions n'est pas définie, ou où un au moins des dénominateurs éventuels s'annule. Il suffit alors de rappeler que toute union finie de parties μ-négligeables est μ-négligeable.∎

Définition. Deux fonctions définies μ-pp sur $A \subset X$ sont *égales* μ-pp *sur A* si l'ensemble des points de A où elles ne prennent pas la même valeur est μ-négligeable.

Comme toute union finie de parties μ-négligeables est μ-négligeable, des fonctions f et g définies μ-pp sur $A \subset X$ sont égales μ-pp sur A si et seulement si

$$\{\, x \in A : f \text{ et } g \text{ sont définis en } x \text{ et } f(x) \neq g(x) \,\}$$

est μ-négligeable.

Proposition 2.4.2 *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Si les fonction f et g sont continues et égales ℓ-*pp *sur Ω, alors elles sont égales sur Ω.*

Preuve. Aucune boule de $\mathbb{R}^n$ n'est ℓ-négligeable. Dès lors, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un point x_m de Ω tel que $|x_m - x_0| \leq 1/m$ et $f(x_m) = g(x_m)$. Cela étant, on a $f(x_0) = g(x_0)$, vu la continuité de f et g sur Ω, et le fait que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de Ω converge vers x_0. D'où la conclusion.∎

Définitions. Une fonction f définie μ-pp sur $A \subset X$ et à valeurs réelles est *bornée supérieurement* (resp. *bornée inférieurement*) μ-pp *sur A* s'il existe une partie μ-négligeable N telle que que f soit défini et borné supérieurement (resp. inférieurement) sur $A \setminus N$.

Une fonction f définie μ-pp sur $A \subset X$ est *bornée* μ-pp *sur A* s'il existe une partie μ-négligeable N telle que f soit défini et borné sur $A \setminus N$. Dans ce cas, on appelle *borne supérieure* μ-pp *de $|f|$ sur A* et on note

$$\sup_{\mu\text{-pp sur } A} |f|$$

la borne inférieure de l'ensemble des nombres $C > 0$ pour lesquels il existe une partie μ-négligeable N telle que f soit défini et borné sur $A \setminus N$ et que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in A \setminus N$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe alors une partie μ-négligeable N_m telle que $|f(x)|$ soit majoré par $\sup_{\mu\text{-pp sur } A} |f| + 1/m$ en tout $x \in A \setminus N_m$. Il s'ensuit que $N = \cup_{m=1}^{\infty} N_m$ est une partie μ-négligeable telle que $|f(x)|$ soit majoré par $\sup_{\mu\text{-pp sur } A} |f|$ en tout $x \in A \setminus N$. On a donc

$$|f(x)| \leq \sup_{\mu\text{-pp sur } A} |f| \quad \text{pour } \mu\text{-p.t. } x \in \Omega$$

et il s'agit là de la meilleure inégalité de ce genre.

Définitions. Une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies μ-pp sur une partie A de X *converge* μ-pp *sur* A *vers* f_0, f_0 étant une fonction définie μ-pp sur A, s'il existe une partie μ-négligeable N telle que la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur $A \setminus N$ vers f_0. (Ceci exige en particulier que chacune des fonctions f_m, y compris f_0, soit définie sur $A \setminus N$.)

Une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies μ-pp sur $A \subset X$ *converge* μ-pp *sur* A s'il existe une fonction f_0 définie μ-pp sur A telle que la suite f_m converge μ-pp sur A vers f_0.

2.5 Théorèmes de transition

Ce paragraphe contient les résultats qui vont nous permettre de sortir du cadre étroit de la μ-intégration des fonctions $\mathcal{S}$-étagées, en définissant les fonctions μ-intégrables et leur μ-intégrale. Ils n'interviennent dans cette théorie que pour établir les résultats du Paragraphe 2.7, qui d'ailleurs les généralisent.

Définition. Une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées est *μ-de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$p, q \geq M \Longrightarrow \int |\alpha_p - \alpha_q| \, dV\mu \leq \varepsilon.$$

Remarque. Une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées peut être μ-de Cauchy et ne pas converger μ-pp sur X.

Ainsi la suite $\alpha_m = \chi_{S_m}$ définie par

$$S_{2^k+j} = \left]j2^{-k}, (j+1)2^{-k}\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, \ldots, 2^k - 1\},$$

est ℓ-de Cauchy dans $\mathbb{R}$ mais ne converge pas ℓ-pp sur $\mathbb{R}$. En fait, elle ne converge en aucun point de $]0, 1]$.□

Théorème 2.5.1 *Si la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées est μ-de Cauchy, alors*

a) *la suite numérique $\int \alpha_m \, d\mu$ converge,*

b) *la suite $|\alpha_m|$ est $V\mu$-de Cauchy. Par conséquent, la suite $\int |\alpha_m| \, dV\mu$ converge.*

Preuve. a) La suite numérique $\int \alpha_m \, d\mu$ est de Cauchy car, pour tous p, $q \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$\left| \int \alpha_p \, d\mu - \int \alpha_q \, d\mu \right| = \left| \int (\alpha_p - \alpha_q) \, d\mu \right| \leq \int |\alpha_p - \alpha_q| \, dV\mu.$$

b) La suite $|\alpha_m|$ est $V\mu$-de Cauchy car, pour tous p, $q \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$\big| |\alpha_p| \, - \, |\alpha_q| \big| \leq |\alpha_p - \alpha_q|$$

alors que les deux membres de cette inégalité sont des fonctions $\mathcal{S}$-étagées, donc

$$\int \big| |\alpha_p| \, - \, |\alpha_q| \big| \, dV\mu \leq \int |\alpha_p - \alpha_q| \, dV\mu. \blacksquare$$

Voici le *premier théorème de transition.*

Théorème 2.5.2 *De toute suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy, on peut extraire une sous-suite $(\alpha_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ qui converge μ-*pp *sur X.*

On peut même exiger que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(S_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ telle que
a) $\sum_{j=1}^{\infty} V\mu(S_{\varepsilon,j}) \leq \varepsilon$,
b) *la suite $\alpha_{k(m)}$ converge uniformément sur $X \setminus (\cup_{j=1}^{\infty} S_{\varepsilon,j})$.*

Preuve. Etablissons d'abord la version raffinée de l'énoncé. Comme la suite α_m est μ-de Cauchy, on peut évidemment en extraire une sous-suite $\alpha_{k(m)}$ telle que

$$\int \left| \alpha_{k(m+1)} - \alpha_{k(m)} \right| dV\mu \leq 2^{-2m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Cela étant, il est clair que, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, la suite $\alpha_{k(m)}$ converge uniformément sur $X \setminus U_p$ si on pose

$$U_p = \bigcup_{m=p}^{\infty} \left\{ x \in X : \left| \alpha_{k(m+1)}(x) - \alpha_{k(m)}(x) \right| \geq 2^{-m} \right\}.$$

Comme, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$Q_m = \left\{ x \in X : \left| \alpha_{k(m+1)}(x) - \alpha_{k(m)}(x) \right| \geq 2^{-m} \right\}$$

est une partie $\mathcal{S}$-étagée de X telle que

$$\chi_{Q_m} \leq 2^m \left| \alpha_{k(m+1)} - \alpha_{k(m)} \right| \quad \text{donc telle que} \quad V\mu(Q_m) \leq 2^{-m},$$

on conclut aussitôt.

La version faible de l'énoncé est alors immédiate car la suite $\alpha_{k(m)}$ converge en fait en tout point de $X \setminus (\cap_{p=1}^{\infty} U_p)$, alors que $\cap_{p=1}^{\infty} U_p$ est bien sûr une partie μ-négligeable de X. $\blacksquare$

Voici ensuite *le second théorème de transition.*

Théorème 2.5.3 *Si la suite* $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *de fonctions* $\mathcal{S}$*-étagées est* μ*-de Cauchy et converge* μ-pp *vers* 0*, alors la suite numérique* $\int |\alpha_m|\, dV\mu$ *converge vers* 0*.*

Preuve. Comme nous savons déjà que la suite $\int |\alpha_m|\, dV\mu$ converge, tout revient à établir qu'une de ses sous-suites converge vers 0.

Pour conclure, il suffit donc d'établir que, pour une sous-suite $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de la suite α_m choisie au moyen du premier théorème de transition, on a $\int |\beta_m|\, dV\mu \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si nous avons $\int |\beta_m|\, dV\mu = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ suffisamment grand, la preuve est triviale. Sinon il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\int |\beta_M|\, dV\mu \neq 0 \quad \text{et} \quad \int |\beta_p - \beta_q|\, dV\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p, q \geq M.$$

Cela étant, $Q = \{\, x \in X : \beta_M(x) \neq 0 \,\}$ est une partie $\mathcal{S}$-étagée de X telle que $V\mu(Q) \neq 0$. De plus, vu le premier théorème de transition et le fait que la suite β_m converge μ-pp sur X vers 0, il existe une suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m) \leq \frac{\varepsilon}{3 \sup_{x\in X} |\beta_M(x)|} \quad \text{et} \quad \beta_m \underset{X\setminus U}{\Longrightarrow} 0,$$

où nous avons posé $U = \cup_{m=1}^{\infty} S_m$. Il existe ensuite un entier $N \geq M$ tel que

$$\sup_{x\in X\setminus U} |\beta_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3\, V\mu(Q)}, \quad \forall m \geq N.$$

Dès lors, pour tout $m \geq N$, comme nous avons

$$Q_m = \left\{ x \in X : |\beta_m(x)| > \frac{\varepsilon}{3\, V\mu(Q)} \right\} \subset U,$$

il vient successivement

$$\begin{aligned}
\int |\beta_m|\, dV\mu \;&\underset{(*)}{=}\; \int |\beta_m|\, \chi_{Q_m}\, dV\mu + \int |\beta_m|\, \chi_{X\setminus Q_m}\, dV\mu \\
&\underset{(**)}{\leq}\; \int |\beta_m - \beta_M|\, \chi_{Q_m}\, dV\mu + \int |\beta_M|\, \chi_{Q_m}\, dV\mu \\
&\qquad + \int |\beta_m|\, \chi_{Q\setminus Q_m}\, dV\mu + \int |\beta_m - \beta_M|\, \chi_{(X\setminus Q)\setminus Q_m}\, dV\mu \\
&\underset{(***)}{\leq}\; \int |\beta_m - \beta_M|\, dV\mu + \sup_{x\in X} |\beta_M(x)| \cdot V\mu(Q_m) \\
&\qquad + \sup_{x\in X\setminus Q_m} |\beta_m(x)| \cdot V\mu(Q) \\
&\underset{(****)}{\leq}\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Nous avons utilisé en $(*)$ le fait que $|\beta_m|\,\chi_{X\setminus Q_m}$ est une fonction $\mathcal{S}$-étagée; en $(**)$, le fait que β_M est identiquement nul sur $X \setminus Q$ et que toutes les fonctions intégrées sont $\mathcal{S}$-étagées; en $(***)$, nous avons regroupé les termes extrêmes du membre précédent; en $(****)$, nous avons majoré $V\mu(Q_m)$ par $\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m)$ vu que $Q_m \subset U$, en recourant au Lemme 1.3.8.) D'où la conclusion.∎

Remarque. Nous sommes à présent armés pour sortir du cadre étroit de l'intégration des seules fonctions $\mathcal{S}$-étagées. Nous allons en fait d'abord introduire la notion de fonction μ-intégrable puis établir le critère de Cauchy qui généralise les deux théorèmes de transition; ils auront alors accompli leur tâche.

2.6 Fonctions μ-intégrables

Remarque. Soit f une fonction définie μ-pp sur X et soient $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ deux suites de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui sont μ-de Cauchy et qui convergent μ-pp vers f. On vérifie alors immédiatement que $\alpha_m - \beta_m$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées, qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers la fonction 0. Dès lors, vu le second théorème de transition, la suite numérique $\int (\alpha_m - \beta_m)\, d\mu$ converge vers 0 et par conséquent les limites des suites numériques $\int \alpha_m\, d\mu$ et $\int \beta_m\, d\mu$ sont égales. Cela étant, il est licite d'introduire les définitions suivantes.

Définitions. Une fonction *μ-intégrable* (on dit aussi fonction *intégrable* si aucune confusion sur μ n'est possible) est une fonction f définie μ-pp sur X pour laquelle il existe une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui

a) est μ-de Cauchy,

b) converge μ-pp vers f.

Cela étant, la limite de la suite numérique $\int \alpha_m\, d\mu$ est appelée *μ-intégrale de f* et est notée
$$\int f\, d\mu.$$
(Cette position est licite car, d'une part, comme nous l'avons remarqué dans la remarque précédente, la limite de la suite $\int \alpha_m\, d\mu$ ne dépend pas du choix de la suite α_m et, d'autre part, pour toute fonction $\mathcal{S}$-étagée α, $(\alpha_m = \alpha)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers α: α est donc une fonction μ-intégrable et les deux symboles $\int \alpha\, d\mu$ introduits ont la même valeur.)

L'ensemble des fonctions μ-intégrables est noté
$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$$
ou même $\mathcal{L}^1$ si aucune confusion sur $(X, \mathcal{S}, \mu)$ n'est possible.

Une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *définit* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ s'il s'agit d'une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers f.

Une partie A de X est *μ-intégrable* si sa fonction caractéristique est μ-intégrable auquel cas sa *μ-mesure* est le nombre

$$\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu.$$

Théorème 2.6.1 a) *Les espaces* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ *et* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, V\mu)$ *sont égaux.*

b) *Deux fonction définies μ-pp et égales μ-pp sur X sont simultanément μ-intégrables, auquel cas elles ont même μ-intégrale.*∎

Théorème 2.6.2 a) *Toute combinaison linéaire de fonctions μ-intégrables est μ-intégrable et, avec des notations claires par elles-mêmes,*

$$\int \sum_{j=1}^{J} c_j f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} c_j \int f_j \, d\mu.$$

b) *Une fonction f définie* μ-pp *sur X est μ-intégrable si et seulement si $\overline{f}$ est μ-intégrable.*

Dès lors, une fonction f définie μ-pp *sur X est μ-intégrable si et seulement si*

$$\Re f = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad et \quad \Im f = \frac{f - \overline{f}}{2i}$$

sont μ-intégrables. Si c'est le cas et si μ est une mesure réelle, on a

$$\int \overline{f} \, d\mu = \overline{\int f \, d\mu}, \quad \Re \int f \, d\mu = \int \Re f \, d\mu \quad et \quad \Im \int f \, d\mu = \int \Im f \, d\mu.$$

c) *Le module d'une fonction μ-intégrable est μ-intégrable et*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \; dV\mu.$$

Dès lors, une fonction f définie μ-pp *sur X et à valeurs réelles est μ-intégrable si et seulement si*

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2} \quad et \quad f_- = \frac{|f| - f}{2}$$

sont μ-intégrables.

De plus, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et tous $f_1, \ldots, f_J \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ à valeurs réelles,

$$\sup_{\mu\text{-}pp\ sur\ X} \{f_1, \ldots, f_J\} \quad et \quad \inf_{\mu\text{-}pp\ sur\ X} \{f_1, \ldots, f_J\}$$

sont μ-intégrables.

d) *Pour tous f, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ à valeurs réelles et tels que $f \leq g$ μ-pp sur X, on a*

$$\int f \, dV\mu \leq \int g \, dV\mu.$$

En particulier, pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, $\int f \, dV\mu \geq 0$.

Preuve. a) D'une part, si $c \in \mathbb{C}$ et si la suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définit $f \in \mathcal{L}^1$, il est clair que $c\alpha_m$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers cf: cf est donc une fonction μ-intégrable telle que

$$\int cf \, d\mu = \lim_m \int c\alpha_m \, d\mu = \lim_m \, c \int \alpha_m \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

D'autre part, si les suites $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définissent respectivement f et $g \in \mathcal{L}^1$, on vérifie directement que $\alpha_m + \beta_m$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers $f + g$: $f + g$ est donc une fonction μ-intégrable telle que

$$\begin{aligned} \int f + g \, d\mu &= \lim_m \int (\alpha_m + \beta_m) \, d\mu \\ &= \lim_m \left(\int \alpha_m \, d\mu + \int \beta_m \, d\mu \right) = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

b) Si la suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définit $f \in \mathcal{L}^1$, il est clair que $\overline{\alpha_m}$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers $\overline{f}$: $\overline{f}$ est donc μ-intégrable. La conclusion s'ensuit aussitôt.

c) Si la suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définit $f \in \mathcal{L}^1$, on vérifie directement que $|\alpha_m|$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est μ-de Cauchy et qui converge μ-pp vers $|f|$: $|f|$ est donc μ-intégrable et

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \lim_m \left| \int \alpha_m \, d\mu \right| \leq \lim_m \int |\alpha_m| \, dV\mu = \int |f| \, dV\mu.$$

d) résulte aussitôt de c) et a): il vient successivement

$$0 \leq \left| \int (g - f) \, d\mu \right| \leq \int |g - f| \, dV\mu = \int (g - f) \, dV\mu. \blacksquare$$

Théorème 2.6.3 (approximation) *Si la suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées définit la fonction μ-intégrable f, on a*

$$\int |f - \alpha_m| \, dV\mu \to 0.$$

Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\mathcal{S}$-étagée α et une suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que, pour $U = \cup_{m=1}^{\infty} S_m$,
a) *f est défini sur $X \setminus U$,*
b) *$\int |f - \alpha|\, dV\mu \leq \varepsilon$,*
c) *$\sup_{x\in X\setminus U} |f(x) - \alpha(x)| \leq \varepsilon$,*
d) *$\sum_{m=1}^{\infty} V\mu(S_m) \leq \varepsilon$.*

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\int |\alpha_p - \alpha_q|\, dV\mu \leq \varepsilon$ pour tous entiers p, q tels que p, $q \geq M$. Or, pour tout entier $m \geq M$, $(|\alpha_m - \alpha_p|)_{p\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est $V\mu$-de Cauchy et qui converge $V\mu$-pp sur X vers $|\alpha_m - f|$. Il s'ensuit que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $m \geq M$, il vient

$$\int |\alpha_m - f|\, dV\mu = \lim_p \int |\alpha_m - \alpha_p|\, dV\mu \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit largement pour établir la première partie de l'énoncé.

La deuxième partie de l'énoncé est alors une conséquence directe du premier théorème de transition: la suite $(\alpha_M - \alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définit bien sûr la fonction μ-intégrable $\alpha_M - f$. Il existe donc une suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} V\mu(S_k) \leq \varepsilon$ et que la suite $\alpha_M - \alpha_m$ converge uniformément sur $X \setminus U$ vers $\alpha_M - f$, où nous avons posé $U = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$. Il existe donc $p \geq M$ tel que

$$\|(\alpha_M - f) - (\alpha_M - \alpha_p)\|_{X\setminus U} = \|\alpha_p - f\|_{X\setminus U} \leq \varepsilon.$$

Au total, $\alpha = \alpha_p$ convient.∎

Théorème 2.6.4 (approximation) *Pour toute partie μ-intégrable A de X et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $\mathcal{S}$-étagée Q de X telle que*

$$\int |\chi_A - \chi_Q|\, dV\mu \leq \varepsilon.$$

Preuve. Vu le théorème d'approximation des fonctions μ-intégrables, il existe une fonctions $\mathcal{S}$-étagée α telle que $\int |\chi_A - \alpha|\, dV\mu \leq \varepsilon/2$. Cela étant, l'ensemble $Q = \{\, x \in X : \Re\alpha(x) \geq 1/2 \,\}$ est bien sûr une partie $\mathcal{S}$-étagée de X telle que

$$|\chi_A - \chi_Q| \underset{(*)}{\leq} 2\,|\chi_A - \Re\alpha| \leq 2\,|\chi_A - \alpha|$$

(pour établir $(*)$, il suffit de considérer successivement les cas où x appartient à $A \cap Q$, $A \setminus Q$, $Q \setminus A$ ou $X \setminus (A \cup Q)$); la conclusion est alors immédiate.∎

2.7 Suites de fonctions μ-intégrables

Etendons d'abord le concept de suites μ-de Cauchy aux fonctions μ-intégrables.

Définition. Une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions μ-intégrables est *μ-de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\int |f_p - f_q| \, dV\mu \leq \varepsilon$ pour tous p, $q \in \mathbb{N}_0$ tels que p, $q \geq M$.

Le résultat suivant généralise les deux théorèmes de transition au cas des fonctions μ-intégrables.

Critère 2.7.1 (Cauchy) *Si la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions μ-intégrables est μ-de Cauchy, il existe une fonction μ-intégrable f telle que*

$$\int |f_m - f| \, dV\mu \to 0.$$

En particulier, la suite numérique $\int f_m \, d\mu$ converge et sa limite est égale à $\int f \, d\mu$.

*De plus, il existe une sous-suite $(f_{k(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ de la suite f_m qui converge μ-*pp *sur X vers f. On peut même exiger que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(S_{\varepsilon,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que*

a) $\sum_{j=1}^{\infty} V\mu(S_{\varepsilon,j}) \leq \varepsilon$,

b) *la suite $f_{k(m)}$ converge uniformément sur $X \setminus (\cup_{j=1}^{\infty} S_{\varepsilon,j})$ vers f.*

Preuve. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, vu le théorème d'approximation des fonctions μ-intégrables 2.6.3, il existe une fonction $\mathcal{S}$-étagée α_m et une suite $(S_{m,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que, pour $U_m = \cup_{j=1}^{\infty} S_{m,j}$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int |f_m - \alpha_m| \, dV\mu \leq 2^{-m}, \\ \displaystyle\sup_{x\in X\setminus U_m} |\alpha_m(x) - f_m(x)| \leq 2^{-m}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} V\mu(S_{m,j}) \leq 2^{-m}. \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que la suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ainsi créée est μ-de Cauchy car, pour tous p, $q \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$\int |\alpha_p - \alpha_q| \, dV\mu \leq \int |\alpha_p - f_p| \, dV\mu + \int |f_p - f_q| \, dV\mu + \int |f_q - \alpha_q| \, dV\mu.$$

Le premier théorème de transition assure d'abord l'existence d'une sous-suite $(\alpha_{k(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ qui converge μ-pp sur X; notons-en f la limite μ-pp. Il affirme ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe une suite $(T_{n,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que, pour $V_n = \cup_{j=1}^{\infty} T_{n,j}$, on a

$$\begin{cases} \sup_{x\in X\setminus V_n} \left|\alpha_{k(m)} - f(x)\right| \to 0, \\ \sum_{j=1}^{\infty} V\mu(T_{n,j}) \leq 2^{-n}. \end{cases}$$

Cela étant, on obtient aisément par récurrence une sous-suite $(\alpha_{l(k(m))})_{m\in\mathbb{N}_0}$ de la suite $(\alpha_{k(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ telle que

$$\sup_{x\in V_m} \left|f(x) - \alpha_{l(k(m))}(x)\right| \leq 2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Au total, il est alors clair que f est une fonction μ-intégrable, définie par cette suite $\alpha_{l(k(m))}$. Par conséquent, il vient successivement

$$\int \left|\alpha_{l(k(m))} - f\right| \, dV\mu \to 0 \quad \text{donc} \quad \int \left|f_{l(k(m))} - f\right| \, dV\mu \to 0$$

et finalement

$$\int |f_m - f| \, dV\mu \to 0.$$

Le cas particulier résulte aussitôt de la majoration

$$\left|\int f_m \, d\mu - \int f \, d\mu\right| \leq \int |f_m - f| \, dV\mu,$$

valable pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

De plus, pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, posons

$$W_r = \left(\bigcup_{m=r}^{\infty} U_m\right) \bigcup \left(\bigcup_{m=r}^{\infty} V_m\right).$$

Chaque W_r est alors une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$ dont la série des $V\mu$-mesures est majorée par 2^{-r+2} et tel que $W_r \supset W_{r+1}$ pour tout $r \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour conclure, il suffit de noter que, pour $m \geq r$,

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in X\setminus W_r} \left|f_{l(k(m))}(x) - f(x)\right| \\ &\leq \sup_{x\in X\setminus W_r} \left|f_{l(k(m))}(x) - \alpha_{l(k(m))}(x)\right| + \sup_{x\in X\setminus W_r} \left|\alpha_{l(k(m))}(x) - f(x)\right| \\ &\leq 2^{-m+1}. \blacksquare \end{aligned}$$

Du critère de Cauchy, déduisons le célèbre *théorème de la convergence monotone*.

Théorème 2.7.2 (convergence monotone, Levi) *Si la suite de fonctions μ-intégrables et réelles $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est croissante* (resp. *décroissante*) μ-pp *sur X et si la suite numérique $\int f_m \, dV\mu$ est majorée* (resp. *minorée*)*, alors*

a) *la suite f_m converge μ-pp sur X vers une fonction f définie μ-pp sur X,*

b) *f est une fonction μ-intégrable sur X,*

c) *on a*

$$\int |f_m - f| \, dV\mu \to 0 \quad \textit{donc} \quad \int f_m \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Preuve. Etablissons le cas où la suite f_m est croissante μ-pp sur X; l'autre cas se démontre de même ou en remarquant que la suite $-f_m$ est alors croissante μ-pp sur X.

Démontrons d'abord que la suite f_m est μ-de Cauchy. De fait, pour tous p, $q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \le q$, il vient

$$\int |f_p - f_q| \, dV\mu = \int (f_q - f_p) \, dV\mu = \left| \int f_q \, dV\mu - \int f_p \, dV\mu \right|$$

alors que la suite numérique réelle $\int f_m \, dV\mu$ converge car elle est croissante et majorée.

Vu le critère de Cauchy, il existe alors une fonction μ-intégrable f et une sous-suite $f_{k(m)}$ de la suite f_m telles que $\int |f - f_m| \, dV\mu \to 0$ et que la suite $f_{k(m)}$ converge μ-pp sur X vers f.

La conclusion s'ensuit aussitôt car il existe d'une part une partie μ-négligeable N_1 de X telle que $f_m(x) \uparrow$ pour tout $x \in X \setminus N_1$ et d'autre part une partie μ-négligeable N_2 telle que $f_{k(m)}(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X \setminus N_2$. Au total, on a alors $f_m(x) \uparrow f(x)$ pour tout $x \in X \setminus (N_1 \cup N_2)$ avec $N_1 \cup N_2$ μ-négligeable.∎

Remarque. Le théorème de la convergence monotone est donc à la fois un critère de convergence μ-pp, un critère de μ-intégrabilité et un critère de passage à la limite sous le signe d'intégration.□

Le théorème de la convergence monotone a de nombreuses et importantes conséquences.

Théorème 2.7.3 (annulation μ-pp) *Une fonction μ-intégrable f est nulle* μ-pp *sur X si et seulement si $\int |f| \, dV\mu = 0$.*

Preuve. La nécessité de la condition est claire: il suffit de noter que la suite $(\alpha_m = 0)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions μ-étagées définit $|f|$.

La condition est suffisante. De fait, $(f_m = m\,|f|)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est alors une suite de fonctions μ-intégrables et réelles, croissante μ-pp sur X et telle que la suite numérique

$\int f_m \, dV\mu$ soit majorée par 0. Il s'ensuit notamment, par le théorème de la convergence monotone, que la suite $m\,|f|$ converge μ-pp sur X. D'où la conclusion car en tout $x \in X$ où f est défini et diffère de 0, la suite $m\,|f(x)|$ diverge.∎

Théorème 2.7.4 (intégration des séries) *Si la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions μ-intégrables est telle que la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \int |f_m| \, dV\mu$ converge, alors*
a) *la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ converge absolument pour presque tout $x \in X$,*
b) *$\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ est une fonction μ-intégrable,*
c) *$\int \sum_{m=1}^{\infty} f_m \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int f_m \, d\mu$.*

Preuve. a) Il est clair que $(g_M = \sum_{m=1}^{M} |f_m|)_{M\in\mathbb{N}_0}$ est une suite croissante μ-pp de fonctions μ-intégrables et réelles et que la suite numérique $\int g_M \, dV\mu$ est majorée. Le théorème de la convergence monotone assure alors que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |f_m|$ converge μ-pp sur X.

b) et c). Comme

$$\int \left| \sum_{m=p}^{q} f_m \right| dV\mu \leq \sum_{m=p}^{q} \int |f_m| \, dV\mu, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0 \text{ tels que } p \leq q,$$

la série $F = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ est μ-de Cauchy. Dès lors, vu le critère de Cauchy, F est μ-intégrable et tel que

$$\int \left| F - \sum_{m=1}^{M} f_m \right| dV\mu \to 0,$$

ce qui suffit.∎

Corollaire 2.7.5 *Il existe une fonction μ-intégrable définie sur X et à valeurs strictement positives.*

Preuve. Si $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X, on vérifie aussitôt que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{-m}}{1 + V\mu(S_m)} \, \chi_{S_m}$$

convient.∎

Remarque. C'est dans ce dernier Corollaire que nous utilisons pour la première fois le fait d'avoir exigé dans la définition des semi-anneaux que X soit la réunion d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}$.□

Voici à présent le célèbre *théorème de la convergence majorée.*

Théorème 2.7.6 (convergence majorée, Lebesgue) *Si la suite* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *de fonctions* μ*-intégrables converge* μ-pp *sur* X *et s'il existe une fonction* μ*-intégrable* F *telle que* $|f_m| \leq F$ μ-pp *sur* X *pour tout* $m \in \mathbb{N}_0$*, alors*

a) *la limite* f μ-pp *sur* X *de la suite* f_m *est une fonction* μ*-intégrable,*

b) *on a*

$$\int |f_m - f| \; dV\mu \to 0 \quad donc \quad \int f_m \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Preuve. Remarquons qu'il suffit d'établir que la suite f_m est μ-de Cauchy. En effet, le critère de Cauchy assure alors l'existence d'une fonction μ-intégrable g telle que $\int |f_m - g| \; dV\mu \to 0$ et l'existence d'une sous-suite $f_{k(m)}$ de la suite f_m qui converge μ-pp sur X vers g. Cela impose $f = g$ μ-pp sur X, ce qui suffit pour conclure.

Or, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\left(\sup_{m \leq p,q \leq M} |f_p - f_q| \right)_{M \in \mathbb{N}_0, M \geq m}$$

est une suite de fonctions μ-intégrables vérifiant les conditions d'application du théorème de la convergence monotone. Il s'ensuit qu'elle converge μ-pp sur X vers une fonctions μ-intégrable, soit g_m.

Cela étant, la suite g_m vérifie elle aussi les conditions d'application du théorème de la convergence monotone: chaque g_m est une fonction μ-intégrable et réelle, la suite g_m décroît μ-pp sur X vers 0 et $\int g_m \, dV\mu \geq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On a donc $\int g_m \, dV\mu \to \int 0 \, dV\mu = 0$.

D'où la conclusion car il est clair que, pour tous m, p, $q \in \mathbb{N}_0$ tels que $m \leq p \leq q$, on a

$$\int |f_p - f_q| \; dV\mu \leq \int g_m \, dV\mu. \blacksquare$$

Remarque. Le théorème de la convergence majorée est donc à la fois un critère de μ-intégrabilité et un critère de passage à la limite sous le signe d'intégration.$\square$

Corollaire 2.7.7 *Si la suite de fonctions* μ*-intégrables* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *converge* μ-pp *vers la fonction* μ*-intégrable* f_0 *et si* $\int |f_m| \; dV\mu \to \int |f_0| \; dV\mu$*, alors on a* $\int |f_m - f_0| \; dV\mu \to 0$.

Preuve. De fait, $(|f_m| - |f_m - f_0|)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est alors une suite de fonctions μ-intégrables qui converge μ-pp sur X vers $|f_0|$ et telle que

$$\big| |f_m| - |f_m - f_0| \big| \leq |f_0| \quad \mu\text{-pp sur } X, \, \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Dès lors, le théorème de la convergence majorée donne

$$\int (|f_m| - |f_m - f_0|) \, dV\mu \to \int |f_0| \, dV\mu,$$

ce qui suffit.∎

Voici enfin un résultat d'usage nettement moins courant. Son hypothèse se situe entre celles des théorèmes de la convergence monotone et de la convergence majorée. Il s'agit encore une fois d'une (double) application du théorème de la convergence monotone.

Théorème 2.7.8 (Fatou) *Si la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions μ-intégrables et réelles converge μ-pp sur X et s'il existe $C \in \mathbb{R}$ et une fonction F μ-intégrable tels que*

$$F \leq f_m \quad \mu\text{-pp } \textit{sur } X \quad \textit{et} \quad \int f_m \, dV\mu \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

alors

a) *la limite f μ-pp sur X de la suite f_m est μ-intégrable,*

b) *on a*

$$\int \left| f - \inf_{m\geq k} f_m \right| dV\mu \to 0 \quad \textit{si } k \to \infty.$$

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\left(\inf_{k\leq m\leq K} f_m \right)_{K\in\mathbb{N}_0, K\geq k}$$

est une suite de fonctions μ-intégrables et réelles, qui décroît μ-pp sur X et qui est minorée μ-pp sur X par F. Par le théorème de la convergence monotone, la limite μ-pp sur X de cette suite, à savoir $\inf_{m\geq k} f_m$, est une fonction μ-intégrable.

Cela étant, $(\inf_{m\geq k} f_m)_{k\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions μ-intégrables et réelles, qui croît μ-pp sur X et telle que $\int \inf_{m\geq k} f_m \, dV\mu \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Par le théorème de la convergence monotone, la limite μ-pp de cette suite, soit g, est μ-intégrable et telle que

$$\int \left| g - \inf_{m\geq k} f_m \right| dV\mu \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

D'où la conclusion car on vérifie directement que g est égal μ-pp à f.∎

Remarque. On vérifie aisément que, partout dans l'énoncé du théorème de Fatou, on peut remplacer $\leq$ par $\geq$ et inf par sup.

Chapitre 3

Fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes et fonctions μ-mesurables

Convention. Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace mesuré.

Préambule. Les fonctions μ-intégrables sont limite μ-pp de certaines suites de fonctions $\mathcal{S}$-étagées. Pour en avoir une meilleure connaissance, nous allons étudier, d'abord, les limites des suites de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui sont ponctuellement convergentes sur X et, ensuite, les limites μ-pp des suites de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui convergent μ-pp sur X.

3.1 Fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes

Définition. L'ensemble $\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$ des fonctions *$\mathcal{S}$-boréliennes* est l'intersection de toutes les parties de l'algèbre $\mathrm{F}(X)$ des fonctions définies sur X qui

(FSB1) contiennent toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées,

(FSB2) contiennent la limite de toutes leurs suites ponctuellement convergentes sur X.

Cette définition a évidemment un sens car $\mathrm{F}(X)$ contient bien sûr toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées ainsi que la limite de toutes ses suites ponctuellement convergentes sur X.

Exemple. *Toute fonction $\mathcal{S}$-étagée est $\mathcal{S}$-borélienne.*$\square$

Bien que fondamental, le résultat suivant est trivial vu la définition même des fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes: il ne fait que répéter une des propriétés caractéristiques de ces fonctions.

Théorème 3.1.1 *Si une suite de fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes est ponctuellement convergente sur X, sa limite ponctuelle est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne sur X.*∎

Exemple. *La fonction χ_X est $\mathcal{S}$-borélienne.*

Il existe en effet une suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X et dont les éléments sont disjoints deux à deux. Cela étant, $(\sum_{m=1}^{M}\chi_{S_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées sur X qui converge ponctuellement sur X vers χ_X, ce qui suffit.□

Exemple. *Etablir que toute fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-borélienne.*

C'est clair car toute fonction continue sur Ω est limite ponctuelle sur Ω d'une suite de fonctions $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-étagées.□

Exemple. Mentionnons qu'au paragraphe suivant, nous établissons que si f_1, ..., f_n sont des fonctions réelles et $\mathcal{S}$-boréliennes sur X et si f est une fonction $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$-borélienne, alors la fonction composée $f(f_1,\ldots,f_n)$ est $\mathcal{S}$-borélienne.□

Théorème 3.1.2 a) *L'ensemble* $\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$ *est une sous-algèbre de* $\mathrm{F}(X)$.

b) *Une fonction f sur X est $\mathcal{S}$-borélienne si et seulement si $\overline{f}$ est $\mathcal{S}$-borélien.*

Dès lors, une fonction f sur X est $\mathcal{S}$-borélienne si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ sont $\mathcal{S}$-boréliens.

c) *Si f est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne, alors $|f|$ est $\mathcal{S}$-borélien.*

Dès lors, une fonction réelle f sur X est $\mathcal{S}$-borélienne si et seulement si f_+ et f_- sont $\mathcal{S}$-boréliens.

Cela étant, pour tout $J\in\mathbb{N}_0$ et toutes fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes f_1, ..., f_J, les fonctions $\sup\{f_1,\ldots,f_J\}$ *et* $\inf\{f_1,\ldots,f_J\}$ *sont $\mathcal{S}$-boréliennes.*

Preuve. a.1) Pour tout $f\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$ et tout $c\in\mathbb{C}$, $cf\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$. De fait, la partie $\{\,h\in\mathrm{F}(X): ch\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)\,\}$ contient assurément les fonctions $\mathcal{S}$-étagées ainsi que la limite de ses suites ponctuellement convergentes sur X.

a.2) Pour tous $f,g\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(x)$, $f+g\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$. Etablissons d'abord le cas où $g=\alpha$ est $\mathcal{S}$-étagé: de fait, l'ensemble $\{\,h\in\mathrm{F}(X): h+\alpha\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)\,\}$ contient toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées ainsi que la limite de ses suites ponctuellement convergentes sur X. Cela étant, la considération de l'ensemble $\{\,h\in\mathrm{F}(X): f+h\in\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)\,\}$ permet de conclure car d'une part, vu ce qui précède, il contient les fonctions $\mathcal{S}$-étagées et d'autre part, il contient la limite de ses suites ponctuellement convergentes sur X.

a.3) Pour tous f, $g \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$, on a $fg \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$. Si $g = \alpha$ est une fonction $\mathcal{S}$-étagée, cela résulte aussitôt de la considération de l'ensemble

$$\{ h \in \mathrm{F}(X) : h\alpha \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) \}.$$

Cela étant, le cas général résulte directement de la considération de l'ensemble $\{ h \in \mathrm{F}(X) : fh \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) \}$.

b) Il est clair qu'il suffit d'établir la nécessité de la condition. L'ensemble $\left\{ h \in \mathrm{F}(X) : \overline{h} \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) \right\}$ contenant bien sûr les fonctions $\mathcal{S}$-étagées ainsi que la limite de ses suites ponctuellement convergentes sur X, la conclusion est immédiate.

c) Il suffit de considérer l'ensemble $\{ h \in \mathrm{F}(X) : |h| \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) \}$.∎

3.2 Parties $\mathcal{S}$-boréliennes

Définition. Une partie B de X est *$\mathcal{S}$-borélienne* si sa fonction caractéristique est $\mathcal{S}$-borélienne.

L'ensemble des parties $\mathcal{S}$-boréliennes est noté $\mathcal{SB}(X)$.

Exemple. *Toute partie $\mathcal{S}$-étagée de X est $\mathcal{S}$-borélienne.*□

Théorème 3.2.1 *L'ensemble $\mathcal{SB}(X)$ est une σ-algèbre de parties de X.*

Preuve. a) Etablissons d'abord que $\mathcal{SB}(X)$ contient toute réunion dénombrable de ses éléments. De fait, si $(B_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de parties $\mathcal{S}$-boréliennes de X, alors

$$\left(\chi_{\cup_{m=1}^{M} B_m} = \sup \{ \chi_{B_m} : m = 1, \ldots, M \}\right)_{M\in\mathbb{N}_0}$$

est une suite de fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes qui converge ponctuellement sur X vers $\chi_{\cup_{m=1}^{\infty} B_m}$.

b) Cela étant, X appartient à $\mathcal{SB}(X)$ car il existe une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X.

c) Enfin, si B_1, $B_2 \in \mathcal{SB}(X)$, on a $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{SB}(X)$ car

$$\chi_{B_1 \setminus B_2} = \chi_{B_1 \cup B_2} - \chi_{B_2}.∎$$

Remarque. Comme $\mathcal{SB}(X)$ est une σ-algèbre, nous savons que toute intersection dénombrable de parties $\mathcal{S}$-boréliennes est $\mathcal{S}$-borélienne.

Voici une conséquence fort importante de ce théorème.

Théorème 3.2.2 *Toute partie μ-négligeable de X est incluse dans une partie $\mathcal{S}$-borélienne et μ-négligeable de X.*

Preuve. Soit N une partie μ-négligeable de X. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe donc une suite $(S_{m,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{m,j} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} V\mu(S_{m,j}) \leq \frac{1}{m}.$$

Cela étant,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{m,j} \right)$$

est une partie $\mathcal{S}$-borélienne et μ-négligeable de X, contenant A.∎

Les notions de fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes et de parties $\mathcal{S}$-boréliennes sont intimement liées.

Remarque. Pour toute fonction réelle f sur X, tout $r \in \mathbb{R}$, toute suite a_m strictement croissante vers r et toute suite b_m strictement décroissante vers r, on a les égalités $(*)$ suivantes:

$$\begin{aligned}
\{ x \in X : f(x) \leq r \} &= X \setminus \{ x \in X : f(x) > r \}, \\
\{ x \in X : f(x) < r \} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ x \in X : f(x) \leq a_m \}, \\
\{ x \in X : f(x) \geq r \} &= X \setminus \{ x \in X : f(x) < r \}, \\
\{ x \in X : f(x) > r \} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ x \in X : f(x) \geq b_m \}. \square
\end{aligned}$$

Critère 3.2.3 a) *Pour toute fonction f réelle et $\mathcal{S}$-borélienne sur X, tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $\# \in \{>, \leq, <, \geq, =, \neq\}$*

$$\{ x \in X : f(x) \# r \}$$

est une partie $\mathcal{S}$-borélienne de X.

Dès lors, pour tout $f \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$, tout $c \in \mathbb{C}$ et tout symbole $\# \in \{=, \neq\}$, $\{ x \in X : f(x)\#c \}$ est une partie $\mathcal{S}$-borélienne de X.

b) *Soient f une fonction réelle sur X et $\#$, un des symboles $>$, $\leq$, $<$ ou $\geq$. Si, pour tout élément d d'une partie D partout dense dans $\mathbb{R}$,*

$$\{ x \in X : f(x) \# d \}$$

est une partie $\mathcal{S}$-borélienne de X, alors f est $\mathcal{S}$-borélien.

Preuve. Vu la remarque précédente, il suffit d'établir l'énoncé pour $\#$ égal à un des signes $>$, $\leq$, $<$ ou $\geq$.

Etablissons le cas où $\#$ est égal à $>$.

a) Il est clair que l'ensemble

$$F = \{ h \in \mathrm{F}(X) : \{ x \in X : \Re h(x) > s \} \in \mathcal{SB}(X), \quad \forall s \in \mathbb{R} \}$$

contient toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées. Il contient aussi la limite de ses suites ponctuellement convergentes sur X car si la suite $(h_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathrm{F}(X)$ converge ponctuellement sur X vers h, il vient

$$\{ x \in X : \Re h(x) > s \} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{m=M}^{\infty} \{ x \in X : \Re h_m(x) > s_j \}$$

pour toute suite $(s_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{R}$ strictement décroissante vers s. Il s'ensuit que F contient $\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$, ce qui suffit.

b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, choisissons une suite strictement croissante $(r_{m,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ de D telle que

$$\lim_{k \to \pm\infty} r_{m,k} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{2m} \leq r_{m,k} - r_{m,k-1} \leq \frac{1}{m}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons aussi que, grâce aux égalités $(*)$, on obtient aussitôt que, pour tout $d \in D$, l'ensemble $\{ x \in X : f(x) \leq d \}$ est $\mathcal{S}$-borélien. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$f_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{m,k} \, \chi_{\{ x \in X : r_{m,k-1} < f(x) \leq r_{m,k} \}}$$

est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne sur X. D'où la conclusion car on vérifie directement que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur X vers f.∎

Les conséquences de ce critère sont fort importantes.

Voici d'abord un résultat annoncé au paragraphe précédent.

Théorème 3.2.4 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions réelles et $\mathcal{S}$-boréliennes en nombre fini. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\{ (f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in X \}$ et si f est une fonction $\mathcal{SI}(\Omega)$-borélienne, alors la fonction composée $f(f_1, \ldots, f_n)$ est $\mathcal{S}$-borélienne.*

Preuve. Considérons l'ensemble

$$F = \{ g \in \mathrm{F}(\Omega) : g(f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) \}.$$

D'une part, il contient la fonction caractéristique de tout semi-intervalle I dans Ω car si I s'écrit $]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_n, b_n]$, il vient

$$\chi_I(f_1, \ldots, f_n) = \chi_{\{\, x \in X : a_j < f_j(x) \leq b_j \ \ \forall j=1,\ldots,n\,\}}$$

et dès lors F contient toutes les fonctions $\mathcal{SI}(\Omega)$-étagées. D'autre part, il est clair que F contient la limite de toutes ses suites ponctuellement convergentes sur Ω.

Dès lors, F contient $\mathrm{F}\mathcal{SI}(\Omega)$. D'où la conclusion.∎

Corollaire 3.2.5 *Pour tout $f \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$,*

$$\frac{1}{f}(0 \text{ si } f = 0) \colon X \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0 \\ 1/f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne sur X.

Preuve. Posons $g = (1/\,|f|)(0 \text{ si } |f| = 0)$. Comme la fonction $|f|$ appartient à $\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$, les implications

$$\begin{array}{lcl} r > 0 \implies \{\, x \in X : g(x) > r \,\} & = & \{\, x \in X : 0 < |f(x)| < 1/r \,\} \\ r < 0 \implies \{\, x \in X : g(x) > r \,\} & = & X \end{array}$$

et l'égalité

$$\{\, x \in X : g(x) > 0 \,\} = \{\, x \in X : f(x) \neq 0 \,\}$$

entrainent que g est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne sur X. La conclusion s'ensuit directement car on a

$$\frac{1}{f}(0 \text{ si } f = 0) = (\Re f - i\Im f)g^2.$$∎

On en déduit également la caractérisation suivante de $\mathcal{SB}(X)$.

Théorème 3.2.6 *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de X qui contient les unions dénombrables et les différences de ses éléments.*

a) *Alors $\mathcal{E}$ contient aussi les intersections dénombrables de ses éléments.*

b) *Si en outre $\mathcal{E}$ contient $\mathcal{S}$, alors il contient aussi $\mathcal{SB}(X)$.*

Par conséquent, $\mathcal{SB}(X)$ est la plus petite partie de $\wp(X)$ qui contient $\mathcal{S}$, les unions dénombrables et les différences de ses éléments.

Preuve. a) est connu: si $(E_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de $\mathcal{E}$, on a en effet

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \right) \setminus \left(\bigcup_{p,q \in \mathbb{N}_0;\ p \neq q} (E_p \setminus E_q) \right).$$

b) Considérons l'ensemble F des fonctions f définies sur X telles que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{ x \in X : \Re f(x) > r \}$ appartienne à $\mathcal{E}$. D'une part, il est clair que F contient toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées. D'autre part, F contient également la limite de toutes ses suites ponctuellement convergentes sur X: de fait, si la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de F converge ponctuellement sur X vers f, on a par exemple

$$\{ x \in X : \Re f(x) > r \} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{m=M}^{\infty} \{ x \in X : \Re f_m(x) > r + 1/j \} \ \in \ \mathcal{E}.$$

Il s'ensuit que F contient $\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$, ce qui suffit.

La conséquence résulte aussitôt de l'énoncé et des propriétés de l'ensemble des parties $\mathcal{S}$-boréliennes de X.∎

Ce résultat peut être précisé de la manière suivante.

Théorème 3.2.7 *L'ensemble $\mathcal{SB}(X)$ est inclus dans toute partie $\mathcal{A}$ de $\wp(X)$ qui contient*
1) *$\mathcal{S}$,*
2) *$\cup_{m=1}^{\infty} A_m$ si les $A_m \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints,*
3) *$A_1 \setminus A_2$ si A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ vérifient $A_1 \supset A_2$.*

C'est même la plus petite partie de $\wp(X)$ de ce type.

Preuve. L'ensemble

$$\mathcal{B} = \{ B \in \mathcal{A} : B \cap S \in \mathcal{A}, \quad \forall S \in \mathcal{S} \}$$

contient
a) $\mathcal{S}$ car, pour tous S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$, il existe une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_1 \cap S_2$,
b) $B_1 \setminus B_2$ si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ sont tels que $B_1 \supset B_2$ car on a

$$(B_1 \setminus B_2) \cap S = (B_1 \cap S) \setminus (B_2 \cap S), \quad \forall S \in \mathcal{S},$$

c) $\cup_{m=1}^{\infty} B_m$ si les $B_m \in \mathcal{B}$ sont disjoints deux à deux,
d) $B \cap S$ pour tous $B \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{S}$ car, pour tous S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$, $B \cap (S_1 \cap S_2)$ admet une partition finie au moyen d'éléments de $\mathcal{B}$.

Cela étant, l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{ C \in \mathcal{B} : C \cap B \in \mathcal{B}, \quad \forall B \in \mathcal{B} \}$$

contient
a) $\mathcal{S}$,

b) $C_1 \setminus C_2$ si C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$ sont tels que $C_1 \supset C_2$,
c) $\cup_{m=1}^{\infty} C_m$ si les $C_m \in \mathcal{C}$ sont disjoints deux à deux,
d) $\cap_{m=1}^{M} C_m$ si les $C_m \in \mathcal{C}$ sont en nombre fini, vu la définition même de $\mathcal{C}$
donc contient
a) $\mathcal{S}$,
b) $C_1 \setminus C_2$ si C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$ car on a $C_1 \setminus C_2 = C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)$,
c) $\cup_{m=1}^{\infty} C_m$ pour toute suite $(C_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{C}$. De fait, on a

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = C_1 \bigcup \left(\bigcup_{M=2}^{\infty} \left(C_M \setminus \bigcup_{m=1}^{M-1} C_m \right) \right)$$

avec

$$C_M \setminus \bigcup_{m=1}^{M-1} C_m = ((C_M \setminus C_1) \setminus C_2 \ldots) \setminus C_{M-1}.$$

Dès lors, $\mathcal{SB}(X)$ est inclus dans $\mathcal{C}$, lui-même inclus dans $\mathcal{B}$, lui-même inclus dans $\mathcal{A}$, ce qui suffit.∎

Pour conclure ce paragraphe, voici une très importante caractérisation des fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes.

Critère 3.2.8 *Une fonction réelle f sur X est $\mathcal{S}$-borélienne si et seulement si l'image inverse par f de toute partie $\mathcal{SI}(\mathbb{R})$-borélienne est $\mathcal{S}$-borélienne.*

Preuve. La condition est nécessaire car on vérifie directement que l'ensemble $\{ B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{SB}(X) \}$ de parties de X contient $\mathcal{SI}(\mathbb{R})$, les unions dénombrables et les différences de ses éléments.

La suffisance de la condition résulte aussitôt de la partie b) du critère 3.2.3.∎

3.3 Fonctions μ-mesurables

Définition. Une fonction *μ-mesurable* (on dit aussi fonction *mesurable* si aucune ambiguité sur $(X, \mathcal{S}, \mu)$ n'est possible) est une fonction définie μ-pp sur X qui est limite μ-pp sur X d'une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées.

Bien sûr deux fonctions définies μ-pp et égales μ-pp sur X sont simultanément μ-mesurables.

Remarque. Il est clair que toute fonction μ-intégrable est μ-mesurable. Inversement, on a le résultat suivant qui justifie à lui seul l'introduction des fonctions μ-mesurables.

Critère 3.3.1 *Toute fonction μ-mesurable dont le module est majoré μ-pp par une fonction μ-intégrable est μ-intégrable.*

Dès lors, une fonction μ-mesurable est μ-intégrable si et seulement si son module est μ-intégrable.

Preuve. Soient f une fonction μ-mesurable et F une fonction μ-intégrable telles que $|f| \leq F$ μ-pp sur X. Bien sûr, nous pouvons supposer F à valeurs dans $[0, \infty[$. Cela étant, soit $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui converge μ-pp sur X vers f. On vérifie alors directement que les suites

$$\big(\sup\{-F, \inf\{F, \Re\alpha_m\}\}\big)_{m\in\mathbb{N}_0} \quad \text{et} \quad \big(\sup\{-F, \inf\{F, \Im\alpha_m\}\}\big)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

de fonctions μ-intégrables vérifient les conditions d'application du théorème de la convergence majorée. D'où la conclusion car elles convergent μ-pp sur X vers $\Re f$ et $\Im f$ respectivement.∎

Exercice. *Si la suite de fonctions μ-intégrables $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge μ-pp vers la fonction μ-intégrable f_0 et si $\limsup \int |f_m|\, dV\mu \leq \int |f_0|\, dV\mu$, alors $\int |f_m - f_0|\, dV\mu \to 0$.*

Suggestion. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, introduisons la fonction

$$g_m(x) = \begin{cases} f_m(x) & \text{si} \quad |f_m(x)| \leq |f_0(x)| \\ \dfrac{f_m(x)}{|f_m(x)|}\,|f_0(x)| & \text{si} \quad |f_m(x)| > |f_0|\,. \end{cases}$$

Il est clair que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions μ-intégrables qui converge μ-pp vers f_0 et telle que $|f_m| \leq |f_0|$ μ-pp sur X. On a donc $\int |g_m - f_0|\, dV\mu \to 0$ et, par conséquent, $\int |g_m|\, dV\mu \to \int |f_0|\, dV\mu$. Or, de $|f_m| = |f_m - g_m| + |g_m|$ μ-pp sur X, on tire

$$\int |f_m|\, dV\mu = \int |f_m - g_m|\, dV\mu + \int |g_m|\, dV\mu, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

De $\limsup \int |f_m|\, dV\mu \leq \int |f_0|\, dV\mu$, on obtient que $\int |f_m - g_m|\, dV\mu \to 0$ donc que

$$\int |f_m - f_0|\, dV\mu \leq \int |f_m - g_m|\, dV\mu + \int |g_m - f_0|\, dV\mu \to 0.\square$$

Passons à présent aux propriétés élémentaires des fonctions μ-mesurables.

Théorème 3.3.2 a) *Toute combinaison linéaire de fonctions μ-mesurables est μ-mesurable.*

b) *Une fonction f définie μ-pp est μ-mesurable si et seulement si $\overline{f}$ est μ-mesurable.*

Dès lors, une fonction f définie μ-pp sur X est μ-mesurable si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ sont μ-mesurables.

c) *Si f est une fonction μ-mesurable, $|f|$ est μ-mesurable.*

*Dès lors, une fonction f réelle définie μ-*pp *sur X est μ-mesurable si et seulement si f_+ et f_- sont μ-mesurables.*

Cela étant, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et toutes fonctions μ-mesurables et réelles $f_1, \ldots, f_J$, les fonctions

$$\sup_{\mu\text{-}pp\ sur\ X}\{f_1, \ldots, f_J\} \quad et \quad \inf_{\mu\text{-}pp\ sur\ X}\{f_1, \ldots, f_J\}$$

sont μ-mesurables.

d) *Tout produit fini de fonctions μ-mesurables est μ-mesurable.*

e) *Si f est une fonction μ-mesurable telle que $\{ x \in X : f(x) = 0 \}$ soit μ-négligeable, alors $1/f$ est μ-mesurable.*∎

Voici un puissant résultat assurant la μ-mesurabilité.

Théorème 3.3.3 *Si une suite de fonctions μ-mesurables converge μ-*pp *sur X, sa limite est μ-mesurable.*

Dès lors, toute fonction $\mathcal{S}$-borélienne est μ-mesurable.

Preuve. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions μ-mesurables qui converge μ-pp sur X vers la fonction f définie μ-pp sur X et soit g une fonction μ-intégrable à valeurs strictement positives. La suite

$$\left(\frac{f_m}{1 + |f_m|}\, g\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

vérifie alors les conditions d'application du théorème de la convergence majorée. Sa limite μ-pp, à savoir $F = fg/(1 + |f|)$, est donc μ-intégrable. Il s'ensuit que son module $|F| = |f|\, g/(1 + |f|)$ est μ-mesurable, donc que $|f| = |F|\,/(g - |F|)$ est μ-mesurable. Par conséquent, $f = F/(g - |F|)$ est μ-mesurable.

Pour le cas particulier, il suffit de noter que l'ensemble des fonctions μ-mesurables contient toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées ainsi que la limite de ses suites ponctuellement convergentes.∎

Ce résultat donne lieu à un exemple supplémentaire de fonctions μ-mesurables, qui interviendra dans la suite.

Proposition 3.3.4 *Si f est une fonction μ-mesurable, la fonction*

$$g \colon X \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \begin{cases} 1/f(x) & si\ f(x) \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est μ-mesurable.

Preuve. Soit $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui converge μ-pp sur X vers f. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction β_m définie sur X par $\beta_m(x) = 1/\alpha_m(x)$ si $\alpha_m(x) \neq 0$ et $\beta_m(x) = 0$ sinon est bien sûr une fonction $\mathcal{S}$-étagée. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que la suite $(f\beta_m^2)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions μ-mesurables converge μ-pp sur X vers g.∎

Nous venons d'établir que toute fonction $\mathcal{S}$-borélienne est μ-mesurable. Ce résultat peut être complété de la manière suivante.

Critère 3.3.5 *Une fonction définie* μ-pp *sur X est μ-mesurable si et seulement si elle est égale* μ-pp *sur X à une fonction $\mathcal{S}$-borélienne.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si f est une fonction μ-mesurable, il existe une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées et une partie μ-négligeable N de X telle que la suite α_m converge ponctuellement sur $X \setminus N$ vers f. Comme nous pouvons supposer que N est $\mathcal{S}$-borélien et comme chacune des fonctions $\alpha_m\chi_{X\setminus N}$ est $\mathcal{S}$-borélienne, la suite $\alpha_m\chi_{X\setminus N}$ converge ponctuellement sur X vers une fonction $\mathcal{S}$-borélienne qui est égale μ-pp à f.

La condition est évidemment suffisante car toute fonction $\mathcal{S}$-borélienne est μ-mesurable et deux fonctions définies μ-pp et égales μ-pp sur X sont simultanément μ-mesurables.∎

Corollaire 3.3.6 *Toute fonction μ-intégrable est égale μ-pp à une fonction $\mathcal{S}$-borélienne et μ-intégrable.*∎

3.4 Parties μ-mesurables

Définition. Une partie de X est *μ-mesurable* si sa fonction caractéristique est μ-mesurable.

Exemple. *Toute partie μ-intégrable est μ-mesurable.*□

Exemple. *Toute partie $\mathcal{S}$-borélienne est μ-mesurable.*□

Critère 3.4.1 *Une partie A de X est μ-mesurable si et seulement s'il existe des parties $\mathcal{S}$-boréliennes A_i et A_e de X telles que $A_i \subset A \subset A_e$ et que $A_e \setminus A_i$ soit μ-négligeable.*

Preuve. La condition est nécessaire. Il existe une fonction $\mathcal{S}$-borélienne f et une partie μ-négligeable et $\mathcal{S}$-borélienne N de X telles que $f(x) = \chi_A(x)$ pour tout $x \in X \setminus N$. Cela étant, il suffit de poser

$$A_i = \{ x \in X : f(x) = 1 \} \setminus N \quad \text{et} \quad A_e = A_i \cup N.$$

La condition est suffisante car la fonction χ_A est alors égale μ-pp à la fonction $\mathcal{S}$-borélienne χ_{A_e}.∎

Remarque. Pour obtenir la plupart des propriétés des ensembles μ-mesurables, on dispose donc de deux méthodes: soit directement en procédant comme pour les parties $\mathcal{S}$-boréliennes, soit en recourant au critère précédent et aux propriétés des parties $\mathcal{S}$-boréliennes.

Théorème 3.4.2 *L'ensemble des parties μ-mesurables est une σ-algèbre de parties de X.*∎

Théorème 3.4.3 a) *Si f est une fonction réelle et μ-mesurable, alors, pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $\# \in \{>, \leq, <, \geq, =, \neq\}$, l'ensemble $\{ x \in X : f(x) \# r \}$ est μ-mesurable.*

b) *Soit f une fonction réelle et définie μ--pp sur X. S'il existe $\# \in \{>, \leq, <, \geq\}$ tel que, pour tout élément d d'une partie partout dense dans $\mathbb{R}$, $\{ x \in X : f(x) \# d \}$ est μ-mesurable, alors f est μ-mesurable.*∎

Proposition 3.4.4 *Pour toute fonction μ-mesurable f, il existe une fonction μ-mesurable g telle que $f = g\,|f|$ μ-pp sur X et $|g| = \chi_X$.*

Preuve. Soit N une partie $\mathcal{S}$-borélienne et μ-négligeable contenant l'ensemble des points où f n'est pas défini. Introduisons ensuite l'ensemble $E = N \cup \{ x \in X : f(x) = 0 \}$. Bien sûr E est une partie μ-mesurable de X. Cela étant, $h = f\chi_{X \setminus E} + \chi_E$ est une fonction définie sur X, μ-mesurable, qui ne s'annule pas et telle que $g = h/\,|h|$ convient.∎

Théorème 3.4.5 *Une partie μ-mesurable de X est μ-intégrable si et seulement si elle est incluse dans une partie μ-intégrable de X.*∎

Proposition 3.4.6 *Une partie A de X est μ-mesurable si et seulement s'il existe une suite $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de parties $\mathcal{S}$-étagées telle que la suite χ_{Q_m} converge μ--pp vers χ_A.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, si la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées converge μ-pp vers χ_A et si on pose

$$Q_m = \{ x \in X : \Re\alpha_m(x) \geq 1/2 \}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

nous savons que les ensembles Q_m sont des parties $\mathcal{S}$-étagées telles que $|\chi_A - \chi_{Q_m}| \leq 2\,|\chi_A - \alpha_m|$ sur X donc telles que la suite χ_{Q_m} converge μ-pp vers χ_A, ce qui suffit.

La condition est évidemment suffisante.∎

Voici enfin un résultat très fin (il sera utilisé plus tard, au paragraphe 4.7).

Proposition 3.4.7 *Si μ est une mesure réelle, alors, pour toute partie μ-intégrable A de X, il existe des parties $\mathcal{S}$-boréliennes B_s et B_i de A telles que*

$$\mu(B_i) = \inf_{E\in\mathcal{E}} \mu(E) \quad \textit{et} \quad \mu(B_s) = \sup_{E\in\mathcal{E}} \mu(E),$$

où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des parties μ-intégrables de A.

Preuve. Etablissons l'existence de B_s; celle de B_i s'obtient de manière analogue.

Comme on a $\mu(E) \leq V\mu(A)$ pour tout $E \in \mathcal{E}$,

$$M = \sup_{E\in\mathcal{E}} \mu(E)$$

est un nombre réel et, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un ensemble $\mathcal{S}$-borélien $E_m \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(E_m) \geq M - 2^{-m}$. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il vient successivement

$$M \geq \mu(E_m \cup E_{m+1}) = \mu(E_m) + \mu(E_{m+1}) - \mu(E_m \cap E_{m+1}) \geq M - 2^{-m} - 2^{-m-1}$$

donc

$$M - 2^{-m+1} \leq \mu(E_m \cup \ldots \cup E_{m+k}) \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Dès lors, une application du théorème de la convergence majorée établit que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $A_m = \cup_{k=m}^{\infty} E_k$ est une partie μ-intégrable de A telle que $M - 2^{-m+1} \leq \mu(A_m) \leq M$. Une deuxième application de ce théorème établit ensuite que l'ensemble $\mathcal{S}$-borélien $B_s = \cap_{m=1}^{\infty} A_m$ est une partie μ-intégrable de A, de μ-mesure égale à M.∎

Le but de la fin de ce paragraphe est d'établir le théorème 3.4.10. ($* \rightarrow$ La même preuve peut être utilisée pour généraliser le résultat aux mesures de Haar sur un groupe localement compact. $\leftarrow *$)

Proposition 3.4.8 *Pour toute partie μ-intégrable A de X et tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ dont la réunion U contient A, est μ-intégrable et telle que $V\mu(U) \leq V\mu(A) + \varepsilon$.*

Preuve. Posons $A_0 = A$. Vu le théorème d'approximation des parties μ-intégrables, il existe une partie $\mathcal{S}$-étagée Q_1 telle que

$$V\mu(A_0 \triangle Q_1) = \int |\chi_{A_0} - \chi_{Q_1}| \, dV\mu \leq 2^{-1-2}\varepsilon.$$

Si on pose $A_1 = A_0 \triangle Q_1$, il vient

$$A_0 \subset Q_1 \cup A_1, \quad V\mu(A_1) \leq 2^{-1-2}\varepsilon \quad \text{et} \quad V\mu(Q_1) \leq V\mu(A_0) + 2^{-3}\varepsilon.$$

En continuant de la sorte à partir de A_1, on met en évidence une suite Q_m de parties $\mathcal{S}$-étagées telles que, en posant $A_m = A_{m-1} \triangle Q_m$,

$$\begin{array}{rcl} A_0 & \subset & Q_1 \cup \ldots \cup Q_M \cup A_M \\ V\mu(A_M) & \leq & 2^{-M-2}\varepsilon \\ V\mu(Q_1) + \ldots + V\mu(Q_M) & \leq & V\mu(A_0) + 2^{-2}\varepsilon + \ldots + 2^{-M}\varepsilon + 2^{-M-2}\varepsilon. \end{array}$$

En recourant au théorème de la convergence monotone, on vérifie aussitôt qu'il existe un ensemble μ-négligeable N tel que

$$A \subset \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \right) \cup N \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} V\mu(Q_m) \leq V\mu(A) + \varepsilon/2.$$

Pour conclure, il suffit alors de poser $U = (\cup_{m=1}^{\infty} Q_m) \cup V$ où V est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$ contenant N et dont la somme des $V\mu$-mesures est majorée par $\varepsilon/2$.∎

Proposition 3.4.9 *Pour toute partie ℓ-intégrable et non ℓ-négligeable A de $\mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un semi-intervalle I dans $\mathbb{R}$ tel que*

$$\ell(A \cap I) > (1 - \varepsilon)\ell(I).$$

Preuve. Vu le résultat précédent, nous savons qu'il existe une suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de semi-intervalles dans $\mathbb{R}$ tels que

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m \quad \text{et} \quad (1 - \varepsilon) \sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m) < \ell(A).$$

Comme on a alors $\ell(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(A \cap I_m)$, on conclut aussitôt qu'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $I = I_m$ réponde à la question.∎

Théorème 3.4.10 *Pour toute partie ℓ-intégrable et non ℓ-négligeable A de $\mathbb{R}$, $A - A$ est un voisinage de 0.*

Preuve. Vu le résultat précédent, il existe un semi-intervalle I dans $\mathbb{R}$ tel que $\ell(A \cap I) > 3\ell(I)/4$. Cela étant, pour tout $x \in [-\ell(I)/2, \ell(I)/2]$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap I) \cap ((A \cap I) + x) & \subset & I \cap (I + x) \\ \ell(I \cup (I + x)) & \leq & 3\ell(I)/2. \end{array} \right.$$

De $\ell((A \cap I) + x) = \ell(A \cap I)$, un raisonnement par l'absurde établit alors aussitôt que $(A \cap I) \cap ((A \cap I) + x) \neq \emptyset$, c'est-à-dire que $x \in (A \cap I) - (A \cap I)$, donc

$$[-\ell(I)/2, \ell(I)/2] \subset (A \cap I) - (A \cap I) \subset A - A.$$∎

Exercice. Si $\mathcal{A}$ est un ensemble de parties μ-mesurables et disjointes deux à deux de X, alors l'ensemble des parties non μ-négligeables de $\mathcal{A}$ est dénombrable.

Suggestion. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de parties μ-intégrables de X et de réunion égale à X. Si $A \in \mathcal{A}$ n'est pas μ-négligeable, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $A \cap A_m$ ne soit pas μ-négligeable car toute réunion de parties μ-négligeables est μ-négligeable. Il s'ensuit que l'ensemble des éléments non μ-négligeables de $\mathcal{A}$ est inclus dans

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{ A \in \mathcal{A} : V\mu(A \cap A_m) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

or chacun de ces ensembles $\{ A \in \mathcal{A} : V\mu(A \cap A_m) \geq 1/k \}$ est fini.∎

3.5 Théorème de dérivation des intégrales paramétriques

Théorème 3.5.1 *Soient N une partie μ-négligeable de X et Λ un ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^l$.*

Si $f_\lambda(x)$ est une fonction sur $\Lambda \times (X \setminus N)$ telle que

a) *pour tout $x \in X \setminus N$, $f_\cdot(x) \in \mathrm{C}_1(\Lambda)$,*

b) *pour tout $\lambda \in \Lambda$, les fonctions $f_\lambda(\cdot)$, $\mathrm{D}_1 f_\lambda(\cdot)$, ..., $\mathrm{D}_l f_\lambda(\cdot)$ sont μ-intégrables,*

c) *pour tout compact K de Λ, il existe une fonction μ-intégrable F_K telle que*

$$|\mathrm{D}_k f_\lambda(x)| \leq F_K(x) \quad sur\ X \setminus N, \quad \forall k \in \{1, \ldots, l\}, \forall \lambda \in K,$$

alors $\int f_\lambda \, d\mu$ appartient à $\mathrm{C}_1(\Lambda)$ et

$$\mathrm{D}_k \int f_\lambda \, d\mu = \int \mathrm{D}_k f_\lambda \, d\mu, \quad \forall k \in \{1, \ldots, l\}.$$

Preuve. Quitte à recourir aux fonctions $\Re f_\lambda(x)$ et $\Im f_\lambda(x)$, nous pouvons supposer la fonction $f_\lambda(x)$ à valeurs réelles.

Etablissons tout d'abord que, pour tout $k \in \{1, \ldots, l\}$, la fonction $\int \mathrm{D}_k f_\lambda(x) \, d\mu$ est continue sur Λ. De fait, pour toute suite $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de Λ convergente vers $\lambda_0 \in \Lambda$, $K = \{ \lambda_m : m \in \mathbb{N} \}$ est un compact de Λ et pour tout $x \in X \setminus N$, on a $\mathrm{D}_k f_{\lambda_m}(x) \to \mathrm{D}_k f_{\lambda_0}(x)$. Comme les fonctions $\mathrm{D}_k f_{\lambda_m}(x)$ sont μ-mesurables et comme il existe une fonction μ-intégrable F_K telle que $|\mathrm{D}_k f_{\lambda_m}(x)| \leq F_K$ μ-pp, le théorème de la convergence majorée donne aussitôt $\int \mathrm{D}_k f_{\lambda_m} \, d\mu \to \int \mathrm{D}_k f_{\lambda_0} \, d\mu$, ce qui suffit.

Etablissons ensuite que, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{R}_0} \frac{1}{h}\left(\int f_{\lambda_0+he_k} \, d\mu - \int f_{\lambda_0} \, d\mu\right) = \int \mathrm{D}_k f_{\lambda_0} \, d\mu.$$

Il s'ensuivra que $\int f_\lambda \, d\mu$ est une fonction dérivable sur Λ, de k-ème dérivée $\int \mathrm{D}_k f_\lambda \, d\mu$ continue sur Λ, ce qui suffit pour conclure. Or, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule compacte $b = \{\, \lambda : |\lambda - \lambda_0| \le r \,\}$ soit incluse dans Λ. Cela étant, pour tout $x \in X \setminus N$, $f_{\cdot}(x)$ appartient à $\mathrm{C}_1(\Lambda)$ et est réel. Dès lors, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $|h| \le r$, la formule de Taylor limitée procure $\theta_{x,k,h} \in \,]0,1[$ tel que

$$f_{\lambda_0 + he_k}(x) - f_{\lambda_0}(x) = h\mathrm{D}_k f_{\lambda_0 + \theta_{x,k,h} he_k}(x).$$

Dès lors le théorème de la convergence majorée donne

$$\frac{1}{h}\int (f_{\lambda_0+he_k}(x) - f_{\lambda_0}(x)) \, d\mu - \int \mathrm{D}_k f_{\lambda_0}(x) \, d\mu \to 0$$

et la continuité de $\int \mathrm{D}_k f_\lambda \, d\mu$ sur Λ permet de conclure.∎

Remarques. $* \to$ (1) La condition b) peut être remplacée par la condition b') suivante:

b') *pour tout* $\lambda \in \Lambda$, *la fonction* $f_\lambda(\cdot)$ *est* μ*-intégrable.*

En effet, pour tout $k \in \{1, \ldots, l\}$, la fonction $\mathrm{D}_k f_\lambda(\cdot)$ est μ-mesurable puisque, pour tout $x \in X \setminus N$, on a

$$\mathrm{D}_k f_\lambda(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{f_{\lambda + e_k/m}(x) - f_\lambda(x)}{1/m},$$

c'est-à-dire que $\mathrm{D}_k f_\lambda(\cdot)$ est limite μ-pp d'une suite de fonctions μ-mesurables (cf. Théorème 3.3.3). Cela étant, $\mathrm{D}_k f_\lambda(\cdot)$ est une fonction μ-mesurable et de module majoré μ-pp par une fonction μ-intégrable $F_{\{\lambda\}}$ donc est μ-intégrable (cf. Critère 3.3.1).

(2) Si Λ est connexe, la partie b) de l'hypothèse peut être remplacée par la condition b") suivante:

b") $f_\lambda(\cdot)$ *est une fonction* μ*-mesurable pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *et il existe* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tel que* f_{λ_0} *est* μ*-intégrable.*

On établit d'abord que, si la boule compacte $b = \{\, \lambda : |\lambda - \lambda_0| \le r \,\}$ est incluse dans Λ, alors $f_\lambda(x)$ est μ-intégrable pour tout $\lambda \in b$. De fait, la formule de Taylor limitée procure, pour tout $x \in X \setminus N$ et tout $\lambda \in b$, un nombre $\theta_{x,\lambda} \in \,]0,1[$ tel que

$$f_\lambda(x) = f_{\lambda_0}(x) + \sum_{j=1}^{l} [\lambda - \lambda_0]_j \mathrm{D}_j f_{\lambda_0 + \theta_{x,\lambda}(\lambda - \lambda_0)}(x)$$

et la fonction μ-mesurable $f_\lambda(\cdot)$ a son module majoré μ-pp par une fonction μ-intégrable. Cela étant, $\omega = \{\, \lambda \in \Lambda : f_\lambda \text{ est } \mu\text{-intégrable} \,\}$ est un ouvert de Λ et un recours au théorème de passage des frontières permet de conclure aussitôt.

(3) Par récurrence sur p, on obtient aisément un énoncé applicable au cas où, pour tout $x \in X \setminus N$, $f_\lambda(x)$ appartient à $\mathrm{C}_p(\Lambda)$. Le cas $p = \infty$ s'en déduit directement.□ $\leftarrow *$

Chapitre 4

Mesures associées

Convention. Dans ce chapitre et sauf mention explicite du contraire, pour tout $r > 0$, la notation θ_r désigne la fonction

$$\theta_r \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq r, \\ rz/|z| & \text{si } |z| > r. \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction "rabot": elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ et bien utile pour considérer par exemple $f \in \mathrm{F}(X)$ comme étant la limite ponctuelle sur X de la suite $(\theta_m \circ f)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions bornées.

4.1 Extension, restriction d'une mesure

Définition. Les espaces mesurés $(X, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ et $(X, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ sont *équivalents* si on a $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}_1, \mu_1) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ et $\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}_1, \mu_1)$. Si aucune confusion sur X, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ n'est possible, on dit plus simplement que les mesures μ_1 et μ_2 sont *équivalentes*.

Proposition 4.1.1 *Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux semi-anneaux sur X tels que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$.*

a) *Toute fonction $\mathcal{S}_1$-borélienne est $\mathcal{S}_2$-borélienne et, par conséquent, toute partie $\mathcal{S}_1$-borélienne de X est $\mathcal{S}_2$-borélienne.*

b) *Si, en outre, $\mathcal{S}_2$ est inclus dans l'ensemble des parties $\mathcal{S}_1$-boréliennes, alors une fonction définie sur X est $\mathcal{S}_1$-borélienne si et seulement si elle est $\mathcal{S}_2$-borélienne. Dans ce cas, une partie de X est donc $\mathcal{S}_1$-borélienne si et seulement si elle est $\mathcal{S}_2$-borélienne.*∎

Théorème 4.1.2 *Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ des semi-anneaux sur X tels que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ et soit μ_1 une mesure sur $(X, \mathcal{S}_1)$.*

Si $\mathcal{S}_2$ est inclus dans l'ensemble des parties μ_1-intégrables de X, alors

$$\mu_2 \colon \mathcal{S}_2 \to \mathbb{C} \quad A \mapsto \mu_1(A)$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{S}_2)$ équivalente à μ_1. De plus, les mesures $V\mu_1$ et $V\mu_2$ sont équivalentes.

Preuve. a) Etablissons d'abord que μ_2 est une mesure sur $(X, \mathcal{S}_2)$ telle que $V\mu_2(A) \leq V\mu_1(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}_2$.

D'une part, μ_2 est dénombrablement additif car, pour toute $\mathcal{S}_2$-partition dénombrable $\{\, A_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ de $A \in \mathcal{S}_2$, il vient successivement

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_2(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_1(A_m) \underset{(*)}{=} \mu_1(A) = \mu_2(A)$$

(en $(*)$, on utilise le théorème d'intégration des séries). D'autre part, μ_2 a une variation finie telle que $V\mu_2(A) \leq V\mu_1(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}_2$ car, pour toute $\mathcal{S}_2$-partition finie $\{A_1, \ldots, A_J\}$ de A, on a bien sûr

$$\sum_{j=1}^{J} |\mu_2(A_j)| = \sum_{j=1}^{J} |\mu_1(A_j)| \leq V\mu_1(A).$$

b) Etablissons ensuite que $V\mu_1(A) = V\mu_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}_2$.

La majoration $V\mu_2(A) \leq V\mu_1(A)$ vient d'être établie.

L'égalité $V\mu_1(S) = V\mu_2(S)$ a lieu pour tout $S \in \mathcal{S}_1$. De fait, d'une part, S appartient à $\mathcal{S}_2$ et, d'autre part, il vient

$$V\mu_1(S) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_1(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} |\mu_1(T)| = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_1(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} |\mu_2(T)|$$

si $\mathcal{P}_1(S)$ désigne l'ensemble des $\mathcal{S}_1$-partitions finies de S, alors que, bien sûr, le dernier membre est majoré par $V\mu_2(S)$.

Nous savons donc que toute partie μ_1-négligeable de X est μ_2-négligeable et que $V\mu_1(Q) = V\mu_2(Q)$ pour toute partie $\mathcal{S}_1$-étagée Q de X.

Vu le théorème d'approximation des parties μ_1-intégrables, pour tout $A \in \mathcal{S}_2$, il existe une suite $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de parties $\mathcal{S}_1$-étagées telles que $\int |\chi_A - \chi_{Q_m}| \, dV\mu_1 \to 0$. Dès lors, la suite χ_{Q_m} est μ_1-de Cauchy et, quitte à recourir à une sous-suite, nous pouvons supposer que cette suite définit la fonction μ_1-intégrable χ_A. Vu ce qui précède, la suite χ_{Q_m} est aussi une suite μ_2-de Cauchy qui converge μ_2-pp vers χ_A. D'où la conclusion car on a alors

$$V\mu_1(A) = \lim V\mu_1(Q_m) = \lim V\mu_2(Q_m) = V\mu_2(A).$$

c) Etablissons enfin que les mesures μ_1 et μ_2 d'une part et les mesures $V\mu_1$ et $V\mu_2$ d'autre part sont équivalentes.

De fait, si f est une fonction μ_j-intégrable avec $j = 1$ (resp. $j = 2$), il existe une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}_j$-étagées qui définit f. Comme les α_m sont des fonctions μ_k-intégrables pour $k = 2$ (resp. $k = 1$) et comme la suite α_m est μ_k-de Cauchy [vu b), on a $\int |\alpha| \, dV\mu_j = \int |\alpha| \, dV\mu_k$ pour toute fonction $\mathcal{S}_j$-étagée α] et converge μ_k-pp vers f [vu b), une partie de X est μ_j-négligeable si et seulement si elle est μ_k-négligeable], f est aussi une fonction μ_k-intégrable telle que

$$\int f \, d\mu_j = \lim \int \alpha_m \, d\mu_j = \lim \int \alpha_m \, d\mu_k = \int f \, d\mu_k$$

et

$$\int f \, dV\mu_j = \lim \int \alpha_m \, dV\mu_j = \lim \int \alpha_m \, dV\mu_k = \int f \, dV\mu_k. \blacksquare$$

Corollaire 4.1.3 *Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux semi-anneaux sur X tels que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ et soit μ_2 une mesure sur $(X, \mathcal{S}_2)$.*

a) *La restriction μ_1 de μ_2 à $\mathcal{S}_1$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S}_1)$ telle que $V\mu_1 \leq (V\mu_2)|_{\mathcal{S}_1}$.*

b) *Si $\mathcal{S}_2$ est inclus dans l'ensemble des parties $\mathcal{S}_1$-boréliennes de X, alors la restriction μ_1 de μ_2 à $\mathcal{S}_1$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S}_1)$ équivalente à μ_2. De plus, $V\mu_1$ est équivalent à $V\mu_2$.*

Preuve. a) est immédiat.

b) Etablissons d'abord que, pour toute partie $\mathcal{S}_1$-borélienne B incluse dans un élément S de $\mathcal{S}_1$, on a $V\mu_1(B) \leq V\mu_2(B)$. Cela résulte aussitôt de ce que

$$\left\{ f \in \mathrm{F}\mathcal{S}_1\mathcal{B}(X) : \int \theta_1 \circ (\Re f)_+ \, \chi_S \, dV\mu_1 \leq \int \theta_1 \circ (\Re f)_+ \, \chi_S \, dV\mu_2 \right\}$$

contient l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}_1$-boréliennes [il contient les fonction $\mathcal{S}_1$-étagées vu a) et il contient la limite de ses suites ponctuellement convergentes sur X vu le théorème de la convergence majorée].

Déduisons-en que tout $A \in \mathcal{S}_2$ est μ_1-intégrable et donne lieu à l'inégalité $V\mu_1(A) \leq V\mu_2(A)$. Comme X est union dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}_1$, soit $X = \cup_{m=1}^{\infty} S_m$, il existe une partition dénombrable $\{ B_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ de A en parties $\mathcal{S}_1$-boréliennes telles que $B_m \subset S_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. D'où la conclusion au moyen du théorème de la convergence monotone appliqué à la suite des fonctions caractéristiques des ensembles $\cup_{k=1}^{m} B_k$.

Dès lors, vu le théorème précédent,

$$\nu_2 \colon \mathcal{S}_2 \to \mathbb{C} \quad A \mapsto \mu_1(A)$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{S}_2)$ équivalente à μ_1 et telle que $V\nu_2$ soit équivalent à $V\mu_1$.

Pour conclure, il suffit de prouver que les mesures ν_2 et μ_2 sont égales. Or

$$\mathcal{B} = \{\, B \in \mathcal{S}_1\mathcal{B}(X) : \nu_2(B \cap S) = \mu_2(B \cap S), \forall S \in \mathcal{S}_1 \,\}$$

contient bien sûr $\mathcal{S}_1$ ainsi que les ensembles $\cup_{m=1}^{\infty} B_m$ si les $B_m \in \mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \setminus B_2$ si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ sont tels que $B_1 \supset B_2$. Cela étant, tout $A \in \mathcal{S}_2$ étant $\mathcal{S}_1$-borélien appartient à $\mathcal{B}$ et est inclus dans une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}_1$ que nous pouvons supposer disjoints deux à deux. Vu le théorème de la convergence monotone, on en déduit aussitôt l'égalité $\mu_2(A) = \nu_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}_2$. D'où la conclusion.∎

Corollaire 4.1.4 *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{S})$.*

a) *Pour toute partie $\mathcal{S}$-borélienne et μ-intégrable A de X, on a*

$$V\mu(A) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(A)} \sum_{B \in \mathcal{P}} |\mu(B)| \tag{*}$$

où $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des partitions finies de A en parties $\mathcal{S}$-boréliennes.

b) *Pour toute partie μ-intégrable A de X, on a la formule (*) où $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des partitions finies de A en parties μ-intégrables.*

c) *Pour toute fonction $\mathcal{S}$-borélienne et μ-intégrable f, on a*

$$\int |f| \, dV\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \int g \, d\mu \right| \tag{**}$$

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes g telles que $|g| \leq |f|$.

d) *Pour toute fonction μ-intégrable f, on a la formule (**) où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions μ-intégrables g telles que $|g| \leq |f|$ μ-pp.*

Preuve. a) L'ensemble $\mathcal{S}_2$ des parties $\mathcal{S}$-boréliennes et μ-intégrables de X est un semi-anneau sur X qui contient $\mathcal{S}$ et qui est inclus dans l'ensemble des parties μ-intégrables de X. Il s'ensuit que la fonction $\mu_2 \colon \mathcal{S}_2 \to \mathbb{C}$ définie par $\mu_2(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}_2$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S}_2)$ et que les mesures $V\mu_2$ et $V\mu$ sont équivalentes. La conclusion est alors immédiate.

b) s'établit de manière analogue (tout en se simplifiant) en prenant pour $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des parties μ-intégrables de X.

c) Il est clair que

$$\sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \int g \, d\mu \right| \leq \int |f| \, dV\mu.$$

Etablissons l'inégalité inverse. La fonction $|f|$ est évidemment limite ponctuelle sur X de la suite de fonctions

$$g_m = \sum_{k=1}^{2^{2m}} \frac{k}{2^m} \, \chi_{\{\, x \in X : 2^{-m}k < |f(x)| \leq 2^{-m}(k+1)\,\}},$$

c'est-à-dire d'une suite croissante de fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes et μ-intégrables. Pour tout $\varepsilon > 0$, vu le théorème de la convergence monotone, il existe alors $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\int |f| \; dV\mu \leq \int g_M \, dV\mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, 2^{2M}\}$, remarquons, vu a), qu'il existe une partition finie $\{A_{k,1}, \ldots, A_{k,J_k}\}$ de

$$\{\, x \in X : 2^{-M}k < |f(x)| \leq 2^{-M}(k+1)\,\}$$

en parties $\mathcal{S}$-boréliennes telle que

$$V\mu\left(\{\, x \in X : 2^{-M}k < |f(x)| \leq 2^{-M}(k+1)\,\}\right) \leq \sum_{j=1}^{J_k} |\mu(A_{k,j})| + \frac{2^M}{k} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2M+1}}.$$

Cela étant, on vérifie directement que

$$g = \sum_{k=1}^{2^{2M}} \sum_{j=1}^{J_k} c_{k,j} \, \chi_{A_{k,j}}$$

où on a posé

$$c_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(A_{k,j}) = 0 \\ 2^{-M}k \, |\mu(A_{k,j})| \, / \mu(A_{k,j}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne telle que $|g| \leq |f|$ et

$$\int |f| \; dV\mu \leq \left| \int g \, d\mu \right| + \varepsilon,$$

ce qui suffit pour conclure.

d) résulte aussitôt de c) et du fait que toute fonction μ-intégrable est égale μ-pp à une fonction $\mathcal{S}$-borélienne.∎

Remarque. Il résulte directement du corollaire précédent que *si les mesures μ_1 sur $(X, \mathcal{S}_1)$ et μ_2 sur $(X, \mathcal{S}_2)$ sont équivalentes, alors les mesures $V\mu_1$ et $V\mu_2$ sont équivalentes.*

4.2 Comparaison de mesures

Notation. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$.

Les notations $\mu_1 \leq \mu_2$ et $\mu_2 \geq \mu_1$ sont équivalentes; elles présupposent que μ_1 et μ_2 sont des mesures réelles et signifient que $\mu_1(S) \leq \mu_2(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Théorème 4.2.1 *Si les mesures positives μ_1 et μ_2 sur $(X, \mathcal{S})$ sont telles que $\mu_1 \leq \mu_2$, alors*

a) *toute partie μ_2-négligeable de X est μ_1-négligeable,*

b) *toute partie μ_2-mesurable de X est μ_1-mesurable,*

c) *toute fonction μ_2-intégrable f est μ_1-intégrable et*

$$\int |f| \, d\mu_1 \leq \int |f| \, d\mu_2. \blacksquare$$

4.3 Combinaisons linéaires de mesures

Théorème 4.3.1 *Soit $\mathcal{S}$ un semi-anneau sur l'ensemble non vide X.*

Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$, alors, pour tout $c \in \mathbb{C}$, $c\mu$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $V(c\mu) = |c| \, V\mu$ et

a) *toute partie μ-négligeable est $c\mu$-négligeable,*

b) *toute fonction μ-mesurable est $c\mu$-mesurable,*

c) *toute fonction μ-intégrable f est $c\mu$-intégrable et on a $\int f \, dc\mu = c \int f \, d\mu$.* $\blacksquare$

Théorème 4.3.2 *Soient X un ensemble et $\mathcal{S}$ un semi-anneau sur X.*

Si μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$, alors

a) *$\mu_1 + \mu_2$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $V(\mu_1 + \mu_2) \leq V\mu_1 + V\mu_2$. Dès lors, toute partie μ_1- et μ_2-négligeable est $(\mu_1 + \mu_2)$-négligeable.*

b) *toute fonction μ_1- et μ_2-intégrable f est $(\mu_1 + \mu_2)$-intégrable et*

$$\int f \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int f \, d\mu_1 + \int f \, d\mu_2.$$

Dès lors, toute fonction μ_1- et μ_2-mesurable est $(\mu_1 + \mu_2)$-mesurable.

Preuve. a) Bien sûr, $\mu_1 + \mu_2$ est dénombrablement additif. Pour conclure, il suffit alors de noter que, pour toute $\mathcal{S}$-partition finie $\mathcal{P}$ de $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\sum_{T \in \mathcal{P}} |(\mu_1 + \mu_2)(T)| \leq V\mu_1(S) + V\mu_2(S).$$

Le cas particulier est trivial.

b.1) Remarquons tout d'abord que, pour tout $S \in \mathcal{S}$ et tout $r > 0$, l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) : \int \theta_r(f\chi_S)\, d(\mu_1 + \mu_2) = \int \theta_r(f\chi_S)\, d\mu_1 + \int \theta_r(f\chi_S)\, d\mu_2 \right\}$$

contient toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées et la limite de toutes ses suites ponctuellement convergentes sur X donc contient toutes les fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes sur X.

b.2) Déduisons-en la propriété annoncée dans le cas où, en outre, f est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne. Quitte à considérer $(\Re f)_+$, $(\Re f)_-$, $(\Im f)_+$ et $(\Im f)_-$ séparément, nous pouvons supposer que f est à valeurs dans $[0, +\infty[$. Nous savons qu'il existe une suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X et dont les éléments sont disjoints deux à deux. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, le théorème de la convergence monotone appliqué à la suite $(\theta_m(f\chi_{\cup_{k=1}^m S_k}))_{m\in\mathbb{N}_0}$ établit que f est $(\mu_1 + \mu_2)$-intégrable et tel que

$$\int f\, d(\mu_1 + \mu_2) = \int f\, d\mu_1 + \int f\, d\mu_2.$$

b.3) Etablissons le cas général. Pour $j = 1$ et $j = 2$, il existe une fonction $\mathcal{S}$-borélienne f_j et une partie $\mathcal{S}$-borélienne et μ_j-négligeable N_j telles que $f = f_j$ sur $X \setminus N_j$. Dès lors, $g = f_1\chi_{X\setminus N_1} + f_2\chi_{N_1\setminus N_2}$ est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne sur X qui est égale μ_1-pp et μ_2-pp donc $(\mu_1 + \mu_2)$-pp sur X à f. La conclusion est alors immédiate.

Pour la mesurabilité, on note que, si $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X, alors la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$f_m = f\chi_{\left\{ x\in\cup_{k=1}^m S_m : |f(x)|\leq m \right\}}$$

est une suite de fonctions μ_1- et μ_2-intégrables qui converge μ_1- et μ_2-pp vers f, ce qui suffit, vu ce qui précède.∎

4.4 Mesures associées à une mesure

Définitions. Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$,

a) $\overline{\mu}$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$, appelée *mesure conjuguée de* μ,

b) $\Re\mu$ et $\Im\mu$ sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$, appelées respectivement *partie réelle* et *partie imaginaire de* μ.

Bien sûr, il vient

$$\mu = \Re\mu + i\Im\mu, \quad \overline{\mu} = \Re\mu - i\Im\mu,$$
$$V\mu = V\overline{\mu} \leq V(\Re\mu) + V(\Im\mu).$$

Remarque. Etant donné une mesure réelle μ sur $(X,\mathcal{S})$, on vérifie aisément que les parties positive et négative de l'application $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ ne sont en général pas des mesures sur $(X,\mathcal{S})$. Les notions correctes s'introduisent de la manière suivante.

Définitions. Si μ est une mesure réelle sur $(X,\mathcal{S})$, les mesures positives

$$\mu_+ = \frac{V\mu + \mu}{2} \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{V\mu - \mu}{2}$$

sont appelées respectivement *la partie positive* et *la partie négative* de la mesure μ.

Bien sûr, il vient

$$\mu = \mu_+ - \mu_-,\ \mu_+ \le V\mu \ \text{ et } \ \mu_- \le V\mu.$$

La justification de ces définitions résulte des propriétés suivantes.

Théorème 4.4.1 a) *Toute mesure μ sur $(X,\mathcal{S})$ s'écrit*

$$\mu = (\Re\mu)_+ - (\Re\mu)_- + i(\Im\mu)_+ - i(\Im\mu)_-;$$

il s'agit de *la décomposition canonique de μ en mesures positives.*

b) *Si la mesure μ sur $(X,\mathcal{S})$ s'écrit sous la forme*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

avec des mesures μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 positives sur $(X,\mathcal{S})$, alors on a

$$(\Re\mu)_+ \le \mu_1, \quad (\Re\mu)_- \le \mu_2, \quad (\Im\mu)_+ \le \mu_3 \quad \textit{et} \quad (\Im\mu)_- \le \mu_4.$$

Preuve. a) est trivial.

b) De fait, il vient alors

$$(\Re\mu)_+ - (\Re\mu)_- = \mu_1 - \mu_2, \quad (\Im\mu)_+ - (\Im\mu)_- = \mu_3 - \mu_4$$

et

$$(\Re\mu)_+ + (\Re\mu)_- = V(\Re\mu) \le \mu_1 + \mu_2, \quad (\Im\mu)_+ + (\Im\mu)_- = V(\Im\mu) \le \mu_3 - \mu_4. \blacksquare$$

Définitions. Si μ et ν sont des mesures réelles sur $(X,\mathcal{S})$, les mesures

$$\sup\{\mu,\nu\} = \frac{\mu+\nu+V(\mu-\nu)}{2} \quad \text{et} \quad \inf\{\mu,\nu\} = \frac{\mu+\nu-V(\mu-\nu)}{2}$$

sur $(X,\mathcal{S})$ sont respectivement appelées *borne supérieure* et *borne inférieure* de $\{\mu,\nu\}$.

Le résultat suivant justifie cette terminologie.

Théorème 4.4.2 *Si μ et ν sont deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$,*

a) $\sup\{\mu, \nu\}$ *majore μ et ν, et est majoré par toute mesure sur $(X, \mathcal{S})$ qui majore μ et ν,*

b) $\inf\{\mu, \nu\}$ *minore μ et ν, et est minoré par toute mesure sur $(X, \mathcal{S})$ qui minore μ et ν.*

Preuve. a) De fait, pour tout $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\begin{aligned} 2(\sup\{\mu, \nu\})(S) &= \mu(S) + \nu(S) + \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} |\mu(T) - \nu(T)| \\ &= 2 \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} \sup\{\mu(T), \nu(T)\} \end{aligned}$$

si $\mathcal{P}(S)$ désigne l'ensemble des $\mathcal{S}$-partitions finies de S. La conclusion est alors immédiate.

b) s'établit de même. ∎

4.5 Produit de mesures, théorèmes de Fubini et de Tonelli

Convention. Dans ce paragraphe,

a) X_1 et X_2 sont deux ensembles non vides et nous posons $X = X_1 \times X_2$,

b) $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont des semi-anneaux sur X_1 et X_2 respectivement, et nous posons $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

Rappelons qu'alors $\mathcal{S}$ est un semi-anneau sur X.

Théorème 4.5.1 *L'application*

$$\mu_1 \times \mu_2 \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C} \quad S_1 \times S_2 \mapsto \mu_1(S_1) \cdot \mu_2(S_2)$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ appelée *produit des mesures μ_1 et μ_2* ou encore *mesure produit $\mu_1 \times \mu_2$.*

De plus, on a

$$V(\mu_1 \times \mu_2) = V\mu_1 \times V\mu_2.$$

Preuve. Cette application $\mu_1 \times \mu_2$

a) est définie sur $\mathcal{S}$ et telle que $\mu_1 \times \mu_2(\emptyset) = 0$. De fait, le seul cas où $S \in \mathcal{S}$ n'a pas une écriture unique $S = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ avec $S_1 \in \mathcal{S}_1$ et $S_2 \in \mathcal{S}_2$ a lieu pour $S = \emptyset$ mais

alors un au moins des ensembles S_1, S_2 doit être égal à $\emptyset$.
b) est dénombrablement additive. Soit $\{ S_{1,m} \times S_{2,m} : m \in \mathbb{N}_0 \}$ une $\mathcal{S}$-partition de $S_1 \times S_2 \in \mathcal{S}$. Pour tout $x_2 \in X_2$, la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \chi_{S_{1,m} \times S_{2,m}}(., x_2) = \sum_{m=1}^{M} \chi_{S_{2,m}}(x_2)\chi_{S_{1,m}}$$

i) est constituée de fonctions $\mathcal{S}_1$-étagées,
ii) converge ponctuellement sur X_1 vers $\chi_{S_2}(x_2)\chi_{S_1}$,
iii) est telle que

$$\left| \sum_{m=1}^{M} \chi_{S_{2,m}}(x_2)\chi_{S_{1,m}} \right| \leq \chi_{S_2}(x_2)\chi_{S_1}$$

où le second membre est μ_1-intégrable,
Dès lors, pour tout $x_2 \in X_2$, vu le théorème de la convergence majorée, il vient

$$\sum_{m=1}^{M} \chi_{S_{2,m}}(x_2)\mu_1(S_{1,m}) \to \chi_{S_2}(x_2)\mu_1(S_1).$$

Comme de plus la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \mu_1(S_{1,m})\chi_{S_{2,m}}$$

est constituée de fonctions $\mathcal{S}_2$-étagées dont le module est majoré par la fonction μ_2-intégrable fixe $V\mu_1(S_1)\chi_{S_2}$, une deuxième application du théorème de la convergence majorée donne

$$\sum_{m=1}^{M} \mu_1(S_{1,m})\mu_2(S_{2,m}) \to \mu_1(S_1) \cdot \mu_2(S_2).$$

c) a une variation finie. Soit $\{ S_{1,j} \times S_{2,j} : j \leq J \}$ une $\mathcal{S}$-partition finie de $S_1 \times S_2 \in \mathcal{S}$. Il existe alors pour $k = 1$ et $k = 2$ une $\mathcal{S}_k$-partition finie $\mathcal{P}_k$ de S_k telle que chacun des $S_{k,1}, \ldots, S_{k,J}$ soit l'union des éléments de $\mathcal{P}_k$ qu'il contient. Cela étant, on a bien sûr

$$\sum_{j=1}^{J} |\mu_1(S_{1,j})\mu_2(S_{2,j})| \leq \sum_{S \in \mathcal{P}_1} \sum_{T \in \mathcal{P}_2} |\mu_1(S)|\, |\mu_2(T)| \leq V\mu_1(S_1) \cdot V\mu_2(S_2)$$

ce qui prouve en outre la majoration $V(\mu_1 \times \mu_2) \leq V\mu_1 \times V\mu_2$.

Cela étant, pour conclure, il suffit d'établir qu'on a aussi $V\mu_1 \times V\mu_2 \leq V(\mu_1 \times \mu_2)$. Soient $S_1 \in \mathcal{S}_1$ et $S_2 \in \mathcal{S}_2$. Pour tous ε, ε_1, $\varepsilon_2 > 0$, il existe une $\mathcal{S}_1$-partition finie $\mathcal{P}_1$ de S_1 et une $\mathcal{S}_2$-partition finie $\mathcal{P}_2$ de S_2 telles que

$$V\mu_1(S_1) \leq \sum_{T \in \mathcal{P}_1} |\mu_1(T)| + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad V\mu_2(S_2) \leq \sum_{T \in \mathcal{P}_2} |\mu_2(T)| + \varepsilon_2$$

donc telles que la $\mathcal{S}$-partition finie $\{ T_1 \times T_2 : T_1 \in \mathcal{P}_1, T_2 \in \mathcal{P}_2 \}$ de $S_1 \times S_2$ vérifie

$$\begin{aligned} V\mu_1(S_1) \cdot V\mu_2(S_2) - \varepsilon &\leq \sum_{T_1 \in \mathcal{P}_1} |\mu_1(T_1)| \cdot \sum_{T_2 \in \mathcal{P}_2} |\mu_2(T_2)| \\ &\leq \sum_{T_1 \in \mathcal{P}_1} \sum_{T_2 \in \mathcal{P}_2} |(\mu_1 \times \mu_2)(T_1 \times T_2)| \end{aligned}$$

si ε_1 et ε_2 sont choisis suffisamment petits. D'où la conclusion.∎

Lemme 4.5.2 *Si $N \subset X$ est $\mu_1 \times \mu_2$-négligeable, alors, pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, l'ensemble $\{ x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in N \}$ est μ_1-négligeable.*

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une suite

$$(S_{k,m} = S_{1,k,m} \times S_{2,k,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$$

de $\mathcal{S}$ telle que

$$N \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{k,m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} V(\mu_1 \times \mu_2)(S_{k,m}) \leq 2^{-k}.$$

Si $j \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ est une bijection, alors, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, il vient $N \subset \cup_{m=M}^{\infty} S_{j(m)}$ donc

$$\{ x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in N \} \subset \bigcup_{m \geq M,\, x_2 \in S_{2,j(m)}} S_{1,j(m)}, \quad \forall x_2 \in X_2.$$

Or en vertu du théorème d'intégration des séries, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} V\mu_1(S_{1,j(m)}) \chi_{S_{2,j(m)}}$$

converge μ_2-pp. Il s'ensuit que, pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, la suite

$$\left(\sum_{m=M}^{\infty} \chi_{S_{2,j(m)}}(x_2) V\mu_1(S_{1,j(m)}) = \sum_{m \geq M,\, x_2 \in S_{2,j(m)}} V\mu_1(S_{1,j(m)}) \right)_{M \in \mathbb{N}_0}$$

converge vers 0, ce qui suffit.∎

Remarque. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, nous notons ℓ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, il est clair que $\ell_{m+n} = \ell_m \times \ell_n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, on peut aisément établir que ce dernier lemme ne peut être amélioré car $A = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \}$ est une partie ℓ_2-négligeable.□

Théorème 4.5.3 (Fubini) *Si f est une fonction $\mu_1 \times \mu_2$-intégrable, alors*
a) *pour μ-presque tout $x_2 \in X_2$, $f(.,x_2)$ est μ_1-intégrable,*
b) *$\int f\, d\mu_1$ est une fonction μ_2-intégrable,*
c) *on a*

$$\int \left(\int f\, d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int f\, d(\mu_1 \times \mu_2).$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que le théorème de Fubini est valable pour les fonctions $\mathcal{S}$-étagées sous la forme améliorée suivante: *si $\alpha = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_j}$ est une fonction $\mathcal{S}_1$-étagée,*
a) *pour tout $x_2 \in X_2$, $\alpha(.,x_2) = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{S_{2,j}}(x_2) \chi_{S_{1,j}}$ est une fonction $\mathcal{S}_1$-étagée,*
b) *$\int \alpha\, d\mu_1 = \sum_{j=1}^{J} c_j \mu_1(S_{1,j}) \chi_{S_{2,j}}$ est une fonction $\mathcal{S}_2$-étagée,*
c) *on a $\int \left(\int \alpha\, d\mu_1 \right) d\mu_2 = \sum_{j=1}^{J} c_j \mu_1(S_{1,j}) \mu_2(S_{2,j}) = \int \alpha\, d(\mu_1 \times \mu_2)$.*

Cela étant, considérons une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est $\mu_1 \times \mu_2$-de Cauchy et qui converge $\mu_1 \times \mu_2$-pp vers f. Quitte à passer à une sous-suite, il est clair que nous pouvons supposer avoir

$$\int |\alpha_{m+1} - \alpha_m|\, dV(\mu_1 \times \mu_2) \leq 2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Vu le lemme précédent, pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, la suite $\alpha(.,x_2)$ de fonctions $\mathcal{S}_1$-étagées converge μ_1-pp vers $f(.,x_2)$. De plus, vu le théorème d'intégration des séries, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int |\alpha_m(.,x_2) - \alpha_{m+1}(.,x_2)|\, dV\mu_1$$

converge μ_2-pp. Il s'ensuit que, pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, la suite $\alpha_m(.,x_2)$ est μ_1-de Cauchy car on a

$$\int |\alpha_r(.,x_2) - \alpha_s(.,x_2)|\, dV\mu_1 \leq \sum_{m=r}^{s-1} \int |\alpha_m(.,x_2) - \alpha_{m+1}(.,x_2)|\, dV\mu_1.$$

De la sorte, nous avons déjà établi a) ainsi que

$$\int \alpha_m\, d\mu_1 \to \int f\, d\mu_1 \quad \mu_2\text{-pp}.$$

b) résulte alors aussitôt de ce que la suite $\int \alpha_m\, d\mu_1$ de fonctions μ_2-étagées est μ_2-de Cauchy car on a

$$\int \left| \int \alpha_r\, d\mu_1 - \int \alpha_s\, d\mu_1 \right| dV\mu_2 \leq \int |\alpha_r - \alpha_s|\, dV(\mu_1 \times \mu_2).$$

Ceci établit aussi la convergence

$$\int \left(\int \alpha_m \, d\mu_1 \right) d\mu_2 \to \int \left(\int f \, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

c) est alors immédiat car on a bien sûr

$$\int \left(\int \alpha_m \, d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int \alpha_m \, d(\mu_1 \times \mu_2) \to \int f \, d(\mu_1 \times \mu_2). \blacksquare$$

Théorème 4.5.4 (Tonelli) *Si f est une fonction $\mu_1 \times \mu_2$-mesurable sur X, si $|f(.,x_2)|$ est μ_1-intégrable pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$ et si $\int |f| \, dV\mu_1$ est μ_2-intégrable, alors f est $\mu_1 \times \mu_2$-intégrable.*

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir que $|f|$ est $\mu_1 \times \mu_2$-intégrable.
Soit $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X. La suite

$$\left(g_M = \theta_M(|f|) \chi_{\cup_{m=1}^M S_m} \right)_{M \in \mathbb{N}_0}$$

est constituée de fonctions $\mu_1 \times \mu_2$-intégrables, croît $\mu_1 \times \mu_2$-pp vers $|f|$ et est telle que

$$\int g_M \, dV(\mu_1 \times \mu_2) \underset{(*)}{=} \int \left(\int g_M \, dV\mu_1 \right) dV\mu_2 \leq \int \left(\int |f| \, dV\mu_1 \right) dV\mu_2$$

(en $(*)$, on applique le théorème de Fubini). Dès lors, $|f|$ est une fonction $\mu_1 \times \mu_2$-intégrable, par application du théorème de la convergence monotone. $\blacksquare$

Corollaire 4.5.5 *Si N est une partie $\mu_1 \times \mu_2$-mesurable de X et si sa section $\{ x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in N \}$ est μ_1-négligeable pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, alors N est $\mu_1 \times \mu_2$-négligeable.* $\blacksquare$

Proposition 4.5.6 *Si f est une fonction $\mu_1 \times \mu_2$-mesurable telle que $f(.,x_2)$ soit μ_1-intégrable pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, alors $\int f \, d\mu_1$ est une fonction μ_2-mesurable.*

Preuve. Soit $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X. Cela étant, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_M = \theta_M(f) \chi_{\cup_{m=1}^M S_m}.$$

Bien sûr chacun des f_M est $\mu_1 \times \mu_2$-intégrable. Dès lors, vu le théorème de Fubini, chacune des fonctions $\int f_M \, d\mu_1$ est μ_2-intégrable donc μ_2-mesurable. Pour conclure, il suffit alors de prouver que, pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, on a

$$\int f_M(.,x_2)\, d\mu_1 \to \int f(.,x_2)\, d\mu_1.$$

Cela résulte d'une application du théorème de la convergence majorée car, pour μ_2-presque tout $x_2 \in X_2$, la suite $(f_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$
a) est constituée de fonctions μ_1-intégrables dont le module est majoré μ_1-pp par la fonction μ_1-intégrable $|f(.,x_2)|$,
b) converge μ_1-pp vers $f(.,x_2)$ car la suite f_M converge $\mu_1 \times \mu_2$-pp vers f.∎

Proposition 4.5.7 a) *Si f_1 et f_2 sont des fonctions respectivement $\mathcal{S}_1$- et $\mathcal{S}_2$-boréliennes, alors*

$$f\colon X \to \mathbb{C} \quad (x_1,x_2) \mapsto f_1(x_1)f_2(x_2)$$

est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne.

b) *Si f est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne, alors, pour tout $x_2 \in X_2$, $f(.,x_2)$ est une fonction $\mathcal{S}_1$-borélienne.*

c) *Si f est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne telle que, pour tout $x_2 \in X_2$, la fonction $f(.,x_2)$ soit μ_1-intégrable, alors $\int f\, d\mu_1$ est une fonction $\mathcal{S}_2$-borélienne.*

Preuve. a) Si f_2 est $\mathcal{S}_2$-étagé, on établit de suite que

$$\{\, f_1 \in \mathrm{F}(X_1) : f \text{ est } \mathcal{S}\text{-borélien} \,\}$$

contient l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}_1$-boréliennes. Cela étant, on vérifie de suite que, pour toute fonction $\mathcal{S}_1$-borélienne f_1,

$$\{\, f_2 \in \mathrm{F}(X_2) : f \text{ est } \mathcal{S}\text{-borélien} \,\}$$

contient l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}_2$-boréliennes.

b) Il est en effet clair que, pour tout $x_2 \in X_2$,

$$\{\, f \in \mathrm{F}(X) : f(.,x_2) \text{ est } \mathcal{S}_1\text{-borélien} \,\}$$

contient l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes.

c) Nous savons qu'il existe des suites $(S_{1,m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(S_{2,m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ respectivement telles que $\cup_{m\in\mathbb{N}_0} S_{1,m} \times S_{2,m} = X_1 \times X_2$. Cela étant, on vérifie directement au moyen du théorème de la convergence majorée que, pour tout $x_2 \in X_2$, on a

$$\int \theta_m \circ (f\chi_{\cup_{k=1}^m S_{1,k}\times S_{2,k}})(.,x_2)\, d\mu_1 \to \int f(.,x_2)\, d\mu_1.$$

Pour conclure, il suffit alors de vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\left\{ g \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) : \int \theta_m \circ (g\chi_{\cup_{k=1}^m S_{1,k}\times S_{2,k}})\, d\mu_1 \text{ est } \mathcal{S}_2\text{-borélien} \right\}$$

contient l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}$-boréliennes, ce qui est immédiat.∎

Proposition 4.5.8 a) *Si f_1 et f_2 sont des fonctions respectivement μ_1- et μ_2-mesurables, alors*

$$f: X \to \mathbb{C} \quad (x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1)f_2(x_2)$$

est une fonction $\mu_1 \times \mu_2$-mesurable.

b) *Si f_1 et f_2 sont des fonctions respectivement μ_1- et μ_2-intégrables, alors cette fonction f est $\mu_1 \times \mu_2$-intégrable et telle que*

$$\int f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int f_1\, d\mu_1 \cdot \int f_2\, d\mu_2.$$

Preuve. a) Pour $j = 1$ et $j = 2$, il existe une suite $(\alpha_{j,m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}_j$-étagées et une partie $\mathcal{S}_j$-borélienne et μ_j-négligeable N_j de X_j telle que la suite $\alpha_{j,m}$ converge ponctuellement sur $X_j \setminus N_j$ vers f_j.

Dès lors la suite $\alpha_{1,m}(x_1)\alpha_{2,m}(x_2)$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées converge ponctuellement sur $X \setminus ((N_1 \times X_2) \cup (X_1 \times N_2))$ vers f. Pour conclure, il suffit alors de noter que les ensembles $N_1 \times X_2$ et $X_1 \times N_2$ sont $\mu_1 \times \mu_2$-négligeables. Or, par exemple, $N_1 \times X_2$ est une partie $\mathcal{S}$-borélienne donc $\mu_1 \times \mu_2$-mesurable telle que, pour tout $x_2 \in X_2$, la section N_1 est μ_1-négligeable.

b) résulte aussitôt des théorèmes de Tonelli et de Fubini.∎

4.6 Mesures du type $F.\mu$

Définition. Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré.

Si F est une fonction définie μ-pp sur X et si A est une partie de X, $F\chi_A$ est la fonction définie μ-pp sur X selon

$$(F\chi_A)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \setminus A, \\ F(x) & \text{si } x \in A \text{ et si } F(x) \text{ est défini.} \end{cases}$$

Cela étant, une fonction $\mathcal{S}$-*μ-intégrable* est une fonction F définie μ-pp et telle que $F\chi_S$ soit μ-intégrable pour tout $S \in \mathcal{S}$. Comme X est une réunion dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$, il est clair qu'une telle fonction est μ-mesurable donc égale μ-pp à une fonction $\mathcal{S}$-borélienne. Il est clair également que, si F est une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable, alors $|F|$ est aussi une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable.

Théorème 4.6.1 *Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace mesuré et si F est une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable, alors*

$$F.\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C} \quad S \mapsto \int F\chi_S \, d\mu$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $V(F.\mu) = |F| .V\mu$.

Preuve. a) Etablissons que $F.\mu$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ telle que $V(F.\mu) \leq |F| .V\mu$.

Bien sûr, on a $F.\mu(\emptyset) = 0$.

Cela étant, $F.\mu$ est dénombrablement additif. En effet, pour toute $\mathcal{S}$-partition dénombrable $\{ S_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ de $S \in \mathcal{S}$, le théorème de la convergence majorée donne aussitôt

$$\sum_{m=1}^{\infty}(F.\mu)(S_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \int F\chi_{S_m} \, d\mu = \int F\chi_S \, d\mu = (F.\mu)(S).$$

Enfin, pour toute $\mathcal{S}$-partition finie $\{S_1, \ldots, S_J\}$ de $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\sum_{j=1}^{J} |(F.\mu)(S_j)| = \sum_{j=1}^{J} \left| \int F\chi_{S_j} \, d\mu \right| \leq \sum_{j=1}^{J} \int |F| \chi_{S_j} \, dV\mu = \int |F| \chi_S \, dV\mu.$$

b) Pour conclure, il suffit alors d'établir qu'on a aussi $|F| .V\mu \leq V(F.\mu)$.

b.i) Prouvons que cela a lieu si F est une fonction $\mathcal{S}$-étagée. Dans ce cas, nous savons qu'il existe des $S_1, \ldots, S_J \in \mathcal{S}$ en nombre fini et deux à deux disjoints et des coefficients $c_1, \ldots, c_J \in \mathbb{C}$ tels que $F = \sum_{j=1}^{J} c_j\chi_{S_j}$. Cela étant, pour tout $S \in \mathcal{S}$, il vient successivement

$$\begin{aligned}
(|F| .V\mu)(S) &= \sum_{j=1}^{J} |c_j| \, V\mu(S \cap S_j) \quad = \quad \sum_{j=1}^{J} \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S \cap S_j)} \sum_{T \in \mathcal{P}} |c_j\mu(T)| \\
&\leq \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S \cap (\cup_{j=1}^{J} S_j))} \sum_{T \in \mathcal{P}} \left| \int F\chi_T \, d\mu \right| \\
&\leq \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} \left| \int F\chi_T \, d\mu \right| \quad = \quad V(F.\mu)(S)
\end{aligned}$$

si $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des $\mathcal{S}$-partitions finies de A.

b.ii) Etablissons le cas général. Vu le théorème d'approximation, pour tout $S \in \mathcal{S}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\mathcal{S}$-étagée α telle que $\int |F\chi_S - \alpha| \, dV\mu \leq \varepsilon/2$

donc telle que

$$\begin{aligned}
(|F|.V\mu)(S) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int |\alpha|\,\chi_S \, dV\mu \quad = \quad \frac{\varepsilon}{2} + V(\alpha.\mu)(S) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}(S)} \sum_{T\in\mathcal{P}} \left| \int \alpha\chi_T \, d\mu \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}(S)} \sum_{T\in\mathcal{P}} \left(\left| \int (F-\alpha)\chi_T \, d\mu \right| + \left| \int F\chi_T \, d\mu \right| \right) \\
&\leq V(F.\mu)(S) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui suffit.∎

Théorème 4.6.2 *Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace mesuré et si F est une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable, alors $F.\mu$ est la mesure 0 si et seulement si F est nul μ-*pp.

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ de réunion égale à X. Si $F.\mu$ est la mesure 0, il vient

$$V(F.\mu)(S_m) = \int |F|\,\chi_{S_m} \, dV\mu = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

c'est-à-dire que $\sum_{m=1}^{M} |F|\,\chi_{S_m}$ est égal à 0 μ-pp pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, ce qui suffit.

La condition est évidemment suffisante.∎

Corollaire 4.6.3 *Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré.*

a) *Des fonctions $\mathcal{S}$-μ-intégrables F et G telles que $F.\mu = G.\mu$ sont égales μ-*pp.

b) *Si μ est une mesure positive et si F est une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable, alors la mesure $F.\mu$ est positive si et seulement si on a $F \geq 0$ μ-*pp.

Preuve. a) est immédiat car on a évidemment $F.\mu - G.\mu = (F - G).\mu$.

b) La nécessité de la condition résulte aussitôt de a) car on a alors $F.\mu = V(F.\mu) = |F|.V\mu = |F|.\mu$. La condition est évidemment suffisante.∎

Théorème 4.6.4 *Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré.*

Si F est une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable,

a) *$N \subset X$ est $F.\mu$-négligeable si et seulement si $\{\, x \in N : F(x) \neq 0 \,\}$ est μ-négligeable.*

b) *une fonction f définie μ-*pp *est $F.\mu$-mesurable si et seulement si fF est μ-mesurable.*

c) *une fonction f définie μ-*pp *est $F.\mu$-intégrable si et seulement si fF est μ-intégrable, auquel cas on a $\int f \, dF.\mu = \int fF \, d\mu$.*

Preuve. Comme il existe une fonction $\mathcal{S}$-borélienne égale μ-pp à F, nous pouvons sans restriction supposer que F est une fonction $\mathcal{S}$-borélienne. Soit $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de $\mathcal{S}$ dont la réunion est égale à X. Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons $Q_M = \cup_{m=1}^M S_m$. Cela étant, établissons tout d'abord que, pour tout entier $M \in \mathbb{N}_0$ et tout $r > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{f \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X)\colon\ & \textstyle\int \theta_r(f\chi_{Q_M})\,dF.\mu = \int \theta_r(f)F\chi_{Q_M}\,d\mu,\\ & \textstyle\int \theta_r(|f|\,\chi_{Q_M})\,dV(F.\mu) = \int \theta_r(|f|)\,|F|\,\chi_{Q_M}\,dV\mu\}\end{aligned}$$

est égal à $\mathrm{F}\mathcal{SB}(X)$. De fait $\mathcal{B}$ contient
i) toutes les fonctions $\mathcal{S}$-étagées α car $\theta_r(\alpha)$, $\theta_r(|\alpha|)$, $\theta_r(\alpha\chi_{Q_M})$ ainsi que $\theta_r(|\alpha|\,\chi_{Q_M})$ sont alors des fonctions $\mathcal{S}$-étagées,
ii) la limite de toutes ses suites ponctuellement convergentes, vu le théorème de la convergence majorée.

a) La condition est nécessaire. Soit B une partie $\mathcal{S}$-borélienne et $F.\mu$-négligeable contenant N. Pour conclure, il suffit bien sûr d'établir que, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $\{\, x \in B \cap Q_M : F(x) \neq 0 \,\}$ est μ-négligeable. Cela résulte aussitôt des égalités

$$\begin{aligned} 0 &= V(F.\mu)(B\cap Q_M) = \int \theta_1(\chi_B\chi_{Q_M})\,dV(F.\mu)\\ &= \int \theta_1(\chi_B)\,|F|\,\chi_{Q_M}\,dV\mu = \int |F|\,\chi_{B\cap Q_M}\,dV\mu.\end{aligned}$$

La condition est suffisante. Soit B' une partie $\mathcal{S}$-borélienne et μ-négligeable contenant l'ensemble $\{\, x \in N : F(x) \neq 0 \,\}$. Posons

$$B = B' \cup \{\, x \in X : F(x) = 0 \,\}.$$

Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, la fonction $|F|\,\chi_{B\cap Q_M}$ est alors égale μ-pp à 0 et il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \int \chi_B\,|F|\,\chi_{Q_M}\,dV\mu = \int \theta_1(\chi_B).\,|F|\,\chi_{Q_M}\,dV\mu\\ &= \int \theta_1(\chi_B\chi_{Q_M})\,dV(F.\mu) = V(F.\mu)(B\cap Q_M),\end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure.

b) La condition est nécessaire. Il existe une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées et une partie $F.\mu$-négligeable N de X telles que la suite α_m converge ponctuellement sur $X \setminus N$ vers f. Cela étant, la suite $\alpha_m F$ de fonctions μ-mesurables converge ponctuellement sur $X \setminus \{\, x \in N : F(x) \neq 0 \,\}$ vers fF, ce qui suffit.

La condition est suffisante. Vu a), toute fonction μ-mesurable est bien sûr $F.\mu$-mesurable. Cela étant, les fonctions fF et $1/F(0 \text{ si } F = 0)$ sont $F.\mu$-mesurables ainsi que leur produit. D'où la conclusion car l'ensemble des points où ce produit diffère de f est inclus dans $\{ x \in X : F(x) = 0 \}$, c'est-à-dire dans un ensemble $F.\mu$-négligeable.

c) La condition est nécessaire. Si f est une fonction $F.\mu$-intégrable, nous savons qu'il existe une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions $\mathcal{S}$-étagées qui est $F.\mu$-de Cauchy et qui converge $F.\mu$-pp vers f. Cela étant, la suite $\alpha_m F$
i) est constituée de fonctions μ-intégrables,
ii) est μ-de Cauchy car, pour tous r, $s \in \mathbb{N}_0$, on a successivement

$$\int |\alpha_r F - \alpha_s F| \, dV\mu = \int |\alpha_r - \alpha_s| \, |F| \, dV\mu = \int |\alpha_r - \alpha_s| \, dV(F.\mu),$$

iii) converge μ-pp vers fF, vu a).
Dès lors, fF est une fonction μ-intégrable et il vient

$$\int f \, dF.\mu = \lim_m \int \alpha_m \, dF.\mu = \lim_m \int \alpha_m F \, d\mu = \int fF \, d\mu.$$

La condition est suffisante. Vu b), la fonction f est $F.\mu$-mesurable. Il existe donc une fonction $\mathcal{S}$-borélienne g égale $F.\mu$-pp à f sur X. Cela étant, $(\theta_M(|g| \, \chi_{Q_M}))_{M\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions $F.\mu$-intégrables qui croît ponctuellement sur X vers $|g|$ et telle que

$$\begin{aligned} \int \theta_M(|g| \, \chi_{Q_M}) \, dV(F.\mu) &= \int \theta_M(|g|)\chi_{Q_M} \, |F| \, dV\mu \\ &\leq \int |fF| \, dV\mu, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que g est $F.\mu$-intégrable, ce qui suffit.∎

4.7 Théorème de Radon-Nikodym

Définition. Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$. La mesure μ est *absolument continue par rapport à* ν et on écrit $\mu \ll \nu$ si toute partie ν-négligeable est μ-négligeable.

Critère 4.7.1 *Si μ et ν sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$, alors μ est absolument continu par rapport à ν si et seulement si, pour toute partie ν-négligeable et $\mathcal{S}$-borélienne N de X et tout $S \in \mathcal{S}$, on a $\mu(N \cap S) = 0$.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Soit N une partie ν-négligeable de X. Nous savons qu'il existe une partie ν-négligeable et $\mathcal{S}$-borélienne B de X qui contient N. Pour conclure, il suffit alors de prouver que B est μ-négligeable. Il suffit alors de noter que l'hypothèse signifie que $\chi_B.\mu$ est la mesure 0 donc que $\chi_B = 0$ μ-pp.∎

Théorème 4.7.2 (Radon-Nikodym) *Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$.*

La mesure μ est absolument continue par rapport à ν si et seulement s'il existe une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable F telle que $\mu = F.\nu$.

De plus, si G est une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable telle que $\mu = G.\nu$, alors on a $F = G$ ν-pp.

Preuve. La suffisance de la condition ainsi que l'unicité ν-pp de F sont connues.

Pour établir la nécessité de la condition, nous allons procéder en plusieurs étapes.

1) *Remarque préliminaire.*

Si μ et ν sont réels et tels que $\mu \leq \nu$, alors on a $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour toute parties μ- et ν-intégrable A de X: de fait, A est alors $(\nu - \mu)$-intégrable et la mesure $\nu - \mu$ est positive.

2) *Preuve du cas $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ et $\mu(X) < \infty$.*

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathrm{F}\mathcal{SB}(X) : f \geq 0, f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \nu), f.\nu \leq \mu \right\}.$$

Bien sûr, $\mathcal{F}$ est non vide.

Etablissons que $\mathcal{F}$ contient l'enveloppe supérieure de ses parties finies. Il suffit évidemment de le faire pour tout couple d'éléments de $\mathcal{F}$. Or si f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathcal{F}$ et si on pose

$$A_1 = \{ x \in X : f_2(x) \leq f_1(x) \} \quad \text{et} \quad A_2 = \{ x \in X : f_1(x) < f_2(x) \},$$

alors $\{A_1, A_2\}$ est une partition $\mathcal{S}$-borélienne de X et on a

$$\sup\{f_1, f_2\} = f_1\chi_{A_1} + f_2\chi_{A_2}.$$

On conclut alors en notant que, pour tout $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\begin{aligned} \sup\{f_1, f_2\}.\nu(S) &= f_1.\nu(S \cap A_1) + f_2.\nu(S \cap A_2) \\ &\leq \mu(S \cap A_1) + \mu(S \cap A_2) \;=\; \mu(S). \end{aligned}$$

Cela étant, posons $M = \sup\left\{ \int f \, d\nu : f \in \mathcal{F} \right\}$. Il est clair que $M \leq \mu(X)$. Etablissons qu'il s'agit en fait d'un maximum, c'est-à-dire qu'il existe $f_0 \in \mathcal{F}$ tel que $M = \int f_0 \, d\nu$. De fait, il existe une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{F}$ telle que $\int f_m \, d\nu \to M$. Vu ce qui précède, et quitte à remplacer f_m par $\sup\{f_1, \ldots, f_m\}$, nous pouvons supposer cette suite f_m croissante. Cela étant, la propriété résulte aussitôt du théorème de la convergence monotone, quitte à remplacer sa limite ν-pp f_0' par une fonction $\mathcal{S}$-borélienne f_0 égale ν-pp à f_0'.

Pour conclure, prouvons que $f_0.\nu = \mu$. Si ce n'est pas le cas, il existe $S_0 \in \mathcal{S}$ tel que $(f_0.\nu)(S_0) < \mu(S_0)$ donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mu(S_0) - (f_0.\nu)(S_0) - \varepsilon\nu(S_0) > 0. \tag{$*$}$$

En recourant à la Proposition 3.4.7 et au fait que $\mu - f_0.\nu - \varepsilon\nu$ est une mesure sur $(X, \mathcal{S})$, il existe une partie $\mathcal{S}$-borélienne B_s de S_0 telle que

$$\begin{aligned} &\mu(B_s) - (f_0.\nu)(B_s) - \varepsilon\nu(B_s) \\ &\quad = \sup\{\, \mu(B) - (f_0.\nu)(B) - \varepsilon\nu(B) : B \in \mathcal{B} \,\}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des parties $\mathcal{S}$-boréliennes de S_0. Remarquons que ceci entraine l'inégalité $\nu(B_s) > 0$ sinon B_s serait ν- donc μ-négligeable, ce qui serait en contradiction avec l'inégalité $(*)$. Cela étant, prouvons que $(f_0 + \varepsilon\chi_{B_s}).\nu \leq \mu$. De fait, pour tout $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\begin{aligned} \mu(S) - \Big((f_0 + \varepsilon\chi_{B_s}).\nu\Big)(S) &= \Big[\mu(S \setminus B_s) - (f_0.\nu)(S \setminus B_s)\Big] \\ &\quad + \Big[\mu(S \cap B_s) - (f_0.\nu)(S \cap B_s) - \varepsilon\nu(S \cap B_s)\Big] \end{aligned}$$

où le premier terme entre crochets du second membre est ≥ 0 car $f_0 \in \mathcal{F}$ et où le second terme s'écrit aussi

$$\Big(\mu(B_s) - (f_0.\nu)(B_s) - \varepsilon\nu(B_s)\Big) - \Big(\mu(B_s \setminus S) - (f_0.\nu)(B_s \setminus S) - \varepsilon\nu(B_s \setminus S)\Big)$$

et est donc ≥ 0 par définition de B_s. Dès lors, il vient $f_0 + \varepsilon\chi_{B_s} \in \mathcal{F}$, ce qui est absurde car on a bien sûr

$$\int (f_0 + \varepsilon\chi_{B_s})\, d\nu = M + \varepsilon\nu(B_s) > M.$$

3) *Preuve du cas μ réel, $\nu \geq 0$ et $V\mu(X) < \infty$.*

Il existe une partie $\mathcal{S}$-borélienne B_s de X telle que

$$\mu(B_s) = \sup\{\, \mu(B) : B \in \mathcal{SB}(X) \,\}.$$

Cela étant, $\chi_{B_s}.\mu$ et $-\chi_{X \setminus B_s}.\mu$ sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$ et ces mesures sont positives car on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} (\chi_{B_s}.\mu)(S) = \mu(B_s \cap S) &= \mu(B_s) - \mu(B_s \setminus S) \geq 0 \\ \big(-\chi_{X \setminus B_s}.\mu\big)(S) = -\mu(S \setminus B_s) &= \mu(B_s) - \mu(B_s \cup S) \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $S \in \mathcal{S}$. De plus, ces deux mesures sont bien sûr absolument continues par rapport à ν et à variation finie sur X. Dès lors, vu 2), il existe des fonctions f et g qui sont $\mathcal{S}$-ν-intégrables et telles que $f.\nu = \chi_{B_s}.\mu$ et $g.\nu = -\chi_{X \setminus B_s}.\mu$ donc telles que $(f-g).\nu = \mu$.

4) *Preuve du cas $\nu \geq 0$ et $V\mu(X) < \infty$.*

Les mesures réelles $\Re\mu$ et $\Im\mu$ sont à variation finie sur X et absolument continues par rapport à ν. Vu 3), il existe des fonctions f et g qui sont $\mathcal{S}$-ν-intégrables et telles que $f.\nu = \Re\mu$ et $g.\nu = \Im\mu$ donc telles que $(f + ig).\nu = \mu$.

5) *Preuve du cas $\nu \geq 0$.*

Nous savons qu'il existe une fonction $\mathcal{S}$-borélienne F à valeurs dans $]0, +\infty[$ et μ-intégrable. Il est clair qu'on a $F.\mu \ll \mu$ donc $F.\mu \ll \nu$. Vu 4), il existe alors une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable f telle que $f.\nu = F.\mu$. Cela étant, comme $1/F$ est une fonction $\mathcal{S}$-$F.\mu$-intégrable donc $\mathcal{S}$-$f.\nu$-intégrable, f/F est une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable et telle que

$$\mu = \frac{1}{F}.(F.\mu) = \frac{1}{F}.(f.\nu) = \frac{f}{F}.\nu.$$

6) *Preuve du cas général.*

D'une part, on a bien sûr $\nu \ll V\nu$. Vu 5), il existe donc une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable G telle que $\nu = G.V\nu$. Comme de plus l'ensemble $\{ x \in X : G(x) = 0 \}$ est ν-négligeable, $H = 1/G(0 \text{ si } G = 0)$ est une fonction ν-mesurable qui, comme on le vérifie de suite, est $\mathcal{S}$-$G.V\nu$-intégrable. Dès lors, il vient $V\nu = H.(G.V\nu) = H.\nu$. D'autre part, on a aussi $\mu \ll V\nu$ et, vu 5), il existe une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable f telle que $\mu = f.V\nu$. Au total, il vient $\mu = f.(H.\nu) = (fH).\nu$.∎

Corollaire 4.7.3 *Pour toute mesure μ sur $(X, \mathcal{S})$, il existe une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable J telle que $|J| = \chi_X$ μ-pp et $\mu = J.V\mu$.*

Preuve. Vu le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction $\mathcal{S}$-μ-intégrable J telle que $\mu = J.V\mu$. Dès lors, il vient $V\mu = |J|.V\mu$ donc $(\chi_X - |J|).V\mu = 0$, ce qui entraine $|J| = \chi_X$ μ-pp.∎

Corollaire 4.7.4 *Si les mesures μ et ν sur $(X, \mathcal{S})$ et $C > 0$ sont tels que $V\mu \leq CV\nu$, alors il existe une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable F telle que $\mu = F.\nu$ et $|F| \leq C$ ν-pp.*

Preuve. Comme μ est bien sûr absolument continu par rapport à ν, il existe une fonction $\mathcal{S}$-ν-intégrable F telle que $\mu = F.\nu$. On a alors $V\mu = |F|.V\nu \leq CV\nu$ donc $(C - |F|).V\nu \geq 0$, ce qui suffit.∎

Remarque. *Si μ et ν sont deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$ et si μ est fini et absolument continu par rapport à ν, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute partie $\mathcal{S}$-borélienne et ν-intégrable B de X telle que $V\nu(B) \leq \eta$, on a $V\mu(B) \leq \varepsilon$.* Si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite B_m de parties $\mathcal{S}$-boréliennes et ν-intégrables de X telles que $V\nu(B_m) \leq 2^{-m}$ et $V\mu(B_m) \geq \varepsilon$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Mais alors $B = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{k=m}^{\infty} B_k$ est une partie $\mathcal{S}$-borélienne et ν-négligeable de X telle que $V\mu(B) \geq \varepsilon$. D'où une contradiction.□

4.8 Décomposition de Lebesgue

Définition. Soit $\mathcal{S}$ un semi-anneau sur l'ensemble non vide X.

a) Un *porteur* de la mesure μ sur $(X, \mathcal{S})$ est une partie $\mathcal{S}$-borélienne de X dont le complémentaire dans X est μ-négligeable.

b) Etant donné deux mesures μ et ν sur $(X, \mathcal{S})$, μ est *étranger par rapport à ν* s'il existe un porteur de μ qui est ν-négligeable; on écrit $\mu \perp \nu$.

Il est clair qu'alors ν est aussi étranger par rapport à μ; aussi on dit bien souvent que les mesures μ et ν sont *étrangères.*

Remarques. a) Il est clair qu'une mesure est étrangère par rapport à elle-même si et seulement si c'est la mesure 0.

b) Il est aussi clair que la seule mesure étrangère et absolument continue par rapport à une mesure, est la mesure 0.

Exemple. *Si la mesure μ est réelle sur $(X, \mathcal{S})$, alors les mesures μ_+ et μ_- sont étrangères.* C'est une conséquence directe du résultat suivant, qui a son intérêt propre.

Proposition 4.8.1 *Si μ est une mesure réelle sur $(X, \mathcal{S})$, il existe une partie $\mathcal{S}$-borélienne B de X telle que $\mu_+ = \chi_B.\mu$ et $\mu_- = -\chi_{X \setminus B}.\mu$.*

Preuve. Soit $\{ S_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ une $\mathcal{S}$-partition dénombrable de X.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, nous savons qu'il existe une partie $\mathcal{S}$-borélienne B_m de S_m telle que

$$\mu(B_m) = \sup \{ \mu(A) : A \in \mathcal{B}_m \} \qquad (*)$$

où $\mathcal{B}_m$ est l'ensemble des parties $\mathcal{S}$-boréliennes de S_m. Pour conclure, nous allons établir que la partie $\mathcal{S}$-borélienne $B = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$ convient. Posons $\mu_1 = \chi_B.\mu$ et $\mu_2 = -\chi_{X \setminus B}.\mu$. Il est clair que μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$, que μ_1 est positif et que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Etablissons par l'absurde que μ_2 est positif. Si $S \in \mathcal{S}$ est tel que $\mu_2(S) < 0$, on a $\mu(S \setminus B) > 0$ et il doit exister $m \in \mathbb{N}_0$ tel que

$\mu((S \cap S_m) \setminus B) > 0$, ce qui est contradictoire avec $(*)$. Pour conclure, il suffit alors d'établir que $\mu_+(S) \geq \mu_1(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}$. Or, étant donné $S \in \mathcal{S}$, il vient

$$\mu_+(S) = \frac{V\mu(S) + \mu(S)}{2} = \frac{1}{2} \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{P}} \Big(|\mu(T)| + \mu(T) \Big)$$

où $\mathcal{P}(S)$ désigne l'ensemble des partitions $\mathcal{S}$-boréliennes finies de S alors que $\{S \cap B, S \setminus B\}$ est une telle partition telle que $\mu(S \cap B) \geq 0$ et $\mu(S \setminus B) \leq 0$ donc telle que $\mu_+(S) \geq \chi_B.\mu(S)$.∎

Définition. Une mesure sur $(X, \mathcal{S})$ est *atomique* si elle admet un porteur dénombrable.□

Exemple. *Toute mesure atomique sur* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n))$ *est étrangère par rapport à* ℓ.□

Remarque. On peut établir qu'il existe des mesures c-boréliennes sur $\mathbb{R}$ et étrangères par rapport à ℓ, qui ne sont pas atomiques. $* \rightarrow$ Ainsi la mesure μ_f associée à la fonction singulière de Cantor f sur $[0,1]$ prolongée par 0 sur $]-\infty, 0[$ et par 1 sur $]1, +\infty[$ est c-borélienne (direct) et étrangère par rapport à ℓ (elle admet l'ensemble des nombres triadiques de Cantor comme porteur) mais ne peut être atomique (μ_f diffère de 0 et est *diffus,* c'est-à-dire que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). $\leftarrow *$

Théorème 4.8.2 (Lebesgue) *Si* μ *et* ν *sont des mesures sur* $(X, \mathcal{S})$, *il existe des mesures* μ_a *et* μ_e *sur* $(X, \mathcal{S})$ *telles que*

$$\mu_a \ll \nu, \quad \mu_e \perp \nu \quad \text{et} \quad \mu = \mu_a + \mu_e.$$

De plus, ces mesures μ_a *et* μ_e *sont uniques et il existe une partie* $\mathcal{S}$*-borélienne* B *de* X *telle que* $\mu_a = \chi_B.\mu$ *et* $\mu_e = \chi_{X \setminus B}.\mu$.

Cette décomposition unique $\mu = \mu_a + \mu_e$ est appelée *décomposition de Lebesgue de* μ *par rapport à* ν; μ_a est *la partie absolument continue* et μ_e *la partie étrangère* de μ par rapport à ν.

Preuve. L'unicité est aisée à établir: si $\mu = \mu_{a,1} + \mu_{e,1}$ et $\mu = \mu_{a,2} + \mu_{e,2}$ sont deux telles décompositions, la mesure $\mu_{a,1} - \mu_{a,2} = \mu_{e,2} - \mu_{e,1}$ est à la fois absolument continue et étrangère par rapport à ν donc est la mesure 0.

Posons $\lambda = V\mu + V\nu$. On obtient aussitôt $\mu \ll \lambda$ et $\nu \ll \lambda$. Il existe donc des fonctions $\mathcal{S}$-λ-intégrables f et g telles que $\mu = f.\lambda$ et $\nu = g.\lambda$. Il existe aussi une partie $\mathcal{S}$-borélienne B de X égale λ-pp à $\{\, x : g(x) \neq 0 \,\}$. On a alors $\chi_{X \setminus B}.\mu \perp \nu$ car $X \setminus B$ est ν-négligeable. On a aussi $\chi_B.\mu \ll \nu$ car, pour toute partie $\mathcal{S}$-borélienne et ν-négligeable N de X, $N \cap B$ est λ-négligeable donc μ-négligeable.

D'où la conclusion.∎

Remarque. $* \rightarrow$ Toute mesure sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ admet une décomposition canonique en sa partie atomique, sa partie absolument continue par rapport à ℓ et sa partie diffuse étrangère par rapport à ℓ.$\square \leftarrow *$

Chapitre 5

Intégration sur un espace localement compact séparé

5.1 Parties et fonctions boréliennes

Proposition 5.1.1 *Si X est un espace topologique séparé,*

$$\mathcal{A}(X) = \{\, \Omega \cap F : \Omega = \textit{ouvert de } X, F = \textit{fermé de } X \,\}$$

est un semi-anneau sur X.

Preuve. Seule la vérification de la propriété **(sa4)** n'est pas triviale. Il suffit cependant de vérifier que, pour tous ouverts Ω_1, Ω_2 et tous fermés F_1, F_2 de X,

$$\begin{aligned}
&(\Omega_1 \cap F_1) \setminus (\Omega_2 \cap F_2) \\
&\quad = \quad (\Omega_1 \cap F_1) \bigcap \Big((X \setminus \Omega_2) \cup (X \setminus F_2) \Big) \\
&\quad = \quad \Big(\Omega_1 \cap (F_1 \cap (X \setminus \Omega_2)) \Big) \bigcup \Big((\Omega_1 \cap (X \setminus F_2)) \cap F_1 \Big) \\
&\quad = \quad \Omega_1 \bigcap \Big(F_1 \cap F_2 \cap (X \setminus \Omega_2) \Big) . \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque. En fait, la preuve précédente établit que *si X est un ensemble et si $\mathcal{P}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$ qui contient $\emptyset$, un recouvrement dénombrable de X ainsi que les unions finies et les intersections finies de ses éléments, alors $\mathcal{S} = \{\, A \setminus B : A, B \in \mathcal{P} \,\}$ est un semi-anneau sur X.*$\square$

Définitions. Soit X un espace topologique séparé.
Une partie B de X est *borélienne* si elle est $\mathcal{A}(X)$-borélienne; on dit aussi que B est un *borélien*.

L'ensemble des parties boréliennes de X est noté $\mathcal{B}(X)$. Il s'agit d'une σ-algèbre de parties de X donc d'un semi-anneau sur X.

Il est clair que les notions de partie "borélienne", "$\mathcal{A}(X)$-borélienne" et "$\mathcal{B}(X)$-borélienne" de X coïncident.

Une fonction *borélienne sur* X est bien sûr une fonction $\mathcal{B}(X)$-borélienne (ou, ce qui revient au même, une fonction $\mathcal{A}(X)$-borélienne).

Proposition 5.1.2 *Si X_1 et X_2 sont deux espaces topologiques séparés et si φ est une application continue de X_1 dans X_2, alors, pour toute partie borélienne B de X_2, $\varphi^{-1}(B)$ est une partie borélienne de X_1.*

Preuve. De fait, l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties de X_2 dont l'image inverse par φ appartient à $\mathcal{B}(X_1)$ contient bien sûr
a) $\mathcal{A}(X_2)$,
b) les réunions dénombrables de ses éléments,
c) $A_1 \setminus A_2$ si A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{A}$.∎

Proposition 5.1.3 *Si X_1 est un sous-espace topologique de l'espace topologique séparé X, alors $\mathcal{B}(X_1) = \{ B \cap X_1 : B \in \mathcal{B}(X) \}$.*

Preuve. L'injection canonique $\mathrm{j}\colon X_1 \to X$ étant continue, nous savons déjà par le résultat précédent que $\mathcal{B} = \{ B \cap X_1 : B \in \mathcal{B}(X) \}$ est inclus dans $\mathcal{B}(X_1)$. Inversement, il est clair que $\mathcal{B}$ est une partie de $\wp(X_1)$ qui contient $\mathcal{A}(X_1)$, les unions dénombrables de ses éléments et $B_1 \setminus B_2$ si B_1 et B_2 appartiennent à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{B}(X_1)$.∎

Exemple. Il est clair que les ouverts et les fermés d'un espace topologique séparé sont des parties boréliennes donc que la fonction caractéristique d'un ouvert ou d'un fermé de X est une fonction borélienne.□

Exemple. *Toute fonction continue sur un espace topologique séparé est borélienne.* De fait, si f est une fonction continue sur l'espace topologique séparé X, alors $\Re f$ et $\Im f$ sont des fonctions continues sur X donc telles que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, les ensembles

$$\{ x \in X : \Re f(x) > r \} \quad \text{et} \quad \{ x \in X : \Im f(x) > r \}$$

sont boréliens car ouverts.□

Voici un deuxième semi-anneau sur un espace topologique séparé, qui joue lui aussi un rôle fondamental.

Définitions. Soit X un espace topologique séparé et σ-compact (autrement dit X est réunion dénombrable de parties compactes).

Cela étant, nous notons $\mathcal{B}_c(X)$ l'ensemble des parties boréliennes et relativement compactes de X. Il est clair qu'il s'agit d'un semi-anneau sur X et que l'égalité $\mathcal{B}_c(X) = \mathcal{B}(X)$ a lieu si et seulement si X est compact.

Afin de rendre les expressions plus agréables à formuler, on pourrait dire partie *c-borélienne* au lieu de partie $\mathcal{B}_c(X)$-borélienne et fonction *c-borélienne* au lieu de fonction $\mathcal{B}_c(X)$-borélienne chaque fois qu'une confusion serait possible. Cela n'est pas nécessaire, vu le résultat suivant.

Proposition 5.1.4 *Soit X un espace topologique séparé et σ-compact.*

a) *Une partie de X est c-borélienne si et seulement si elle est borélienne.*

b) *Une fonction sur X est c-borélienne si et seulement si elle est borélienne.*

Preuve. a) La condition est nécessaire vu que $\mathcal{B}_c(X) \subset \mathcal{B}(X)$.

La condition est suffisante. Soit B une partie borélienne de l'espace X. Si $\{\, K_m : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ est un recouvrement compact de X, alors B est égal à $\cup_{m=1}^{\infty} B \cap K_m$ donc est c-borélien.

b) est direct.∎

Remarque. Il y a donc identité entre les parties boréliennes et les parties c-boréliennes ainsi qu'entre les fonctions boréliennes et les fonctions c-boréliennes. C'est au niveau des mesures qu'il y a une distinction: par exemple la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure c-borélienne mais n'est pas une mesure borélienne.□

5.2 Mesures boréliennes régulières

Définitions. Soit X un espace topologique séparé.

Une mesure *borélienne* sur X est une mesure sur $(X, \mathcal{B}(X))$.

Si, en outre, X est σ-compact, une mesure *c-borélienne* sur X est une mesure sur $(X, \mathcal{B}_c(X))$. Si X est σ-compact, il est clair que toute mesure borélienne est c-borélienne et que toute mesure c-borélienne finie est borélienne.

Proposition 5.2.1 a) *Si μ est une mesure borélienne sur l'espace topologique séparé X, alors, pour toute partie μ-mesurable A de X et toute fonction continue f sur X, $f\chi_A$ est une fonction μ-mesurable.*

b) *Si μ est une mesure c-borélienne sur l'espace topologique séparé et σ-compact X, alors, pour toute partie μ-mesurable A de X et toute fonction continue f sur X, $f\chi_A$ est une fonction μ-mesurable.*

Preuve. De fait, c'est le produit de deux fonctions μ-mesurables.∎

Remarque. Les énoncés a) et b) de la proposition précédente sont particulièrement similaires et cela va avoir lieu plusieurs fois dans la suite. Aussi nous allons condenser de tels énoncés sous la forme suivante: *Si μ est une mesure* [*c*-]*borélienne sur l'espace topologique séparé* [*et σ-compact*] *X, alors, pour toute partie μ-mesurable A de X et toute fonction continue f sur X, $f\chi_A$ est une fonction μ-mesurable.* Sous cette formulation, on obtient un premier énoncé en omettant les parties comprises entre crochets et un second énoncé en incluant ces parties.

Définition. Une mesure [*c*-]borélienne μ sur l'espace topologique séparé [et σ-compact] X est *régulière* si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(r1) toute partie Ω ouverte [et μ-intégrable] de X est égale μ-pp à une réunion dénombrable de compacts inclus dans Ω,

(r2) toute partie B borélienne [et μ-intégrable] de X est égale μ-pp à une intersection dénombrable d'ouverts [μ-intégrables] contenant B.

Proposition 5.2.2 *Soit X un espace topologique séparé* [*et σ-compact*].

a) *Une mesure* [*c*-]*borélienne μ sur X est régulière si et seulement si $V\mu$ l'est.*

b) *Une mesure borélienne μ sur X est régulière si et seulement si $\Re\mu$ et $\Im\mu$ le sont.*

[*Une mesure c-borélienne μ sur X est régulière si $\Re\mu$ et $\Im\mu$ le sont.*]

c) *Une mesure borélienne réelle μ sur X est régulière si et seulement si μ_+ et μ_- le sont.*

[*Une mesure c-borélienne réelle μ sur X est régulière si μ_+ et μ_- le sont.*]

Preuve. a) est direct.

b) est direct si on note d'une part que toute partie μ-intégrable est $\Re\mu$- et $\Im\mu$-intégrable, et d'autre part que

$$V(\Re\mu), V(\Im\mu) \leq V\mu \leq V(\Re\mu) + V(\Im\mu).$$

c) est direct si on note d'une part que toute partie μ-intégrable est μ_+- et μ_--intégrable, et d'autre part que

$$\mu_+, \mu_- \leq V\mu \leq \mu_+ + V\mu_-.∎$$

Voici une propriété d'approximation très intéressante des mesures boréliennes positives qui sont régulières.

Critère 5.2.3 *Une mesure [c-]borélienne positive sur l'espace topologique séparé [et σ-compact] X est régulière si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

(r1') *pour toute partie Ω ouverte [et μ-intégrable] de X, on a*

$$\mu(\Omega) = \sup\{\, \mu(K) : K = \text{ compact, } K \subset \Omega \,\},$$

(r2') *pour toute partie B borélienne [et μ-intégrable] de X, on a*

$$\mu(B) = \inf \left\{ \mu(\Omega) : \Omega = \text{ ouvert } [\mu\text{-intégrable}], B \subset \Omega \right\}.$$

Preuve. De fait, on a successivement:
(r1) $\Rightarrow$ (r1'). Soit Ω une partie ouverte [et μ-intégrable] de X. Vu **(r1)**, il existe une suite $(K_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de compacts inclus dans Ω dont l'union est égale μ-pp à Ω. D'une part, comme Ω est μ-intégrable, on a $\mu(\Omega) = \mu(\cup_{m=1}^{\infty} K_m)$. D'autre part, vu le théorème de la convergence monotone, on a aussi $\mu(\cup_{m=1}^{M} K_m) \uparrow \mu(\cup_{m=1}^{\infty} K_m)$. La conclusion s'ensuit aussitôt.
(r1') $\Rightarrow$ (r1). Soit Ω une partie ouverte [et μ-intégrable] de X. Vu **(r1')**, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un compact K_m inclus dans Ω tel que $\mu(\Omega) \leq \mu(K_m) + 1/m$, c'est-à-dire tel que $\mu(\Omega \setminus K_m) \leq 1/m$. Dès lors, $\Omega \setminus (\cup_{m=1}^{\infty} K_m)$ est bien sûr μ-négligeable, ce qui suffit.
(r2) $\Rightarrow$ (r2'). Il suffit de procéder comme dans **(r1) $\Rightarrow$ (r1')**.
(r2') $\Rightarrow$ (r2). Il suffit de procéder comme dans **(r1') $\Rightarrow$ (r1)**.∎

Ce critère donne lieu aux théorèmes d'approximation suivants.

Théorème 5.2.4 (approximation) *Si μ est une mesure [c-]borélienne régulière positive sur l'espace topologique séparé [et σ-compact] X, alors, pour toute partie μ-intégrable A de X, on a*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\, \mu(\Omega) : \Omega = \text{ ouvert } [\mu\text{-intégrable}],\ \Omega \supset A \,\} \\ &= \sup\{\, \mu(K) : K = \text{compact},\ K \subset A \,\}. \end{aligned}$$

Preuve. Nous savons qu'il existe des parties boréliennes B_i et B_e de X vérifiant les inclusions $B_i \subset A \subset B_e$ et telles que $B_e \setminus B_i$ soit μ-négligeable. Bien sûr, B_i et B_e sont alors des parties boréliennes μ-intégrables vérifiant $\mu(B_i) = \mu(A) = \mu(B_e)$. Cela étant, d'une part, on a

$$\begin{aligned} \mu(B_i) &= \inf\{\, \mu(\Omega) : \Omega = \text{ ouvert } [\mu\text{-intégrable}],\ \Omega \supset B_i \,\} \\ &\leq \inf\{\, \mu(\Omega) : \Omega = \text{ ouvert } [\mu\text{-intégrable}],\ \Omega \supset A \,\} \\ &\leq \inf\{\, \mu(\Omega) : \Omega = \text{ ouvert } [\mu\text{-intégrable}],\ \Omega \supset B_e \,\} \quad = \quad \mu(B_e) \end{aligned}$$

donc la première égalité annoncée. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert μ-intégrable Ω_ε tel que $B_i \subset \Omega_\varepsilon$ et $\mu(\Omega_\varepsilon) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/3$. Il existe ensuite un compact K_ε inclus dans Ω_ε tel que $\mu(\Omega_\varepsilon) \leq \mu(K_\varepsilon) + \varepsilon/3$. Enfin, comme $\Omega_\varepsilon \setminus B_i$ est un ensemble borélien et μ-intégrable de μ-mesure majorée par $\varepsilon/3$, il existe un ouvert μ-intégrable U_ε tel que $\Omega_\varepsilon \setminus B_i \subset U_\varepsilon$ et $\mu(U_\varepsilon) \leq 2\varepsilon/3$. Au total, $K_\varepsilon \setminus U_\varepsilon$ est une partie compacte de B_i donc de A telle que

$$\mu(K_\varepsilon \setminus U_\varepsilon) = \mu(K_\varepsilon) - \mu(K_\varepsilon \cap U_\varepsilon) \geq \mu(\Omega_\varepsilon) - \varepsilon \geq \mu(B_i) - \varepsilon,$$

ce qui suffit pour conclure aussitôt.∎

Rappel. Une partie d'un espace topologique est
a) G_δ si elle est intersection dénombrable d'ouverts,
b) F_σ si elle est union dénombrable de fermés.

Théorème 5.2.5 (approximation) *Si μ est une mesure [c-]borélienne régulière positive sur l'espace topologique séparé [et σ-compact X], alors, pour toute partie μ-mesurable A de X et tout $\varepsilon > 0$, il existe une réunion dénombrable A_ε de parties compactes de X et un ouvert Ω_ε de X tels que $A_\varepsilon \subset A \subset \Omega_\varepsilon$ et que $\Omega_\varepsilon \setminus A_\varepsilon$ soit μ-intégrable et de μ-mesure majorée par ε.*

Par conséquent, il existe des parties A_i et A_e respectivement F_σ et G_δ de X telles que $A_i \subset A \subset A_e$ et que $A_e \setminus A_i$ soit μ-négligeable.

Preuve. Nous savons qu'il existe des parties boréliennes B_i et B_e telles que $B_i \subset A \subset B_e$ et $\mu(B_e \setminus B_i) = 0$. Nous savons aussi que B_e est inclus dans une union dénombrable de parties boréliennes, deux à deux disjointes et μ-intégrables. Dès lors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, vu le théorème précédent, il existe un compact K_m inclus dans $B_i \cap B_m$ et une partie ouverte et μ-intégrable Ω_m contenant $B_e \cap B_m$ tels que $\mu(\Omega_m \setminus K_m) \leq 2^{-m}\varepsilon$. On vérifie alors de suite que les ensembles $A_\varepsilon = \cup_{m=1}^\infty K_m$ et $\Omega_\varepsilon = \cup_{m=1}^\infty \Omega_m$ conviennent.

Pour conclure, il suffit alors de poser d'une part $A_i = \cup_{m=1}^\infty A_{1/m}$ et d'autre part $A_e = \cap_{m=1}^\infty \Omega_{1/m}$.∎

Exemple. Signalons qu'au paragraphe suivant, nous établissons que, si X est un espace localement compact séparé [et σ-compact], ayant une base de topologie dénombrable, alors toute mesure [c-]borélienne sur X est régulière.

$* \rightarrow$

La fin de ce paragraphe est destinée à établir un résultat transcendant dû à Lusin, qui peut être réservé pour une deuxième lecture.

Théorème 5.2.6 (Lusin) *Soient μ une mesure [c-]borélienne régulière sur l'espace topologique séparé [et σ-compact] X, f une fonction μ-mesurable et A une partie μ-intégrable et non μ-négligeable de X.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de A tel que $f \in \mathrm{C}_0(K)$ et $V\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$.

Preuve. Considérons d'abord le cas où il existe des parties μ-mesurables A_m de X, deux à deux disjointes et recouvrant X, ainsi qu'une suite $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de nombres complexes tels que $f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi_{A_m}$. Comme A est μ-intégrable, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $V\mu(A \setminus \cup_{m=1}^{M} A_m) \leq \varepsilon/2$. Vu la régularité de μ, il existe ensuite des compacts $K_1, \ldots, K_M$ tels que $K_m \subset A \cap A_m$ pour tout $m \leq M$ et $\sum_{m=1}^{M} V\mu((A \cap A_m) \setminus K_m) \leq \varepsilon/2$. Cela étant, $K = \cup_{m=1}^{M} K_m$ est un compact de A tel que $V\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$ alors que $f \in \mathrm{C}_0(K)$ car les compacts $K_1, \ldots, K_M$ sont en nombre fini et deux à deux disjoints, et f constant sur chacun d'eux. D'où la conclusion dans ce cas particulier.

Passons au cas général. Nous pouvons, sans restriction, supposer f réel. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \chi_{\left\{\, x\in X : \frac{k}{m} < f(x) \leq \frac{k+1}{m} \,\right\}}.$$

Il est clair qu'il existe une partie μ-négligeable N de X (à savoir l'ensemble des points de X où f n'est pas défini) telle que la suite f_m converge ponctuellement sur $X \setminus N$ vers f. Or, vu la première partie de cette preuve, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un compact K_m de $A \setminus N$ tel que $V\mu(A \setminus K_m) \leq 2^{-m}\varepsilon$ et $f_m \in \mathrm{C}_0(K_m)$. Cela étant, $K = \cap_{m=1}^{\infty} K_m$ est un compact de A tel que $V\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$ et $f_m \rightrightarrows_K f$, donc $f \in \mathrm{C}_0(K)$.∎

$\leftarrow *$

5.3 Espaces localement compacts séparés

Il ne s'agit pas de faire une étude approfondie de ces espaces dans ce paragraphe mais bien d'en signaler les propriétés utilisées dans la suite.

Définition. Un espace *complètement régulier séparé* est un espace topologique séparé X tel que, pour tout fermé F et tout compact K de X non vides et disjoints, il existe une fonction continue $f \colon X \to [0,1]$ telle que $f(F) = \{0\}$ et $f(K) = \{1\}$.

$* \rightarrow$

Rappel. Un espace *normal* est un espace topologique séparé tel que, pour tous fermés F_1 et F_2 disjoints de X, il existe des ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 tels que $F_1 \subset \Omega_1$ et $F_2 \subset \Omega_2$.

Les exemples privilégiés d'espaces normaux sont constitués par les compacts séparés et les espaces métrisables.

Lemme 5.3.1 (Urysohn) *Si F_0 et F_1 sont deux parties fermées, non vides et disjointes de l'espace normal X, il existe une fonction continue $f\colon X \to [0,1]$ telle que $f(F_0) = \{0\}$ et $f(F_1) = \{1\}$.*∎

Exemple. Vu le lemme d'Urysohn, il est clair que *tout espace normal est un espace complètement régulier séparé.*□

$\longleftarrow *$

Théorème 5.3.2 (Urysohn) *Toute fonction f continue sur un compact non vide K d'un espace complètement régulier séparé X a une extension F continue et bornée sur X telle que $\|F\|_X = \|f\|_K$.*

Preuve. Si $f = 0$, il suffit de prendre $F = 0$. Si $f \neq 0$, il vient $\|f\|_K > 0$ et il suffit de procéder comme suit.

Etablissons d'abord que tout $g \in \mathrm{C}_0(K)$ à valeurs dans $[-1,1]$ a une extension continue sur X. Les compacts

$$K' = \{\, x \in K : -1 \leq g(x) \leq -1/3 \,\} \quad \text{et} \quad K'' = \{\, x \in K : 1/3 \leq g(x) \leq 1 \,\}$$

étant disjoints, il existe $h_0 \in \mathrm{C}_0(X)$ à valeurs dans $[-1,1]$, égal à -1 en tout point de K' et à 1 en tout point de K'' (si K' et K'' diffèrent de $\emptyset$, cela résulte de la définition des espaces complètement réguliers séparés, sinon l'une des deux fonctions $-\chi_X$ ou χ_X convient). Cela étant, $g_0 = h_0/3$ est à valeurs dans $[-1/3, 1/3]$ et est égal à $-1/3$ en tout point de K' et à $1/3$ en tout point de K''. Dès lors, $g - g_0$ appartient à $\mathrm{C}_0(K)$ et est à valeurs dans $[-2/3, 2/3]$. En recommençant cette opération à partir de $3(g - g_0)/2$ au lieu de g, on obtient l'existence de $g_1 \in \mathrm{C}_0(X)$, à valeurs dans $[-1/3, 1/3]$ et tel que

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^2 \leq g - g_0 - \frac{2}{3} g_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ sur } K.$$

En continuant de la sorte, on obtient une suite $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{C}_0(X)$ telle que $-1/3 \leq g_m \leq 1/3$ et

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \leq g - \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^k g_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \quad \text{sur } K$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Il suffit alors de constater que la série $\sum_{m=0}^{\infty}(2/3)^m g_m$ converge uniformément sur K vers g, est uniformément de Cauchy sur X et est à valeurs dans $[-1,1]$.

Cela étant, il existe des extensions F_1 et $F_2 \in \mathrm{C}_0(X)$ de $\Re f/\left\|f\right\|_K$ et $\Im f/\left\|f\right\|_K$ respectivement. Il suffit alors de constater que

$$F = \left\|f\right\|_K \cdot \theta_1 \circ (F_1 + iF_2)$$

convient.∎

Lemme 5.3.3 *Pour tout fermé F et tout compact K non vides et disjoints d'un espace complètement régulier séparé X, il existe une fonction continue $f\colon X \to [0,1]$ prenant la valeur 0 en tout point d'un voisinage de F et la valeur 1 en tout point d'un voisinage de K.*

Preuve. L'espace topologique X étant complètement régulier et séparé, il existe une fonction continue $g\colon X \to [0,1]$ telle que $g(F) = \{0\}$ et $g(K) = \{1\}$. Cela étant, si $h\colon [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue telle que $h([0,1/4]) = \{0\}$ et $h([3/4,1]) = \{1\}$, on vérifie de suite que $f = h \circ g$ convient.∎

Proposition 5.3.4 *Si $\{\, \Omega_j : j \leq J \,\}$ est un recouvrement ouvert fini du compact non vide K de l'espace complètement régulier séparé X, alors il existe des fonctions continues $f_1\colon X \to [0,1]$, ..., $f_J\colon X \to [0,1]$ telles que $\operatorname{supp}(f_j) \subset \Omega_j$ pour tout $j \leq J$ et que $\sum_{j=1}^{J} f_j$ soit majoré par χ_X et prenne la valeur 1 en tout point d'un voisinage de K.*

Preuve. Bien sûr

$$K_1 = K \setminus \left(\bigcup_{j=2}^{J} \Omega_j \right)$$

est une partie compacte de Ω_1. Vu le résultat précédent, il existe une fonction continue $g_1\colon X \to [0,1]$ prenant la valeur 1 en tout point d'un voisinage ouvert V_1 de K_1 et la valeur 0 en tout point d'un voisinage de $X \setminus \Omega_1$. En particulier le support de g_1 est inclus dans Ω_1.

Par induction sur $j = 2, \ldots, J-1$, on vérifie que

$$K_l = \left(K \setminus \bigcup_{j=l+1}^{J} \Omega_j \right) \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{l-1})$$

est une partie compacte de Ω_l et on obtient l'existence d'une fonction continue $g_l\colon X \to [0,1]$ prenant la valeur 1 en tout point d'un voisinage V_l de K_l et de support inclus dans Ω_l.

Enfin
$$K_J = K \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{J-1})$$
est une partie compacte de Ω_J et il existe donc une fonction continue $g_J \colon X \to [0,1]$ prenant la valeur 1 en tout point de K_J et à support inclus dans Ω_J.

Cela étant, $g = \sum_{j=1}^{J} g_j$ est une fonction continue sur X, à valeurs dans $[0, \infty[$ et telle que $g(x) \geq 1$ en tout point x de K. Dès lors,
$$V = \{\, x \in X : g(x) > 1/2 \,\}$$
est un voisinage ouvert de K et il existe une fonction continue $h \colon X \to [0,1]$ prenant la valeur 1 en tout point d'un voisinage de K et à support inclus dans V. On vérifie alors aisément que les fonctions $f_1, \ldots, f_J$ définies sur X par
$$f_j(x) = \begin{cases} h(x)\dfrac{g_j(x)}{g(x)} & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
conviennent.∎

Définition. Un espace *localement compact séparé* est un espace topologique séparé dont tout élément a un voisinage compact.

Exemples. *Les exemples privilégiés d'espaces localement compacts séparés sont:*

a) *les espaces euclidiens* $\mathbb{R}^n$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}_0$,

b) *les espaces topologiques discrets,*

c) *les espaces topologiques séparés compacts.*□

Lemme 5.3.5 *Si* $K_1, \ldots, K_J$ *sont des parties compactes, non vides, disjointes deux à deux et en nombre fini de l'espace topologique séparé* X, *il existe des ouverts* $\Omega_1, \ldots, \Omega_J$ *de* X *deux à deux disjoints et tels que* $K_j \subset \Omega_j$ *pour tout* $j \leq J$.

Preuve. Il suffit d'établir que, pour tout $j \leq J$, il existe des ouverts disjoints V_j et W_j de X tels que
$$K_j \subset V_j \quad \text{et} \quad \bigcup_{1 \leq k \leq J,\ k \neq j} K_k \subset W_j$$
car alors les ensembles
$$\Omega_j = V_j \bigcap \left(\bigcap_{1 \leq k \leq J,\ k \neq j} W_k \right)$$

conviennent.

Tout compte fait, nous sommes ainsi ramenés à établir l'énoncé dans le cas $J = 2$.

Or, étant donné $x \in K_1$, pour tout $y \in K_2$, il existe des ouverts V_y et W_y tels que $x \in V_y$, $y \in W_y$ et $V_y \cap W_y = \emptyset$, car X est séparé. Du recouvrement ouvert $\{ W_y : y \in K_2 \}$ du compact K_2, on peut alors extraire un recouvrement fini, soit $\{W_{y_1}, \ldots, W_{y_J}\}$. Pour tout $x \in K_1$, il existe donc des ouverts V'_x et W'_x tels que $x \in V'_x$, $K_2 \subset W'_x$ et $V'_x \cap W'_x = \emptyset$: il suffit par exemple de poser $V'_x = \cap_{j=1}^J V_{y_j}$ et $W'_x = \cup_{j=1}^J W_{y_j}$. Cela étant, du recouvrement ouvert $\{ V'_x : x \in K_1 \}$ du compact K_1, on peut extraire un recouvrement fini, soit $\{V'_{x_1}, \ldots, V'_{x_L}\}$. On vérifie alors directement que les ensembles $\Omega_1 = \cup_{l=1}^L V'_{x_l}$ et $\Omega_2 = \cap_{l=1}^L W'_{x_l}$ conviennent.∎

Théorème 5.3.6 *Si le compact K et l'ouvert Ω de l'espace localement compact séparé X sont tels que $K \subset \Omega$, il existe un ouvert relativement compact V de X tel que $K \subset V \subset V^- \subset \Omega$.*

Preuve. Tout $x \in K$ a un voisinage ouvert et relativement compact U_x. Quitte à remplacer U_x par $U_x \cap \Omega$, nous pouvons supposer avoir $U_x \subset \Omega$. Comme les compacts $\{x\}$ et $U_x^- \setminus U_x$ sont disjoints, le lemme précédent donne des ouverts V_x et W_x tels que $x \in V_x$, $U_x^- \setminus U_x \subset W_x$ et $V_x \cap W_x = \emptyset$. Cela étant, $U_x \cap V_x$ est un voisinage ouvert de x dont l'adhérence est compacte et incluse dans Ω. Du recouvrement ouvert $\{ U_x \cap V_x : x \in K \}$ du compact K, on peut alors extraire un recouvrement fini, soit $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_J}\}$. On vérifie directement que $V = \cup_{j=1}^J (U_{x_j} \cap V_{x_j})$ convient.∎

Théorème 5.3.7 *Tout espace localement compact séparé est complètement régulier séparé.*

Preuve. Soient K un compact et F un fermé, non vides et disjoints de l'espace localement compact séparé X. Vu le résultat précédent, il existe un ouvert relativement compact V tel que $K \subset V \subset V^- \subset X \setminus F$. Vu le lemme d'Urysohn, il existe ensuite une fonction continue $g \colon V^- \to [0, 1]$ telle que $g(V^- \setminus V) = \{0\}$ et $g(K) = \{1\}$. On vérifie alors aussitôt que

$$f \colon X \to [0,1] \quad x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in V^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction continue sur X telle que $f(K) = \{1\}$ et $f(F) = \{0\}$.∎

Voici quelques conséquences de ce résultat.

Corollaire 5.3.8 *Soit X un espace localement compact séparé.*

a) *Si le compact K et l'ouvert Ω de X sont tels que $K \subset \Omega$, il existe $f \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que $\chi_K \leq f \leq \chi_\Omega$ et* $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$.

b) *Pour tout* $f \in \mathrm{D}_0(X)$ *et tout recouvrement ouvert fini* $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_J\}$ *de* $\mathrm{supp}(f)$, *il existe des fonctions* $f_1, \ldots, f_J \in \mathrm{D}_0(X)$ *telles que* $\mathrm{supp}(f_j) \subset \Omega_j$ *pour tout* $j \leq J$ *et* $f = \sum_{j=1}^{J} f_j$.

Si, en outre, la fonction f *est à valeurs réelles* (resp. *dans* $[0, +\infty[$), *on peut exiger qu'il en soit de même pour les* $f_1, \ldots f_J$.

c) *Si* $K_1, \ldots, K_J$ *sont des parties compactes, non vides, deux à deux disjointes et en nombre fini de* X, *alors, pour tous* $c_1, \ldots, c_J \in \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$; $[0, +\infty[$), *il existe* $f \in \mathrm{D}_0(X)$ (resp. $\mathrm{D}_0(X; \mathbb{R})$, $\mathrm{D}_0([0, +\infty[)$) *tel que* $f(x) = c_j$ *pour tout* $x \in K_j$ *et tout* $j \leq J$, *et*

$$\|f\|_X = \sup \{ |c_j| : j \leq J \}.$$

Preuve. a) Il existe un ouvert relativement compact V de X tel que $K \subset V \subset V^- \subset \Omega$ puis $f \in \mathrm{C}_0(X; [0,1])$ tel que $f(K) = \{1\}$ et $f(X \setminus V) = \{0\}$. D'où la conclusion car on a bien sûr $\mathrm{supp}(f) \subset V^-$.

b) Comme $\mathrm{supp}(f)$ est compact, on sait qu'il existe des $g_j \in \mathrm{C}_0(X; [0,1])$ tels que $\mathrm{supp}(g_j) \subset \Omega_j$ pour tout $j \leq J$ et que $\chi_{\mathrm{supp}(f)} \leq \sum_{j=1}^{J} g_j \leq \chi_X$. Il suffit alors de poser $f_j = f g_j$ pour tout $j \leq J$.

c) Il existe des ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_J$ de X, deux à deux disjoints et tels que $K_j \subset \Omega_j$ pour tout $j \leq J$. Vu a), pour tout $j \leq J$, il existe $f_j \in \mathrm{D}_0(X; [0,1])$ tel que $\chi_{K_j} \leq f_j \leq \chi_X$. Il suffit alors de poser $f = \sum_{j=1}^{J} c_j f_j$.▮

Voici encore une propriété intéressante de certains espaces localement compacts séparés.

Proposition 5.3.9 *Si* X *est un espace localement compact séparé qui admet une base de topologie dénombrable,*

a) *tout ouvert de* X *est* F_σ; *il est même réunion dénombrable de compacts.*

En particulier, X *est* σ*-compact.*

b) *tout fermé de* X *est* G_δ.

Preuve. a) Soit $\mathcal{V}$ une base de topologie dénombrable de X. Si Ω est un ouvert de X, notons $\mathcal{V}_\Omega$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{V}$ dont l'adhérence est un compact inclus dans Ω. Vu la proposition précédente, Ω est égal à $\cup_{V \in \mathcal{V}_\Omega} V^-$.

b) se déduit aussitôt de a) par passage aux complémentaires.▮

Exercice. Etablir que tout espace localement compact séparé est un espace de Baire.□

Voici les exemples de mesures boréliennes régulières annoncés au paragraphe précédent.

Exemple. *Si X est un espace localement compact séparé qui a une base dénombrable de topologie, alors toute mesure [c-]borélienne sur X est régulière.*

Preuve. Soit μ une mesure [c]-régulière sur X. Comme il suffit de prouver que $V\mu$ est régulier, nous pouvons supposer la mesure μ positive.

D'une part, comme tout ouvert de X est réunion dénombrable de compacts, il est clair que la condition **(r1)** est vérifiée.

D'autre part, la mesure μ étant positive, vu la preuve du critère 5.2.3, pour conclure, il suffit d'établir que μ vérifie aussi la condition **(r2')**.

Soit B une partie borélienne et μ-intégrable de X.

Par hypothèse, il existe une suite croissante $(\Omega_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ d'ouverts relativement compacts de X dont l'union est égale à X. Pour conclure, il suffit alors bien sûr d'établir que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un ouvert μ-intégrable $U_{\varepsilon,m}$ tel que

$$B \cap \Omega_m \subset U_{\varepsilon,m} \quad \text{et} \quad \mu(U_{\varepsilon,m}) \leq \mu(B \cap \Omega_m) + 2^{-m}\varepsilon$$

(en effet, par exemple, $U_\varepsilon = \cup_{m=1}^{\infty} U_{\varepsilon,m}$ est alors un ouvert μ-intégrable tel que $B \subset U_\varepsilon$ et $\mu(U_\varepsilon) \leq \mu(B) + \varepsilon$).

Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties μ-intégrables A de Ω_m pour lesquelles

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\,\mu(\Omega) : \Omega = \text{ouvert } \mu\text{-intégrable}, A \subset \Omega \subset \Omega_m\,\} \\ &= \sup\{\,\mu(K) : K = \text{compact}, K \subset A\,\}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors de prouver que $\mathcal{A}$ contient l'ensemble des parties boréliennes de Ω_m.

L'ensemble $\mathcal{A}$ contient toutes les parties ouvertes de Ω_m: de fait, pour une partie ouverte de Ω_m, la première égalité est triviale et la second résulte de ce que la condition **(r1)** donc la condition **(r1')** est vérifiée.

Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, on vérifie directement que leur union appartient aussi à $\mathcal{A}$.

Si A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{A}$ et sont tels que $A_2 \subset A_1$, on a $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$ car, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ouverts U_1 et U_2 et des compacts K_1 et K_2 tels que

$$K_1 \subset A_1 \subset U_1 \subset \Omega_m, \quad K_2 \subset A_2 \subset U_2 \subset \Omega_m$$

et

$$\mu(U_1 \setminus K_1) \leq \varepsilon/2, \quad \mu(U_2 \setminus K_2) \leq \varepsilon/2.$$

Dès lors, $U_1 \setminus K_2$ et $K_1 \setminus U_2$ sont respectivement un ouvert et un compact tels que

$$K_1 \setminus U_2 \subset A_1 \setminus A_2 \subset U_1 \setminus K_2$$

et

$$\mu((U_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus U_2)) \leq \mu(U_1 \setminus K_1) + \mu(U_2 \setminus K_2) \leq \varepsilon.$$

D'où la conclusion.∎

Critère 5.3.10 *Si X est un espace localement compact séparé [et σ-compact,] alors une mesure [c-]borélienne régulière μ sur X*

a) *est nulle si et seulement si $\int f\,d\mu = 0$ pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X;[0,+\infty[)$.*

b) *est positive si et seulement si $\int f\,d\mu \geq 0$ pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X;[0,+\infty[)$.*

c) *est réelle si et seulement si $\int f\,d\mu$ est réel pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X;[0,+\infty[)$.*

Preuve. a) (resp. b); c)). Vu la régularité de μ, pour tout ouvert μ-intégrable Ω de X, il existe une suite de compacts $K_m \subset \Omega$ tels que $\cup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$ μ-pp. On peut en outre supposer avoir $K_m \subset K_{m+1}^{\circ}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, il existe une suite $f_m \in \mathrm{D}_0(X)$ telle que $\chi_{K_m} \leq f_m \leq \chi_{K_{m+1}^{\circ}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Une application directe du théorème de la convergence majorée donne alors $\mu(\Omega) = 0$ (resp. $\mu(\Omega) \geq 0$; $\mu(\Omega) \in \mathbb{R}$). Cela étant, pour tout ouvert μ-intégrable Ω et tout fermé F de X,

$$\mu(\Omega \cap F) = \mu(\Omega) - \mu(\Omega \setminus F)$$

est égal à 0 (resp. est ≥ 0; est réel). D'où la conclusion, vu la partie b) du Corollaire 4.1.3.∎

Proposition 5.3.11 *Si X est un espace localement compact séparé [qui a une base de topologie dénombrable] et si μ est une mesure [c-]borélienne régulière sur X, alors toute réunion d'ouverts μ-négligeables est μ-négligeable.*

Preuve. Soit $\Omega = \cup_{j \in J} \Omega_j$ une réunion d'ouverts μ-négligeables.

Dans le cas d'une mesure borélienne régulière sur X, toute partie compacte de Ω est incluse dans la réunion d'un nombre fini de Ω_j et est par conséquent μ-négligeable. D'où la conclusion, vu la régularité de μ.

Dans le cas d'une mesure c-borélienne régulière, nous savons que Ω est réunion dénombrable de compacts. Pour conclure, il suffit alors de noter que chacun de ces compacts est inclus dans une réunion finie des Ω_j et est par conséquent μ-négligeable.∎

Définition. La proposition précédente assure le sens de la notion suivante. Si μ est une mesure [c-]borélienne régulière sur un espace localement compact séparé X [qui a une base de topologie dénombrable], *le support de μ* est le complémentaire dans X de l'union de tous les ouverts μ-négligeables de X. Il est noté $\mathrm{supp}(\mu)$; c'est un fermé de X tel que $X \setminus \mathrm{supp}(\mu)$ soit μ-négligeable et c'est le plus petit fermé de X vérifiant cette condition.

5.4 Théorèmes de représentation de Riesz

Lemme 5.4.1 *Si μ est une mesure positive [c-]borélienne régulière sur l'espace localement compact séparé [et σ-compact] X, alors, pour toute partie ouverte [et μ-intégrable] Ω de X, on a $\mu(\Omega) = M_1 = M_2$ où*

$$\begin{aligned} M_1 &= \sup\left\{ \int f\,d\mu : f \in \mathrm{D}_0(X), 0 \leq f \leq \chi_\Omega \right\}, \\ M_2 &= \sup\left\{ \int f\,d\mu : f \in \mathrm{D}_0(X), 0 \leq f \leq \chi_\Omega, \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \right\}. \end{aligned}$$

Preuve. Il est clair que tout $f \in \mathrm{D}_0(X)$ vérifiant $0 \leq f \leq \chi_\Omega$ est μ-intégrable et tel que $\int f\,d\mu \leq \mu(\Omega)$. Dès lors, nous avons déjà $M_2 \leq M_1 \leq \mu(\Omega)$, ce qui nous permet de conclure si $\mu(\Omega) = 0$. Si $\mu(\Omega) \neq 0$, pour tout $r \in [0, \mu(\Omega)[$, vu la régularité de μ, il existe un compact K de X inclus dans Ω tel que $r < \mu(K) \leq \mu(\Omega)$. Cela étant, pour toute fonction $f \in \mathrm{C}_0(X)$ telle que $\chi_K \leq f \leq \chi_\Omega$, on a $r < \int f\,d\mu \leq \mu(\Omega)$, ce qui suffit.∎

Théorème 5.4.2 (représentation, Riesz) *Soit X un espace localement compact séparé et σ-compact.*

Pour toute fonctionnelle linéaire positive $\mathcal{T}$ sur $\mathrm{D}_0(X;\mathbb{R})$, il existe une et une seule mesure positive c-borélienne régulière $\mu_\mathcal{T}$ sur X telle que

$$\langle \cdot, \mathcal{T} \rangle = \int \cdot \, d\mu_\mathcal{T} \quad \textit{sur} \quad \mathrm{D}_0(X;\mathbb{R}).$$

Preuve. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

Unicité de $\mu_\mathcal{T}$.

Soient μ et ν deux mesures positives c-boréliennes régulières sur X telles que $\int f\,d\mu = \int f\,d\nu$ pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X)$. Vu le lemme précédent, pour tout ouvert relativement compact Ω de X, on a alors $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ car un tel ouvert est μ- et ν-intégrable. Vu la régularité de μ et de ν, on obtient ensuite $\mu(B) = \nu(B)$ pour toute partie borélienne et relativement compacte B de X car une telle partie est μ- et ν-intégrable. D'où la conclusion.

Etude de μ^*.

a) *Définition de μ^*.* Pour toute partie ouverte Ω de X, posons

$$\mu^*(\Omega) = \sup\left\{ \langle f, \mathcal{T} \rangle : f \in \mathrm{D}_0(X), 0 \leq f \leq \chi_\Omega, \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \right\}$$

si cette borne supérieure est finie et $\mu^*(\Omega) = +\infty$ sinon. Il est alors clair que $\mu^*(\Omega)$ appartient à $[0, +\infty[$ pour tout ouvert relativement compact Ω de X (car il existe

$f \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que $\chi_\Omega \leq f$ donc tel que $\mu^*(\Omega) \leq \langle f, \mathcal{T} \rangle)$ et que

$$\mu^*(\Omega) = \inf \{ \mu^*(\omega) : \omega = \text{ouvert de } X, \omega \subset \Omega \}$$

pour tout ouvert Ω de X.

Dans ces conditions, il est licite d'introduire la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mu^* \colon \wp(X) & \to & [0, +\infty[\cup \{+\infty\} \\ A & \mapsto & \inf \left\{ \mu^*(\Omega) : \Omega = \text{ouvert de } X, \Omega \supset A \right\}. \end{array}$$

b) *Propriétés de μ^*.* On a successivement:
1) $\mu^*(\emptyset) = 0$. De fait, par définition, il vient $\mu^*(\emptyset) = \langle 0, \mathcal{T} \rangle = 0$ car $\emptyset$ est un ouvert de X.
2) $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ si A_1, $A_2 \in \wp(X)$ sont tels que $A_1 \subset A_2$. Cela résulte aussitôt de la définition de μ^*.
3) $\mu^*(\cup_{m=1}^\infty \Omega_m) \leq \sum_{m=1}^\infty \mu^*(\Omega_m)$ pour toute suite $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ d'ouverts de X. De fait, pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que

$$0 \leq f \leq \chi_{\cup_{m=1}^\infty \Omega_m} \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(f) \subset \cup_{m=1}^\infty \Omega_m,$$

il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que le compact $\mathrm{supp}(f)$ soit inclus dans $\cup_{m=1}^M \Omega_m$ puis des fonctions $f_1, \ldots, f_M \in \mathrm{D}_0(X)$ telles que

$$0 \leq f_m \leq \chi_{\Omega_m} \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(f_m) \subset \Omega_m, \qquad \forall m \leq M,$$

et $f = \sum_{m=1}^M f_m$. Dans ces conditions, il vient

$$\langle f, \mathcal{T} \rangle = \sum_{m=1}^M \langle f_m, \mathcal{T} \rangle \leq \sum_{m=1}^M \mu^*(\Omega_m) \leq \sum_{m=1}^\infty \mu^*(\Omega_m),$$

ce qui suffit.
4) $\mu^*(\cup_{m=1}^\infty A_m) \leq \sum_{m=1}^\infty \mu^*(A_m)$ pour toute suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\wp(X)$. S'il existe un entier $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $\mu^*(A_m) = +\infty$, c'est trivial. Sinon, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un ouvert Ω_m de X tel que

$$A_m \subset \Omega_m \quad \text{et} \quad \mu^*(\Omega_m) \leq \mu^*(A_m) + 2^{-m}\varepsilon.$$

Il vient alors

$$\mu^*(\cup_{m=1}^\infty A_m) \leq \mu^*(\cup_{m=1}^\infty \Omega_m) \leq \sum_{m=1}^\infty \mu^*(\Omega_m) \leq \sum_{m=1}^\infty \mu^*(A_m) + \varepsilon,$$

ce qui suffit pour conclure.
5) $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$ pour toute partie A et toute partie borélienne B de X. Remarquons que l'inégalité "$\leq$" résulte aussitôt de la propriété 4). Pour conclure, il suffit de prouver que l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{ B \in \wp(X) : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B), \forall A \in \wp(X) \}$$

contient $\mathcal{B}(X)$. Or $\mathcal{B}$ contient
i) toute partie ouverte Ω de X. Soit A une partie de X. Si $\mu^*(A) = +\infty$, c'est trivial. Sinon, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U de X tel que

$$A \subset U \quad \text{et} \quad \mu^*(U) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Cela étant, il existe $f_1 \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que

$$0 \leq f_1 \leq \chi_{U \cap \Omega}, \quad \mathrm{supp}(f_1) \subset U \cap \Omega, \quad \text{et} \quad \langle f_1, \mathcal{T} \rangle \geq \mu^*(U \cap \Omega) - \varepsilon.$$

Comme $U \setminus \mathrm{supp}(f_1)$ est un ouvert contenant $U \setminus \Omega$, il existe aussi $f_2 \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que

$$0 \leq f_2 \leq \chi_{U \setminus \mathrm{supp}(f_1)}, \quad \mathrm{supp}(f_2) \subset U \setminus \mathrm{supp}(f_1)$$

et

$$\langle f_2, \mathcal{T} \rangle \geq \mu^*(U \setminus \mathrm{supp}(f_1)) - \varepsilon$$

donc tel que

$$\langle f_2, \mathcal{T} \rangle \geq \mu^*(U \setminus \Omega) - \varepsilon.$$

Comme on a alors $f_1 + f_2 \in \mathrm{D}_0(X)$, $0 \leq f_1 + f_2 \leq \chi_U$ et $\mathrm{supp}(f_1 + f_2) \subset U$, il vient successivement

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(U) & \geq & \langle f_1 + f_2, \mathcal{T} \rangle \quad = \quad \langle f_1, \mathcal{T} \rangle + \langle f_2, \mathcal{T} \rangle \\ & \geq & \mu^*(U \cap \Omega) + \mu^*(U \setminus \Omega) - 2\varepsilon \end{array}$$

d'où on tire

$$\begin{array}{rcccl} \mu^*(A) + \varepsilon & \geq & \mu^*(U) & \geq & \mu^*(U \cap \Omega) + \mu^*(U \setminus \Omega) - 2\varepsilon \\ & & & \geq & \mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*(A \setminus \Omega) - 2\varepsilon. \end{array}$$

La conclusion s'ensuit aussitôt.
ii) $B_1 \setminus B_2$ s'il contient B_1 et B_2 et si on a $B_1 \supset B_2$. De fait, pour toute partie A de X, il vient successivement

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(A) & = & \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \setminus B_1) \\ & = & \mu^*((A \cap B_1) \cap B_2) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_2) + \mu^*(A \setminus B_1) \\ & \underset{(*)}{\geq} & \mu^*(A \cap (B_1 \setminus B_2)) + \mu^*(A \setminus (B_1 \setminus B_2)) \quad \geq \quad \mu^*(A) \end{array}$$

(en $(*)$, on note que $(A\cap B_1)\setminus B_2 = A\cap(B_1\setminus B_2)$ et on applique 4) aux deux autres termes).
iii) $\cup_{m=1}^{\infty} B_m$ s'il contient chacun des B_m et si les B_m sont disjoints deux à deux. Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(A) & = & \mu^*(A\cap B_1) + \mu^*(A\setminus B_1) \quad = \quad \ldots \\ & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{M} \mu^*(A\cap B_m) + \mu^*(A\setminus(\cup_{m=1}^{M} B_m)) \end{array}$$

donc

$$\mu^*(A) \geq \sum_{m=1}^{M} \mu^*(A\cap B_m) + \mu^*(A\setminus(\cup_{m=1}^{\infty} B_m)).$$

Par conséquent, on a aussi

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(A) & \geq & \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A\cap B_m) + \mu^*(A\setminus(\cup_{m=1}^{\infty} B_m)) \\ & \geq & \mu^*(A\cap(\cup_{m=1}^{\infty} B_m)) + \mu^*(A\setminus(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) \quad \geq \quad \mu^*(A), \end{array}$$

ce qui suffit pour conclure.
6) $\mu^*(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(B_m)$ si les B_m sont des parties boréliennes et deux à deux disjointes de X. Vu 4), nous avons déjà l'inégalité "$\leq$". De plus, vu 5), nous avons aussi

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) & = & \mu^*(B_1) + \mu^*(\cup_{m=2}^{\infty} B_m) \quad = \quad \ldots \\ & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{M} \mu^*(B_m) + \mu^*(\cup_{m=M+1}^{\infty} B_m) \end{array}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ donc

$$\mu^*(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(B_m),$$

ce qui suffit.
7) pour tout compact K de X et tout $f \in \mathrm{D}_0(X)$ tels que $\chi_K \leq f$, on a $\mu^*(K) \leq \langle f, \mathcal{T}\rangle$. De fait, pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$, $\Omega_\varepsilon = f^{-1}(]1-\varepsilon, +\infty[)$ est un ouvert relativement compact de X et, pour tout $g \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que $0 \leq g \leq \chi_{\Omega_\varepsilon}$, il vient $g \leq f/(1-\varepsilon)$ donc $\mu^*(\Omega_\varepsilon) \leq \langle f, \mathcal{T}\rangle/(1-\varepsilon)$ et, par conséquent $\mu^*(K) \leq \langle f, \mathcal{T}\rangle$.
8) pour tout compact K de X et tout $f \in \mathrm{D}_0(X)$ tels que $0 \leq f \leq \chi_K$, on a $\langle f, \mathcal{T}\rangle \leq \mu^*(K)$. De fait, pour tout ouvert Ω de X contenant K, on a nécessairement

$\langle f, \mathcal{T} \rangle \leq \mu^*(\Omega)$.

Etude de $\mu_{\mathcal{T}}$.

a) *Définition de $\mu_{\mathcal{T}}$.* Introduisons la fonction

$$\mu_{\mathcal{T}} \colon \mathcal{B}_c(X) \to [0, +\infty[\cup \{+\infty\} \quad B \mapsto \mu^*(B).$$

b) *Propriétés de $\mu_{\mathcal{T}}$.* Vu ce qui précède, $\mu_{\mathcal{T}}$ est une mesure c-borélienne positive car $\mu_{\mathcal{T}}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$ et est dénombrablement additif.

Mais on a aussi:

1) une partie borélienne B de X est $\mu_{\mathcal{T}}$-intégrable si et seulement si on a $\mu^*(B) < \infty$, auquel cas $\mu_{\mathcal{T}}(B)$ est égal à $\mu^*(B)$. Toute partie borélienne B est réunion dénombrable de parties boréliennes deux à deux disjointes et relativement compactes; soit $B = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$. Cela étant, vu b.6), il vient $\mu^*(B) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(B_m)$ et, vu le théorème de la convergence monotone $\mu_{\mathcal{T}}(B) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{T}}(B_m)$, ce qui suffit pour conclure.

2) $\mu_{\mathcal{T}}$ est une mesure régulière. D'une part, pour toute partie borélienne et $\mu_{\mathcal{T}}$-intégrable B, il vient successivement

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{T}}(B) = \mu^*(B) &= \inf \{ \mu^*(\Omega) : \Omega \supset B, \Omega \text{ ouvert} \} \\ &= \inf \{ \mu^*(\Omega) : \Omega \supset B, \Omega \text{ ouvert}, \mu^*(\Omega) < \infty \} \\ &= \inf \{ \mu_{\mathcal{T}}(\Omega) : \Omega \supset B, \Omega \text{ ouvert } \mu_{\mathcal{T}}\text{-intégrable} \}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout ouvert $\mu_{\mathcal{T}}$-intégrable Ω de X, il est clair que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{T}}(\Omega) = \mu^*(\Omega) &\geq \sup \{ \mu^*(K) : K \text{ compact}, K \subset \Omega \} \\ &\geq \sup \{ \mu_{\mathcal{T}}(K) : K \text{ compact}, K \subset \Omega \}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X;\mathbb{R})$ tel que $0 \leq f \leq \chi_\Omega$ et $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$, on a $\langle f, \mathcal{T} \rangle \leq \mu^*(\omega)$ pour tout ouvert ω contenant $\mathrm{supp}(f)$ donc $\langle f, \mathcal{T} \rangle \leq \mu^*(\mathrm{supp}(f)) = \mu_{\mathcal{T}}(\mathrm{supp}(f))$. Dès lors, on a aussi

$$\begin{aligned} &\mu_{\mathcal{T}}(\Omega) = \mu^*(\Omega) \\ &\quad = \sup \{ \langle f, \mathcal{T} \rangle : f \in \mathrm{D}_0(X;\mathbb{R}), 0 \leq f \leq \chi_\Omega, \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \} \\ &\quad \leq \sup \{ \mu_{\mathcal{T}}(K) : K \text{ compact}, K \subset \Omega \}, \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure.

c) *Vérification.* On a $\langle f, \mathcal{T} \rangle = \int f \, d\mu_{\mathcal{T}}$ pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X;\mathbb{R})$. Vu la décomposition canonique $f = f_+ - f_-$ de tout élément f de $\mathrm{D}_0(X;\mathbb{R})$ en fonctions positives, il suffit d'établir que

$$\langle f, \mathcal{T} \rangle = \int f \, d\mu_{\mathcal{T}}, \quad \forall f \in \mathrm{D}_0(X; [0, +\infty[).$$

Soit $f \in \mathrm{D}_0(X; [0, +\infty[)$. Si f est égal à 0, c'est trivial. Sinon on procède comme suit. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m} \sup \{ f(x) : x \in X \}$$

et, pour tout $n \in \{1, \ldots, m\}$, introduisons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f_{m,n} & = & \inf\{\sup\{f - (n-1)\varepsilon_m, 0\}, \varepsilon_m\} \, : \; X \to [0, \varepsilon_m] \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } f(x) \leq (n-1)\varepsilon_m \\ f(x) - (n-1)\varepsilon_m & \text{si } (n-1)\varepsilon_m \leq f(x) \leq n\varepsilon_m \\ \varepsilon_m & \text{si } n\varepsilon_m \leq f(x) \end{array} \right. \end{array}$$

et le compact

$$K_{m,n} = \{ x \in X : f(x) \geq n\varepsilon_m \} .$$

En outre, posons $K_{m,0} = \mathrm{supp}(f)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $n \in \{1, \ldots, m\}$, comme nous avons bien sûr

$$\varepsilon_m \chi_{K_{m,n}} \leq f_{m,n} \leq \varepsilon_m \chi_{K_{m,n-1}},$$

il vient

$$\varepsilon_m \mu_{\mathcal{T}}(K_{m,n}) \leq \int f_{m,n} \, d\mu_{\mathcal{T}} \leq \varepsilon_m \mu_{\mathcal{T}}(K_{m,n-1})$$

et

$$\varepsilon_m \mu_{\mathcal{T}}(K_{m,n}) \leq \langle f_{m,n}, \mathcal{T} \rangle \leq \varepsilon_m \mu_{\mathcal{T}}(K_{m,n-1}).$$

Dès lors, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, de $f = \sum_{n=1}^{m} f_{m,n}$, nous tirons aussitôt

$$\varepsilon_m \sum_{n=1}^{m} \mu_{\mathcal{T}}(K_{m,n}) \leq \left\{ \begin{array}{c} \int f \, d\mu_{\mathcal{T}} \\ \langle f, \mathcal{T} \rangle \end{array} \right\} \leq \varepsilon_m \sum_{n=0}^{m-1} \mu_{\mathcal{T}}(K_{m,n})$$

donc

$$\left| \int f \, d\mu_{\mathcal{T}} - \langle f, \mathcal{T} \rangle \right| \leq \varepsilon_m \mu_{\mathcal{T}}(\mathrm{supp}(f)).$$

La conclusion s'ensuit aussitôt.∎

Notation. Si X est un espace localement compact séparé, $\mathrm{C}_{0,0}(X)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions f continues sur X qui tendent vers 0 à l'infini (c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X \setminus K$), muni de la norme $\|\cdot\|_X$.

Théorème 5.4.3 *Si X est un espace localement compact séparé, alors $\mathrm{C}_{0,0}(X)$ est un espace de Banach dont $\mathrm{D}_0(X)$ est un sous-espace vectoriel dense.*

Preuve. D'une part, l'espace normé $\mathrm{C}_{0,0}(X)$ est de Banach. De fait, si la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans cet espace, il s'agit d'une suite uniformément de Cauchy sur X, constituée de fonctions continues sur X. Il existe donc $f_0 \in \mathrm{C}_0(X)$ tel que $f_m \rightrightarrows_X f_0$. Pour conclure, il suffit d'établir que f_0 tend vers 0 à l'infini. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|f_M - f_0\|_X \leq \varepsilon/2$ puis un compact K de X tel que $\|f_M\|_{X\setminus K} \leq \varepsilon/2$. On a alors $\|f\|_{X\setminus K} \leq \varepsilon$, ce qui suffit.

D'autre part, $\mathrm{D}_0(X)$ est dense dans $\mathrm{C}_{0,0}(X)$ car, pour tout $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que $\|f\|_{X\setminus K} \leq \varepsilon$ puis $g \in \mathrm{D}_0(X)$ tel que $\chi_K \leq g \leq \chi_X$ donc tels que $\|f - fg\|_X = \|f - fg\|_{X\setminus K} \leq \varepsilon$.∎

Théorème 5.4.4 (représentation, Riesz) *Soit X un espace localement compact séparé.*

a) *Pour toute mesure borélienne régulière μ sur X,*

$$\mathcal{T}_\mu \colon \mathrm{C}_{0,0}(X) \to \mathbb{C} \quad f \mapsto \int f\, d\mu$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathrm{C}_{0,0}(X)$ *telle que* $\|\mathcal{T}_\mu\| \leq V\mu(X)$ (et même telle que $\|\mathcal{T}_\mu\| = V\mu(X)$, vu b)).

b) *Pour toute fonctionnelle linéaire continue $\mathcal{T}$ sur* $\mathrm{C}_{0,0}(X)$, *il existe une et une seule mesure borélienne régulière $\mu_{\mathcal{T}}$ telle que $\langle \cdot, \mathcal{T}\rangle = \int \cdot\, d\mu_{\mathcal{T}}$ et $\|\mathcal{T}\| = V\mu_{\mathcal{T}}(X)$.*

c) *Au total, si on désigne par*
i) $\mathrm{M}(X)$ *l'espace linéaire des mesures boréliennes régulières sur X, muni de la norme $V\cdot(X)$,*
ii) $\mathrm{C}_{0,0}(X)'_b$ *le dual fort de* $\mathrm{C}_{0,0}(X)$, *c'est-à-dire l'espace vectoriel des fonctionnelles linéaires continues sur* $\mathrm{C}_{0,0}(X)$, *muni de la norme*

$$\sup\{\, |\langle f, \cdot\rangle| : f \in \mathrm{C}_{0,0}(X), \|f\| \leq 1 \,\},$$

alors l'application

$$T \colon \mathrm{M}(X) \to \mathrm{C}_{0,0}(X)^*_b \quad \mu \mapsto \mathcal{T}_\mu$$

est une isométrie.

d) *De plus,*

i) $\mathcal{T}$ *est réel si et seulement si μ l'est,*

ii) $\mathcal{T}$ *est positif si et seulement si μ l'est,*

i) $\mathcal{T}$ *est égal à* 0 *si et seulement si μ l'est.*

Preuve. a) est direct.

b) Nous allons procéder en plusieurs étapes.

b.1) Les fonctionnelles $\Re\mathcal{T}$ et $\Im\mathcal{T}$ définies par

$$\left.\begin{array}{l}\Re\mathcal{T}\\ \Im\mathcal{T}\end{array}\right\}: \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \left\{\begin{array}{c}\Re\\ \Im\end{array}\right\}\langle f, \mathcal{T}\rangle$$

sont des fonctionnelles linéaires, réelles et continues sur $\mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$ telles que

$$\langle f, \mathcal{T}\rangle = \langle \Re f, \Re\mathcal{T}\rangle - \langle \Im f, \Im\mathcal{T}\rangle + i\,\langle \Re f, \Im\mathcal{T}\rangle + i\,\langle \Im f, \Re\mathcal{T}\rangle$$

pour tout $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X)$.

b.2) Pour toute fonctionnelle linéaire réelle et continue $\mathcal{T}$ sur $\mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$, prouvons qu'il existe des fonctionnelles linéaires continues et positives $\mathcal{T}_+$ et $\mathcal{T}_-$ sur $\mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ - \mathcal{T}_-$.

Pour toute fonction positive $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$, posons

$$t_+(f) = \sup\{\,\langle g, \mathcal{T}\rangle : g \in \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R}), 0 \le g \le f\,\}.$$

Il est clair que

$$0 \le t_+(f) \le \|f\|\,\|\mathcal{T}\|\,, \quad \forall f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;[0,+\infty[),$$

et

$$t_+(rf) = rt_+(f), \quad \forall f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;[0,+\infty[), \forall r > 0.$$

Prouvons qu'on a aussi

$$t_+(f_1 + f_2) = t_+(f_1) + t_+(f_2)$$

pour tous f_1, $f_2 \in \mathrm{C}_{0,0}(X;[0,+\infty[)$. D'une part, pour tous g_1, $g_2 \in \mathrm{C}_{0,0}(X;[0,+\infty[)$ tels que $0 \le g_1 \le f_1$ et $0 \le g_2 \le f_2$, on a bien sûr $0 \le g_1 + g_2 \le f_1 + f_2$, ce qui entraîne déjà l'inégalité "$\ge$". D'autre part, si $g \in \mathrm{C}_{0,0}(X,[0,+\infty[)$ vérifie $0 \le g \le f_1 + f_2$, posons $g_1 = \inf\{f_1, g\}$ et $g_2 = g - g_1$. Il est clair que g_1 et g_2 appartiennent à $\mathrm{C}_{0,0}(X;[0,+\infty[)$ et vérifient $0 \le g_1 \le f_1$ et $0 \le g_2 \le f_2$. Il vient donc

$$\langle g, \mathcal{T}\rangle = \langle g_1, \mathcal{T}\rangle + \langle g_2, \mathcal{T}\rangle \le t_+(f_1) + t_+(f_2)$$

et, par conséquent l'inégalité "$\le$".

Cela étant, établissons que

$$\mathcal{T}_+ : \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto t_+(f_+) - t_+(f_-)$$

est une fonctionnelle linéaire positive et continue.

Sa positivité est claire.

Etablissons que $\langle rf, \mathcal{T}_+\rangle = r\,\langle f, \mathcal{T}_+\rangle$ a lieu pour tous $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}$. Pour $r = 0$, c'est trivial par définition; pour $r > 0$, on a $(rf)_+ = rf_+$ et $(rf)_- = rf_-$, et cela résulte aussitôt des propriétés de t_+; pour $r < 0$, on a $(rf)_+ = -rf_-$ et $(rf)_- = -rf_+$, et cela résulte aussi des propriétés de t_+.

Pour tous éléments $f_1,\ f_2 \in \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$, on a aussi

$$\langle f_1 + f_2, \mathcal{T}_+\rangle = \langle f_1, \mathcal{T}_+\rangle + \langle f_2, \mathcal{T}_+\rangle$$

car, de

$$(f_1 + f_2)_+ - (f_1 + f_2)_- = f_1 + f_2 = (f_{1,+} + f_{2,+}) - (f_{1,-} + f_{2,-}),$$

on tire en effet

$$(f_1 + f_2)_+ + f_{1,-} + f_{2,-} = (f_1 + f_2)_- + f_{1,+} + f_{2,+}$$

donc

$$\begin{aligned} &\langle (f_1 + f_2)_+, \mathcal{T}_+\rangle + \langle f_{1,-}, \mathcal{T}_+\rangle + \langle f_{2,-}, \mathcal{T}_+\rangle \\ &\quad = \ \langle (f_1 + f_2)_-, \mathcal{T}_+\rangle + \langle f_{1,+}, \mathcal{T}_+\rangle + \langle f_{2,+}, \mathcal{T}_+\rangle\,, \end{aligned}$$

ce qui suffit.

Enfin, pour tout $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$, on a

$$|\langle f, \mathcal{T}_+\rangle| \leq t_+(f_+ + f_-) = t_+(|f|) \leq \|f\|\,\|T\|\,.$$

Dès lors, $\mathcal{T}_- = \mathcal{T}_+ - \mathcal{T}$ est aussi une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$. De plus, $\mathcal{T}_-$ est aussi une fonctionnelle positive car, pour tout $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;[0,+\infty[)$, on a $\langle f, \mathcal{T}\rangle \leq t_+(f)$. Enfin, pour tout $f \in \mathrm{C}_{0,0}(X;\mathbb{R})$, on a certainement $|\langle f, \mathcal{T}_-\rangle| \leq 2\,\|f\|\,\|\mathcal{T}\|$ (en fait, on peut même établir que $|\langle f, \mathcal{T}_-\rangle| \leq \|f\|\,\|\mathcal{T}\|$).

b.3) Pour toute fonctionnelle linéaire positive $\mathcal{Q}$ sur $\mathrm{D}_0(X;\mathbb{R})$ telle que

$$\|\mathcal{Q}\| = \sup\{\,|\langle f, \mathcal{Q}\rangle| : f \in \mathrm{D}_0(X;\mathbb{R}), \|f\| \leq 1\,\}$$

soit fini, il existe une et une seule mesure positive, borélienne et régulière $\mu_{\mathcal{Q}}$ sur X telle que

$$\langle \cdot, \mathcal{Q}\rangle = \int \cdot\, d\mu \text{ sur } \mathrm{D}_0(X;\mathbb{R}).$$

Pour établir cet énoncé, il suffit de reprendre, tout en la simplifiant, la preuve du premier théorème de représentation de Riesz. L'unicité de $\mu_{\mathcal{Q}}$ ne pose aucun problème. La construction de $\mu_{\mathcal{Q}}$ se fait comme suit. On définit μ^* de la même manière mais on remarque que $\mu^*(\Omega)$ est fini pour tout ouvert Ω de X donc que

$\mu^*(A)$ est fini pour toute partie A de X. Les propriétés de μ^* peuvent être reprise telles quelles. On vérifie ensuite sans problème que

$$\mu_{\mathcal{Q}} : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C} \quad B \mapsto \mu^*(B)$$

convient.

b.4) Vu 1), 2) et 3), il existe des mesures positives, boréliennes et régulières μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 sur X telles que

$$\langle f, \Re \mathcal{T} \rangle = \int f \, d\mu_1 - \int f \, d\mu_2 \quad \text{et} \quad \langle f, \Im \mathcal{T} \rangle = \int f \, d\mu_3 - \int f \, d\mu_4$$

pour tout $f \in \mathrm{D}_0(X; \mathbb{R})$.

b.5) Les formules de représentation établies en b.4) sont valables pour tous les éléments de $\mathrm{C}_{0,0}(X; \mathbb{R})$.

Soit f un élément de $\mathrm{C}_{0,0}(X; \mathbb{R})$. Vu la densité de $\mathrm{D}_0(X; \mathbb{R})$ dans cet espace, il existe une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathrm{D}_0(X; \mathbb{R})$ qui converge uniformément sur X vers f donc telle que la suite $\langle f_m, \mathcal{T} \rangle$ converge vers $\langle f, \mathcal{T} \rangle$ mais aussi telle que $\int f_m \, d\mu_{\mathcal{T}} \to \int f \, d\mu_{\mathcal{T}}$ si on définit la mesure $\mu_{\mathcal{T}}$ comme étant égale à $\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$.

b.6) Cela étant, la formule établie en b.1) donne aussitôt lieu à la formule de représentation

$$\langle \cdot, \mathcal{T} \rangle = \int \cdot \, d\mu_{\mathcal{T}} \text{ sur } \mathrm{C}_{0,0}(X).$$

b.7) Passons à la vérification des propriétés de $\mu_{\mathcal{T}}$.

i) On a $\|\mathcal{T}\| = V\mu_{\mathcal{T}}(X)$. L'inégalité "$\leq$" est connue, vu a). Inversement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition borélienne finie $\{B_1, \ldots, B_J\}$ de X telle que

$$V\mu_{\mathcal{T}}(X) < \sum_{j=1}^{J} |\mu_{\mathcal{T}}(B_j)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

puis des compacts $K_1, \ldots, K_J$ inclus respectivement dans $B_1, \ldots, B_J$ et tels que

$$V\mu_{\mathcal{T}}(X) < \sum_{j=1}^{J} |\mu_{\mathcal{T}}(K_j)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quitte à éliminer certains de ces K_j, nous pouvons supposer avoir $\mu_{\mathcal{T}}(K_j) \neq 0$ pour tout $j \leq J$. Cela étant, nous savons qu'il existe un élément f de $\mathrm{D}_0(X)$ tel que $\|f\| \leq 1$ et

$$f(x) = \frac{\overline{\mu_{\mathcal{T}}(K_j)}}{|\mu_{\mathcal{T}}(K_j)|}, \quad \forall x \in K_j, \quad \forall j \leq J.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu_{\mathcal{T}}\right| &\geq \left|\sum_{j=1}^{J}\int_{K_j} f\,d\mu_{\mathcal{T}}\right| - V\mu_{\mathcal{T}}(X\setminus(\cup_{j=1}^{J}K_j))\\ &\geq \sum_{j=1}^{J}|\mu_{\mathcal{T}}(K_j)| - \frac{\varepsilon}{2} \quad\geq\quad V\mu_{\mathcal{T}}(X)-\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure.
ii) L'unicité de $\mu_{\mathcal{T}}$ résulte aussitôt du critère 5.3.10.
c) Les autres propriétés de $\mu_{\mathcal{T}}$ sont alors immédiates.
d) résulte aussitôt lui aussi du critère 5.3.10.∎

5.5 Produit de mesures boréliennes régulières

Proposition 5.5.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés.*
L'ensemble

$$\mathcal{A} = \{\, A\times B : A\in\mathcal{B}(X), B\in\mathcal{B}(Y)\,\}$$

est un semi-anneau sur $X\times Y$.

Si $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des parties $\mathcal{A}$-boréliennes et $\mathcal{B}_c$ celui des éléments relativement compacts de $\mathcal{B}$, on a les propriétés suivantes:

a) *$\mathcal{B}\subset\mathcal{B}(X\times Y)$ et $\mathcal{B}_c\subset\mathcal{B}_c(X\times Y)$.*

b) *pour tout $B\in\mathcal{B}(X\times Y)$ et tout $y\in Y$, on a*

$$\{\, x\in X : (x,y)\in B\,\}\in\mathcal{B}(X).$$

c) *pour toute fonction borélienne f sur $X\times Y$ et tout $y\in Y$, $f(\cdot,y)$ est une fonction borélienne sur X.*

Preuve. Nous savons déjà que $\mathcal{A}$ est un semi-anneau sur $X\times Y$.

a) Il suffit bien sûr d'établir que $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{B}(X\times Y)$. Soient $A\in\mathcal{B}(X)$ et $B\in\mathcal{B}(Y)$. Comme les projections

$$\begin{aligned}\pi_1\colon X\times Y\to X &\qquad (x,y)\mapsto x,\\ \pi_2\colon X\times Y\to Y &\qquad (x,y)\mapsto y\end{aligned}$$

sont des application continues, $\pi_1^{-1}(A)=A\times Y$ et $\pi_2^{-1}(B)=X\times B$ appartiennent à $\mathcal{B}(X\times Y)$. D'où la conclusion car on a $A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)$.

b) Pour tout $y\in Y$, l'application

$$\phi_y\colon X\to X\times Y \quad x\mapsto(x,y)$$

est bien sûr continue. Cela étant, il suffit de noter que, pour toute partie B de $X \times Y$, on a

$$\{ x \in X : (x, y) \in B \} = \phi_y^{-1}(B).$$

c) De fait, l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{F}(X \times Y)$ telles que, pour tout $y \in Y$, $f(\cdot, y)$ soit une fonction borélienne sur X contient toutes les fonctions $\mathcal{B}(X \times Y)$-étagées vu b) ainsi que la limite de toutes ses suites ponctuellement convergentes, comme on le vérifie de suite.∎

Remarque. Avec les notations de l'énoncé précédent, on peut avoir $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}(X \times Y)$ et $\mathcal{B}_c \neq \mathcal{B}_c(X \times Y)$.□

Théorème 5.5.2 *Soient X et Y deux espaces localement compacts séparés admettant chacun une base dénombrable de topologie.*

a) *Avec les notations introduites dans l'énoncé précédent, il vient $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X \times Y)$ et $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}_c(X \times Y)$.*

b) *Si μ et ν sont des mesures* [c-]*boréliennes régulières sur X et Y respectivement, alors $\mu \times \nu$ est équivalent à une mesure* [c-]*régulière sur $X \times Y$.*

Preuve. a) Vu ce qui précède, il suffit d'établir que $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}$. Désignons par $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ une base dénombrable de topologie de X et Y respectivement. Posons

$$\mathcal{W} = \{ U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \};$$

il est clair que $\mathcal{W}$ est une base de topologie de $X \times Y$ et que $\mathcal{W}$ est dénombrable. Il s'ensuit que tout ouvert de $X \times Y$ est réunion (forcément dénombrable) d'éléments de $\mathcal{W}$ donc appartient à $\mathcal{B}$. La conclusion est alors immédiate car $\mathcal{B}$ contient par conséquent $\Omega \cap F$ pour tout ouvert Ω et tout fermé F de $X \times Y$.

b) Il est clair que $\mu \times \nu$ est équivalent à une mesure [c-]borélienne sur $X \times Y$. D'où la conclusion au moyen des exemples privilégiés de mesures boréliennes régulières.∎

Chapitre 6

Intégration sur un espace euclidien

Préambule. Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, Ω désigne un ouvert non vide de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Il s'agit donc d'un espace localement compact séparé ayant une base de topologie dénombrable.

Cela étant, remarquons que les fonctions (resp. les parties) boréliennes coïncident avec les fonctions (resp. les parties) $\mathcal{SI}(\Omega)$-boréliennes: de fait, d'une part, on a bien sûr $\mathcal{SI}(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$ car tout semi-intervalle dans Ω est l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée de Ω et, d'autre part, toute partie ouverte de Ω est réunion dénombrable de semi-intervalles dans Ω.

Par conséquent, toute mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{SI}(\Omega))$ est c-borélienne régulière sur Ω et même une mesure borélienne régulière sur Ω si Ω est μ-intégrable.

Au total, nous avons déjà une ample connaissance des mesures sur $(\Omega, \mathcal{SI}(\Omega))$ que, afin de simplifier un peu le vocabulaire, nous allons appeler *mesures sur* Ω, une mesure *finie sur* Ω étant une mesure sur Ω pour laquelle Ω est intégrable.

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés remarquables des mesures sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

6.1 Interprétation de Riemann

Théorème 6.1.1 *Soient μ une mesure [c-]borélienne sur l'espace métrique X et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite strictement positive qui tend vers 0.*

Si les conditions suivantes sont réalisées:

a) *A est une partie μ-intégrable de X,*

b) *pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\{ A_{m,k} : k \in \mathbb{N}_0, k \leq K(m) \}$ est une partition dénombrable* (on a donc $K(m) \in \mathbb{N}_0$ ou $K(m) = \infty$) *de A en parties μ-mesurables telles que* $\operatorname{diam}(A_{m,k}) \leq \varepsilon_m$ *pour tout $k \leq K(m)$,*

c) *pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $k \leq K(m)$, $x_{m,k}$ est un élément de $A_{m,k}^{-} \cap A$,*

d) *f est une fonction continue et bornée sur A,*
alors $f\chi_A$ est une fonction μ-intégrable et

$$\int f\chi_A \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{m,k})\mu(A_{m,k}).$$

Preuve. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_m = \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{m,k})\chi_{A_{m,k}}.$$

On vérifie directement que la suite f_m est constituée de fonctions μ-mesurables et converge μ-pp vers $f\chi_A$. De plus, on a bien sûr $|f_m| \leq \|f\|_A \chi_A$. Dès lors, vu le théorème de la convergence majorée, $f\chi_A$ est une fonction μ-intégrable telle que $\int f_m \, d\mu \to \int f\chi_A \, d\mu$.

Pour conclure, il suffit alors de vérifier que

$$\int f_m \, d\mu = \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{m,k})\mu(A_{m,k}), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $K(m) \in \mathbb{N}_0$, c'est trivial. Si $m \in \mathbb{N}_0$ est tel que $K(m) = \infty$, cela résulte aussitôt d'une deuxième application du théorème de la convergence majorée appliqué à la suite

$$\left(g_{m,K} = \sum_{k=1}^{K} f(x_{m,k})\chi_{A_{m,k}} \right)_{K\in\mathbb{N}_0},$$

comme on le vérifie de suite.∎

Remarque. L'idée de la preuve du résultat suivant est incluse dans la démonstration du théorème précédent. Elle peut être généralisée.

Proposition 6.1.2 *Si μ est une mesure [c-]borélienne sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et si A est une partie μ-mesurable de Ω, alors, pour tout $f \in \mathrm{C}_0(A)$, $f\chi_A$ est une fonction μ-mesurable.*

Preuve. Comme A est une partie μ-mesurable de l'ouvert Ω, il existe une suite $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de parties $\mathcal{SI}(\Omega)$-étagées telle que la suite χ_{Q_m} converge μ-pp vers χ_A. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble Q_m est égal à une union finie $Q_m = \cup_{k=1}^{K(m)} I_{m,k}$ de semi-intervalles dans Ω que nous pouvons supposer deux à deux disjoints et tels que

$\operatorname{diam}(I_{m,k}) \leq 10^{-m}$ et $I_{m,k} \cap A \neq \emptyset$ pour tout $k \leq K(m)$. Il suffit alors de choisir un point $x_{m,k}$ dans chacun de ces ensembles $I_{m,k} \cap A$ et de vérifier que la suite

$$f_m = \sum_{k=1}^{K(m)} f(x_{k,m}) \chi_{I_{m,k}}$$

est constituée de fonctions μ-mesurables dans Ω et converge μ-pp vers $f\chi_A$.∎

6.2 Caractérisation des mesures sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

Remarques. Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

a) Soit μ une mesure sur $]a,b[$. Pour tout $r \in]a,b[$, définissons la fonction $f_{\mu,r}$ sur $]a,b[$ par

$$f_{\mu,r}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\mu(]x,r]) & \text{si } x < r \\ 0 & \text{si } x = r \\ \mu(]r,x]) & \text{si } x > r \end{array} \right\}.$$

En fait, ces fonctions ne diffèrent que par une constante additive car si r et s appartiennent à $]a,b[$ et sont tels que $r < s$, on a bien sûr $f_{\mu,r} = f_{\mu,s} + \mu(]r,s])$. De plus, la connaissance d'une de ces fonctions détermine μ car on a

$$\mu(]c,d]) = f_{\mu,r}(d) - f_{\mu,r}(c)$$

pour tout semi-intervalle $]c,d]$ dans $]a,b[$. Enfin, vu les propriétés de μ, il est clair que
1) $f_{\mu,r}$ est une fonction continue à droite sur $]a,b[$: c'est une conséquence directe du théorème de la convergence majorée,
2) pour tout découpage fini $[c_0,\ldots,c_J]$ de l'intervalle compact $[c,d]$ de $]a,b[$ (c'est-à-dire que $J \in \mathbb{N}_0$ et $c = c_0 < \ldots < c_J = d$), on a

$$\sum_{j=1}^{J} |f_{\mu,r}(c_j) - f_{\mu,r}(c_{j-1})| = \sum_{j=1}^{J} |\mu(]c_{j-1},c_j])| \leq V\mu(]c,d]).$$

b) Si f est une fonction sur $]a,b[$, il est clair que

$$\mu_f \colon \mathcal{SI}(]a,b[) \to \mathbb{C} \quad \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto 0 \\ ]c,d] \mapsto f(d) - f(c) \end{array} \right.$$

est une application finiment additive sur $\mathcal{SI}(]a,b[)$. Cependant comme, avec des notations claires par elles-mêmes, on a $\mu_{f_\mu} = \mu$, il est clair que μ_f n'est pas nécessairement une mesure sur $]a,b[$.

c) Dans ce paragraphe, nous allons établir que les conditions 1) et 2) mises en évidence en a) constituent une condition nécessaire et suffisante sur f pour que μ_f soit une mesure sur $]a,b[$. La condition 1) est bien connue; dans un premier temps, étudions la condition 2).

6.2.1 Fonctions à variation finie

Définition. Une fonction f définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ *a une variation finie sur I* si

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J} |f(a_j) - f(a_{j-1})| : [a_0, \ldots, a_J] \in \mathcal{D} \right\}$$

est un borné de $\mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des découpages finis des intervalles compacts inclus dans I.

Dans ce cas,

a) *la variation de f sur I* est la borne supérieure de cet ensemble; elle est notée $V_f(I)$,

b) on vérifie de suite que

$$(a, b, c \in I, a < b < c) \Longrightarrow V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c]),$$

c) il est clair que f est une fonction bornée sur I.

Critère 6.2.1 a) *Une fonction f définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ a une variation finie sur I si et seulement s'il existe des fonctions réelles, bornées et croissantes f_1, f_2, f_3 et f_4 sur I telles que $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$.*

b) *Une fonction f définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ a une variation finie sur tout intervalle compact inclus dans I si et seulement s'il existe des fonctions réelles et croissantes f_1, f_2, f_3 et f_4 sur I telles que $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$.*

Dans chacun de ces deux énoncés, si en outre f est continu (resp. *continu à droite; continu à gauche*) *en $r \in I$, on peut exiger qu'il en soit de même pour chacune des fonctions f_j.*

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir ce critère dans le cas où f est une fonction réelle sur I car le cas d'une fonction non réelle g sur I s'en déduit aussitôt en recourant à $\Re g$ et $\Im g$. Supposons donc f à valeurs réelles.

La condition est évidemment suffisante.

La condition est nécessaire. Fixons un point r de I, définissons la fonction f_1 sur I par

$$f_1(x) = \begin{cases} -V_f([x, r]) & \text{si } x < r \\ 0 & \text{si } x = r \\ V_f([r, x]) & \text{si } x > r \end{cases}$$

et posons $f_2 = f_1 - f$. Il est alors certain que f_1 est une fonction réelle et croissante sur I qui, dans le cas a), est bornée sur I. Il est aussi clair que f_2 est une fonction réelle sur I qui, dans le cas a), est bornée sur I. De plus, f_2 est une fonction croissante sur I car, pour tous x, $y \in I$ tels que $x < y$, il vient successivement

$$\begin{aligned} f_2(y) - f_2(x) &= (f_1(y) - f_1(x)) - (f(y) - f(x)) \\ &= V_f([x,y]) - (f(y) - f(x)) \quad \geq \quad 0. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

Pour conclure, il suffit de prouver que, si f est continu à droite (resp. à gauche) en $s \in I$, alors il en est de même pour f_1. Etablissons le cas de la continuité à droite; celui de la continuité à gauche s'établit de même. Bien sûr, nous pouvons choisir $r = s$ et fixer un point $t \in I$ tel que $t > r$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ensuite un découpage fini $[a_0, \ldots, a_J]$ de $[r, t]$ tel que

$$V_f([r,t]) \leq \sum_{j=1}^{J} |f(a_j) - f(a_{j-1})| + \frac{\varepsilon}{2}$$

puis, vu la continuité à droite de f, $b_1 \in]r, a_1[$ tel que

$$|f(b_1) - f(r)| \leq \varepsilon/2.$$

Cela étant, pour tout découpage fini $[c_0, \ldots, c_K]$ de $[r, b_1]$,
1) d'une part, $[c_0, \ldots, c_K, a_1, \ldots, a_J]$ est un découpage fini de $[r, t]$ et

$$\sum_{k=1}^{K} |f(c_k) - f(c_{k-1})| + |f(a_1) - f(c_K)| + \sum_{j=2}^{J} |f(a_j) - f(a_{j-1})| \leq V_f([r,t]),$$

2) d'autre part, $[r, b_1, a_1, \ldots, a_J]$ est un découpage fini de $[r, t]$, qui est plus fin que $[a_0, \ldots, a_J]$; on a donc

$$V_f([r,t]) \leq |f(b_1) - f(r)| + |f(a_1) - f(b_1)| + \sum_{j=2}^{J} |f(a_j) - f(a_{j-1})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Au total, comme on a $c_K = b$, il vient

$$\sum_{k=1}^{K} |f(c_k) - f(c_{k-1})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(b_1) - f(r)| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit pour conclure.∎

Théorème 6.2.2 *L'ensemble des fonctions à variation finie sur* (resp. *sur tout intervalle compact inclus dans*) *l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *est une sous-algèbre de* $\mathrm{F}(X)$.

Preuve. Pour établir qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{F}(X)$, c'est direct. Pour conclure, il suffit alors de noter que si f et g sont deux fonctions à variation finie sur I, alors, pour tous $J \in \mathbb{N}_0$ et $x_0, \ldots, x_J \in I$ tels que $x_0 < \ldots < x_J$, il vient successivement

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{J} |f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})| \\
&\leq \sum_{j=1}^{J} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \cdot |g(x_j)| + \sum_{j=1}^{J} |f(x_{j-1})| \cdot |g(x_j) - g(x_{j-1})| \\
&\leq V_f(I) \cdot \|g\|_I + \|f\|_I \cdot V_g(I). \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque. Une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ n'a pas nécessairement une variation finie sur tout intervalle compact inclus dans I. Ainsi on vérifiera aisément que la fonction linéaire par morceaux définie sur $[0,1]$ par les valeurs $f(0) = 0$ et $f(1/m) = (-1)^{m+1}/m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ est continue sur $[0,1]$ mais n'a pas une variation finie sur $[0,1]$. Cependant on a le résultat suivant.$\square$

Exemple. *Si f est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et si $\mathrm{D}f$ est une fonction ℓ-intégrable sur $]a,b[$, alors f a une variation finie sur $]a,b[$ égale à $\int_a^b |\mathrm{D}f|\,dx$.* D'une part, pour tout découpage fini $[r_0, \ldots, r_J]$ d'un intervalle compact $[r,s]$ inclus dans $]a,b[$, il vient

$$\sum_{j=1}^{J} |f(r_j) - f(r_{j-1})| = \sum_{j=1}^{J} \left| \int_{r_{j-1}}^{r_j} \mathrm{D}f\,dx \right| \leq \int_a^b |\mathrm{D}f|\,dx,$$

ce qui assure que f a une variation finie sur $]a,b[$, majorée par $\int_a^b |\mathrm{D}f|\,dx$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $[r,s]$ inclus dans $]a,b[$ tel que

$$\int_a^b |\mathrm{D}f|\,dx \leq \int_r^s |\mathrm{D}f|\,dx + \varepsilon,$$

alors que les majorations

$$\int_r^s |\mathrm{D}f|\,dx \underset{(*)}{\leq} V_f([r,s]) \leq V_f(]a,b[)$$

ont lieu (en $(*)$, on remarque que, pour toute suite fondamentale de découpages à la Riemann

$$\{[r_0^{(m)}, \ldots, r_{J(m)}^{(m)}], (s_j^{(m)})_{j \leq J(m)}\}$$

de $[r, s]$, on a

$$\int_r^s |\mathrm{D}f| \, dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{J(m)} \left|\mathrm{D}f(s_j^{(m)})\right| \cdot (r_j^{(m)} - r_{j-1}^{(m)})$$

avec

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^{J(m)} \left(\left|\mathrm{D}f(s_j^{(m)})\right| \cdot (r_j^{(m)} - r_{j-1}^{(m)}) - \left| f(r_j^{(m)}) - f(r_{j-1}^{(m)}) \right| \right) \right| \\ &\qquad\qquad \leq \sum_{j=1}^{J(m)} \left| \int_{r_{j-1}^{(m)}}^{r_j^{(m)}} \left(\mathrm{D}f(s_j^{(m)}) - \mathrm{D}f(x) \right) dx \right| \end{aligned}$$

alors que $\mathrm{D}f$ est une fonction uniformément continue sur $[r, s]$). D'où la conclusion.□

6.2.2 Caractérisation

Théorème 6.2.3 *Soit f une fonction sur l'intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$. L'application*

$$\mu \colon \mathcal{SI}(]a, b[) \to \mathbb{C} \quad \begin{cases} \emptyset \mapsto 0 \\ ]c, d] \mapsto f(d) - f(c) \end{cases}$$

a) *est une mesure finie sur $]a, b[$ si et seulement si f est continu à droite sur $]a, b[$ et a une variation finie sur $]a, b[$,*

b) *est une mesure sur $]a, b[$ si et seulement si f est continu à droite sur $]a, b[$ et a une variation finie sur tout intervalle compact inclus dans $]a, b[$.*

Preuve. Nous avons déjà constaté la nécessité de la condition.

La condition est suffisante. Il est clair que μ_f est une application finiment additive et à variation finie sur $\mathcal{SI}(]a, b[)$; elle est même telle que $V\mu_f(I) \leq V_f(]a, b[)$ pour tout semi-intervalle I dans $]a, b[$ si f a une variation finie sur $]a, b[$. Pour conclure, il suffit alors d'établir que, pour toute partition dénombrable $\{ I_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ d'un semi-intervalle $]c, d]$ dans $]a, b[$ en semi-intervalles, on a

$$\mu_f(]c, d]) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m).$$

D'une part, une telle série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m)$ converge absolument car, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, il existe une partition finie de $]c, d]$ en semi-intervalles dont $I_1, \ldots I_M$ sont des éléments; par conséquent, il vient

$$\sum_{m=1}^{M} |\mu_f(I_m)| \leq V_f([c,d]), \quad \forall M \in \mathbb{N}_0,$$

ce qui suffit.

D'autre part, établissons que la limite d'une telle série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m)$ est égale à $\mu_f(]c,d])$. Vu le critère relatif aux fonctions qui ont une variation finie sur tout intervalle compact inclus dans $]a,b[$, nous pouvons supposer f réel et croissant, quitte à considérer séparément les cas de f_1, f_2, f_3 et f_4. Pour tout $\varepsilon > 0$, vu la continuité à droite de f, il existe $c' \in]c,d[$ tel que $f(c') - f(c) \leq \varepsilon/2$ et, pour tout $I_m =]c_m, d_m]$, il existe $d'_m > d_m$ tel que $]c_m, d'_m]$ soit un semi-intervalle dans $]a,b[$ et que $f(d'_m) - f(d_m) \leq 2^{-m-1}\varepsilon$. Cela étant, $\{\,]c_m, d'_m[\,:\, m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ est un recouvrement ouvert du compact $[c', d]$, dont nous pouvons extraire un recouvrement fini. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mu_f(]c,d]) &\leq \mu_f(]c',d]) + \varepsilon/2 \\ &\leq \sum_{(m)} \mu_f(]c_m, d'_m]) + \varepsilon/2 \quad \leq \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m) + \varepsilon \end{aligned}$$

où $\sum_{(m)}$ désigne la somme finie relative au recouvrement fini. D'où la conclusion car la majoration $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m) \leq \mu_f(]c,d])$ est claire.∎

Remarque. Si f est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, il est clair que $\mu_f = (\mathrm{D}f).\ell$.□

6.2.3 Fonctions et mesures absolument continues

Définition. Une fonction f sur l'intervalle ouvert (resp. compact) I de $\mathbb{R}$ est *absolument continue sur* I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ pour lequel $\sum_{j=1}^{J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \varepsilon$ pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et tous semi-intervalles $]a_1, b_1]$, ..., $]a_J, b_J]$ dans I (resp. inclus dans I), deux à deux disjoints et tels que $\sum_{j=1}^{J}(b_j - a_j) \leq \eta$.

Remarques. 1) Il est clair que *toute fonction absolument continue sur un intervalle ouvert ou compact I de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur I.* La réciproque de cette propriété est fausse: on peut même établir que la fonction singulière de Cantor f est à variation finie et uniformément continue sur $[0,1]$ (trivial) $* \rightarrow$ mais n'est pas absolument continue sur cet intervalle: pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble des composantes connexes de K_m est constitué de 2^m intervalles $[a_j, b_j]$ tels que les semi-intervalles $]a_j, b_j]$ soient inclus dans $[0,1]$, deux à deux disjoints, de longueur égale à 3^{-m} et tels que $f(b_j)-f(a_j) = 2^{-m}$. $\leftarrow *$ Cela résulte aussi du théorème suivant.

2) En fait *toute fonction absolument continue sur un intervalle compact* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *a une variation finie sur* $[a,b]$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\sum_{j=1}^{J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq 1$ pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et tous semi-intervalles $]a_1, b_1]$, ..., $]a_J, b_J]$ inclus dans $[a,b]$, deux à deux disjoints et tels que $\sum_{j=1}^{J}(b_j - a_j) \leq \eta$. Dans ces conditions, pour tout découpage $[a_0, \ldots, a_J]$ de $[a,b]$, on vérifie directement que $\sum_{j=1}^{J} |f(a_j) - f(a_{j-1})| \leq (b-a)/\eta + 1.\square$

Théorème 6.2.4 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. L'application*

$$\mu_f \colon \mathcal{SI}(I) \to \mathbb{C} \qquad \begin{cases} \emptyset \mapsto 0 \\ ]a,b] \mapsto f(b) - f(a) \end{cases}$$

est une mesure sur I absolument continue par rapport à ℓ si et seulement si f est absolument continu sur tout intervalle compact inclus dans I.

Preuve. La condition est nécessaire. La remarque du paragraphe 4.7 signale que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout intervalle compact $[a,b]$ inclus dans I, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute partie borélienne B de $[a,b]$ vérifiant $\ell(B) \leq \eta$, on a $V\mu_f(B) \leq \varepsilon$. Cela étant, si les semi-intervalles $]a_1, b_1]$, ..., $]a_J, b_J]$ sont en nombre fini, deux à deux disjoints et tels que $\sum_{j=1}^{J}(b_j - a_j) \leq \eta$, il vient

$$\sum_{j=1}^{J} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{J} |\mu_f(]a_j, b_j])| \leq V\mu_f\left(\cup_{j=1}^{J}]a_j, b_j]\right) \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit.

La condition est suffisante. Il est clair que μ_f est une mesure sur I. Pour conclure, il suffit alors de prouver que toute partie ℓ-négligeable et relativement compacte N de I est μ_f-négligeable. Soit K un intervalle compact inclus dans I et contenant N. Pour tout $\varepsilon > 0$, vu l'absolue continuité de f sur K, il existe $\eta > 0$ tel que $\sum_{j=1}^{J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \varepsilon$ pour tout $J \in \mathbb{N}_0$ et tous semi-intervalles $]a_1, b_1]$, ..., $]a_J, b_J]$ inclus dans K, deux à deux disjoints et tels que $\sum_{j=1}^{J}(b_j - a_j) \leq \eta$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $\{\,]a_m, b_m] : m \in \mathbb{N}_0 \,\}$ de N constitué de semi-intervalles dans I dont la somme des ℓ-mesures est majorée par η et que bien sûr nous pouvons supposer inclus dans K et deux à deux disjoints. Comme, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, nous avons

$$V\mu_f(]a_m, b_m]) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_m} \sum_{]a,b] \in \mathcal{P}} |f(b) - f(a)|$$

où $\mathcal{P}_m$ est l'ensemble des partitions finies de $]a_m, b_m]$ en semi-intervalles, nous obtenons

$$\sum_{m=1}^{M} V\mu_f(]a_m, b_m]) \leq \varepsilon, \quad \forall M \in \mathbb{N}_0,$$

donc $\sum_{m=1}^{\infty} V\mu_f(]c_m, d_m]) \leq \varepsilon$. D'où la conclusion.∎

Le résultat suivant est maintenant aisé à établir; il sera sensiblement amélioré au paragraphe suivant.

Proposition 6.2.5 *Soit r un point de l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*

a) *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(I)$* [resp. $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$],

$$F : I \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \int_r^x f(t)\, dt$$

est une fonction absolument continue et ayant une variation finie sur (resp. *sur tout intervalle compact inclus dans*) *I qui s'annule en r.*

b) *Inversement, pour toute fonction F absolument continue et ayant une variation finie sur* (resp. *sur tout intervalle compact inclus dans*) *I, il existe $f \in \mathcal{L}^1(I)$* (resp. $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$) *tel que*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

pour tout intervalle compact $[a, b]$ inclus dans I.∎

Définition. Le résultat précédent incite à dire qu'une mesure sur $\mathbb{R}^n$ est *absolument continue* si elle est absolument continue par rapport à ℓ.

6.3 Différentiation d'une mesure

Notations. Dans ce paragraphe,

a) Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$,

b) si μ et ν sont deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{SI}(\Omega))$ et si A est une partie μ- et ν-intégrable de Ω, nous posons

$$(\mu/\nu)(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu(A) = 0, \\ \dfrac{\mu(A)}{\nu(A)} & \text{si } \nu(A) \neq 0, \end{cases}$$

c) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $A(x, r)$ est le cube ouvert [resp. le cube fermé; la boule ouverte; la boule fermée] de centre x et de côté $2r$ [resp. et de côté $2r$; et de rayon r; et de rayon r]. Pour tout $x \in \Omega$, il existe donc $r > 0$ tel que $A(x, \rho)^{-} \subset \Omega$ pour tout $\rho \in]0, r[$.

d) si μ et ν sont deux mesures positives sur $(\Omega, \mathcal{SI}(\Omega))$, nous considérons les deux applications

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu \mu \colon \Omega \to [0, +\infty[\cup \{+\infty\} \quad x \mapsto \lim_{r \to 0^+} \inf_{0<\rho<r} (\mu/\nu)(A(x, \rho))$$

et

$$\overline{\mathrm{D}}_\nu \mu \colon \Omega \to [0, +\infty[\cup \{+\infty\} \quad x \mapsto \lim_{r \to 0^+} \sup_{0<\rho<r} (\mu/\nu)(A(x, \rho)).$$

Il est alors clair que

$$0 \leq \underline{\mathrm{D}}_\nu \mu(x) \leq \overline{\mathrm{D}}_\nu \mu(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

et

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu \mu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu \mu(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \mathrm{supp}(\nu).$$

Lemme 6.3.1 (recouvrement) *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe un entier $M(n) \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout compact non vide K de $\mathbb{R}^n$ et toute fonction r définie sur K et à valeurs dans une partie finie de $]0, +\infty[$, il existe un recouvrement fini de K au moyen d'ensembles du type $A(x, r(x))$ avec $x \in K$, tel que tout point de $\mathbb{R}^n$ appartienne au plus à $M(n)$ éléments de ce recouvrement.*

Preuve. Soient K et r un tel compact et une telle fonction.

Pour alléger les notations, posons $A_x = A(x, r(x))$ pour tout $x \in K$.

Nous allons d'abord construire un recouvrement fini particulier de K. Posons $r_1 = \sup \{ r(x) : x \in K \}$ et choisissons un point $x^{(1)} \in K$ tel que $r(x^{(1)}) = r_1$. Si K est inclus dans $A_{x^{(1)}}$, nous prenons $\{A_{x^{(1)}}\}$. Sinon nous obtenons de proche en proche des $x^{(m)} \in K$ pour $m = 2, \ldots$ jusqu'à ce que les $A_{x^{(1)}}, \ldots, A_{x^{(m)}}$ ainsi obtenus recouvrent K, au moyen du procédé suivant. Si $x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}$ sont obtenus et si K n'est pas inclus dans $\cup_{k=1}^{l} A_{x^{(k)}}$, nous posons

$$r_{l+1} = \sup \left\{ r(x) : x \in K \setminus \left(\cup_{k=1}^{l} A_{x^{(k)}} \right) \right\}$$

puis nous choisissons $x^{(l+1)}$ dans $K \setminus \left(\cup_{k=1}^{l} A_{x^{(k)}} \right)$ tel que $r(x^{(l+1)}) = r_{l+1}$. Comme la fonction r est à valeurs dans une partie finie de $]0, +\infty[$, il existe $r_0 > 0$ tel que $r(x) \geq r_0$ pour tout $x \in K$. Dès lors, nous devons avoir $\left| x^{(j)} - x^{(k)} \right| \geq r_0$ pour tous j, $k \in \mathbb{N}_0$ distincts ainsi construits. Comme K est compact, la construction s'arrête et procure donc un recouvrement fini de K au moyen d'ensembles du type A_x avec $x \in K$.

Pour conclure dans le cas des cubes ouverts (resp. fermés), établissons que tout $x \in \mathbb{R}^n$ appartient au plus à 2^n des ensembles $A_{x^{(j)}}$ retenus. Il suffit de prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il n'existe pas deux centres distincts $x^{(j)}$ et $x^{(k)}$ construits, appartenant au même 2^n-ant de sommet x et à faces parallèles aux hyperplans $\{\, y \in \mathbb{R}^n : y_l = 0 \,\}$ pour $l = 1, \ldots, n$, et tels que x appartienne à $A_{x^{(j)}}$ et à $A_{x^{(k)}}$. De fait, pour $\# = <$ (resp. $\# = \leq$), nous aurions alors

$$\sup_{l \leq n} \left| x_l - x_l^{(j)} \right| \# \; r_j \quad \text{et} \quad \sup_{l \leq n} \left| x_l - x_l^{(k)} \right| \# \; r_k$$

donc

$$\sup_{l \leq n} \left| x_l^{(j)} - x_l^{(k)} \right| \# \; \sup\{r_j, r_k\}$$

et l'un des cubes $A_{x^{(j)}}$ ou $A_{x^{(k)}}$ contiendrait le centre de l'autre cube.

Pour conclure dans le cas des boules ouvertes (resp. fermées), nous procédons comme suit. Pour tout $e \in \mathbb{R}^n$ de module égal à 1, l'ensemble

$$\Gamma_e = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y| \neq 0, \left| \frac{y}{|y|} - e \right| < \frac{1}{4} \right\}$$

est un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme ces ensembles constituent un recouvrement ouvert du compact $S = \{\, e \in \mathbb{R}^n : |e| = 1 \,\}$, nous pouvons en extraire un recouvrement fini; soit $\{\, \Gamma_{e_m} : m = 1, \ldots, M \,\}$ un tel recouvrement. Cela étant, nous allons établir que $M(n) = M + 1$ convient en prouvant que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il n'existe pas deux centres distincts $x^{(j)}$ et $x^{(k)}$ construits, appartenant au même cône $x + \Gamma_{e_m}$ avec $m \leq M$ et tels que x appartienne à $A_{x^{(j)}}$ et à $A_{x^{(k)}}$. De fait, pour $\# = <$ (resp. $\# = \leq$), on aurait alors par exemple

$$\left| x^{(j)} - x \right| \leq \left| x^{(k)} - x \right|$$

et le point

$$y = x + \frac{\left| x^{(k)} - x \right|}{\left| x^{(j)} - x \right|} (x^{(j)} - x)$$

appartiendrait alors à la boule $A_{x^{(k)}}$ vu que

$$\begin{aligned} \left| x^{(k)} - y \right| &= \left| x^{(k)} - x \right| \cdot \left| \frac{x^{(k)} - x}{\left| x^{(k)} - x \right|} + \frac{x - x^{(j)}}{\left| x - x^{(j)} \right|} \right| \\ &\leq \left| x^{(k)} - x \right| \cdot \left(\left| \frac{x^{(k)} - x}{\left| x^{(k)} - x \right|} - e_m \right| + \left| \frac{x - x^{(j)}}{\left| x - x^{(j)} \right|} - e_m \right| \right) \quad \# \quad \frac{r_k}{2}. \end{aligned}$$

Cela étant, le point

$$x^{(j)} = \frac{\left| x^{(j)} - x \right|}{\left| x^{(k)} - x \right|} y + \left(1 - \frac{\left| x^{(j)} - x \right|}{\left| x^{(k)} - x \right|} \right) x$$

appartient lui aussi à $A_{x^{(k)}}$, vu la convexité de cet ensemble. D'où une contradiction.∎

Théorème 6.3.2 (différentiation) *Si μ et ν sont des mesures sur l'ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\mathrm{D}_\nu\mu(x) = \lim_{r\to 0^+}(\mu/\nu)(A(x,r))$$

est défini pour ν-presque tout $x \in \Omega$. La fonction $\mathrm{D}_\nu\mu$ ainsi définie ν-pp sur Ω est localement ν-intégrable et la mesure $\mathrm{D}_\nu\mu\cdot\nu$ est égale à la partie absolument continue de μ par rapport à ν. Dès lors, si μ est une mesure sur l'ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ et si f est une fonction localement μ-mesurable sur Ω, il vient

$$f(x) = \lim_{r\to 0^+}(f\cdot\mu/\mu)(A(x,r))$$

pour μ-presque tout $x \in \Omega$.

Preuve. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

A. *Preuve du cas $\mu \geq 0, \nu \geq 0$.*

i) Etablissons d'abord la propriété suivante: pour tous $x_0 \in \operatorname{supp}(\nu)$, $r_0 > 0$ et $s_0 > 0$ tels que $A(x_0,r_0)^- \subset \Omega$ et

$$\sup_{0<\rho<r_0}(\mu/\nu)(A(x_0,\rho)) > s_0,$$

il existe $r \in \,]0,r_0[$ et une boule b de centre x_0 tels que $A(x,r)^-$ soit inclus dans Ω pour tout $x \in b$ et que

$$(\mu/\nu)(A(x,r)) > s_0, \quad \forall x \in b \cap \operatorname{supp}(\nu).$$

Il existe $\rho_0 \in \,]0,r_0[$ tel que $(\mu/\nu)(A(x_0,r_0) > s_0$. Cela étant, remarquons que $\{\, A(x_0,\rho)^\bullet : 0 < \rho < r_0 \,\}$ est une famille de parties μ- et ν-intégrables, deux à deux disjointes et incluses dans l'ensemble μ- et ν-intégrable $A(x_0,r_0)^-$. Il s'ensuit que $A(x_0,\rho)^\bullet$ est μ- et ν-négligeable pour tout $\rho \in \,]0,r_0[$ sauf une infinité dénombrable de valeurs de ρ au plus. Dès lors, il existe une suite $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $]0,r_0[$ strictement décroissante (resp. strictement croissante) vers ρ_0 dans le cas où les $A(x,r)$ sont fermés (resp. ouverts) telle que $A(x_0,\rho_m)^\bullet$ soit μ- et ν-négligeable pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Vu le théorème de la convergence monotone, on a bien sûr

$$(\mu/\nu)(A(x_0,\rho_m) \to (\mu/\nu)(A(x_0,\rho_0));$$

on en déduit aussitôt l'existence de $r \in \,]0,r_0[$ tel que $(\mu/\nu)(A(x_0,r)) > s_0$ et que $A(x_0,r)^\bullet$ soit μ- et ν-négligeable. Comme $r \in \,]0,r_0[$, on obtient directement l'existence d'une boule β de centre x_0 telle que $A(x,r)^- \subset A(x_0,r_0)^- \subset \Omega$ pour tout $x \in \beta$. Pour conclure, il suffit alors de vérifier au moyen du théorème de la convergence majorée que

$$(\mu/\nu)(A(x_m,r)) \to (\mu/\nu)(A(x_0,r))$$

pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de β qui converge vers x_0.

Mettons en évidence les deux conséquences de cette propriété, que nous allons utiliser dans la suite:

1) pour tous r, $s>0$,

$$\left\{ x\in \operatorname{supp}(\nu) : \sup_{0<\rho<r} (\mu/\nu)(A(x,\rho) > s \right\}$$

est un ouvert dans $\operatorname{supp}(\nu)$; dès lors,

$$\begin{aligned}&\left\{ x\in \operatorname{supp}(\nu) : \lim_{r\to 0^+} \sup_{0<\rho<r} (\mu/\nu)(A(x,\rho)) > s \right\}\\ &= \bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ x\in \operatorname{supp}(\nu) : \sup_{0<\rho<1/m} (\mu/\nu)(A(x,\rho) > s+\frac{1}{p} \right\}\end{aligned}$$

est une partie borélienne de X incluse dans $\operatorname{supp}(\nu)$.

2) si r et s appartiennent à $]0,+\infty[$ et si K est un compact inclus dans

$$\left\{ x\in \operatorname{supp}(\nu) : \sup_{0<\rho<r} (\mu/\nu)(A(x,\rho)) > s \right\},$$

alors, pour tout $m\in\mathbb{N}_0$, il existe une fonction $r_m\colon K\to\,]0,1/m[$ telle que $r_m(K)$ soit un ensemble fini et que $(\mu/\nu)(A(x,r_m(x)))>s$ pour tout $x\in K$. (Nous nous trouvons alors dans les conditions d'application du lemme de recouvrement.)

ii) Cela étant, l'idée de la preuve est la suivante: nous savons qu'il existe une partie borélienne et ν-négligeable N de Ω telle que la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à ν soit donnée par $\mu=\chi_{\Omega\setminus N}.\mu+\chi_N.\mu$. Il vient alors

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu\chi_{\Omega\setminus N}.\mu+\underline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu\le\underline{\mathrm{D}}_\nu\mu\le\overline{\mathrm{D}}_\nu\mu\le\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_{\Omega\setminus N}.\mu+\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu$$

et il existe une fonction F localement ν-intégrable sur Ω telle que $\chi_{\Omega\setminus N}.\mu=F.\nu$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que

$$\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu(x)=0\quad\text{et}\quad\underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x)=\overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x)=F(x)$$

pour ν-presque tout $x\in\Omega$.

iii) Prouvons que $\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu(x)=0$ pour ν-presque tout $x\in\Omega$.

Il est clair que $\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu(x)=0$ pour tout $x\in\Omega\setminus\operatorname{supp}(\nu)$ et que

$$\left\{ x\in\operatorname{supp}(\nu):\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu(x)>0\right\}=\bigcup_{p=1}^{\infty}\left\{ x\in\operatorname{supp}(\nu):\overline{\mathrm{D}}_\nu\chi_N.\mu(x)>\frac{1}{p}\right\},$$

où, vu i), le second membre est une union dénombrable de parties ν-mesurables de $\mathrm{supp}(\nu)$. Pour conclure au moyen de la régularité de ν, il suffit alors de prouver que, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, tout compact K de

$$\{\, x \in \mathrm{supp}(\nu) : \overline{\mathrm{D}}_\nu \chi_N.\mu(x) > 1/p \,\} \setminus N$$

est ν-négligeable. Or, vu i), pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe une fonction $r_m \in \mathrm{F}(K)$ à valeurs dans une partie finie de $]0, 1/m[$ telle que

$$(\chi_N.\mu/\nu)(A(x, r_m(x))) > 1/p, \quad \forall x \in K.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit $\{\, A(x, r_m(x)) : x \in K_m \,\}$ un recouvrement de K obtenu au moyen du lemme de recouvrement. D'une part, il vient successivement

$$\begin{aligned} \nu(K) &\leq \sum_{x \in K_m} \nu(A(x, r_m(x))) \quad \leq \quad p \sum_{x \in K_m} \chi_N.\mu(A(x, r_m(x))) \\ &\leq pM(n)\, \chi_N.\mu\left(\bigcup_{x \in K_m} A(x, r_m(x)) \right). \end{aligned}$$

D'autre part, il vient aussi

$$\chi_N.\mu\left(\bigcup_{x \in K_m} A(x, r_m(x)) \right) \to \chi_N.\mu(K) = \mu(N \cap K) = 0$$

car K est disjoint de N. D'où la conclusion.

iv) Prouvons que

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = F(x)$$

ν-pp sur Ω.

a) Etablissons d'abord que $\underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = F(x)$ pour ν-presque tout $x \in \{\, y \in \Omega : F(y) = 0 \,\}$.

Comme nous pouvons supposer F à valeurs dans $[0, +\infty[$, il suffit d'établir que $\overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = 0$ pour ν-presque tout $x \in \{\, y \in \Omega : F(y) = 0 \,\}$ ou encore que, pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble

$$\{\, y \in \Omega : F(y) = 0, \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(y) > 1/p \,\}$$

est ν-négligeable. Or, pour tout compact K inclus dans cet ensemble et tout $m \in \mathbb{N}_0$, vu i), il existe $r_m \in \mathrm{F}(K)$ à valeurs dans $]0, 1/m[$ tel que

$$((F.\nu)/\nu)(A(x, r_m(x))) > 1/p, \quad \forall x \in K.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit $\{ A(x, r_m(x)) : x \in K_m \}$ un recouvrement de K obtenu au moyen du lemme de recouvrement. La conclusion est alors immédiate car on a bien sûr

$$\begin{aligned} \nu(K) &\leq \sum_{x \in K_m} \nu(A(x, r_m(x))) \quad \leq \quad p \sum_{x \in K_m} F.\nu(A(x, r_m(x))) \\ &\leq pM(n)\, F.\nu \left(\bigcup_{x \in K_m} A(x, r_m(x)) \right) \end{aligned}$$

et

$$F.\nu \left(\bigcup_{x \in K_m} A(x, r_m(x)) \right) \to F.\nu(K) = \int F \chi_K \, d\nu = 0.$$

b) Prouvons ensuite que, si F est la fonction caractéristique χ_B d'une partie ν-mesurable B de Ω, alors $\underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = F(x)$ pour ν-presque tout $x \in \Omega$.

Vu a), il suffit d'établir que ces égalités ont lieu pour ν-presque tout $x \in B$. Or on peut aussi appliquer a) à la mesure $\chi_{\Omega \setminus B}.\nu$: on obtient alors l'existence d'un ensemble ν-négligeable $E \subset \Omega$ tel que

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu(\chi_\Omega - F).\nu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu(\chi_\Omega - F).\nu = 0, \quad \forall x \in B \setminus E.$$

Comme $\chi_\Omega.\nu = \nu$, on en déduit de suite que

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = 1, \quad \forall x \in B \setminus E,$$

ce qui suffit.

c) Passons au cas général.

Etant donné deux nombres réels r, s tels que $0 < r < s$, posons

$$B_{r,s} = \{ x \in \Omega : r < F(x) < s \} \setminus N.$$

Vu a), il existe un ensemble ν-négligeable $N_{r,s}$ tel que

$$\overline{\mathrm{D}}_\nu F \chi_{\Omega \setminus B_{r,s}}.\nu(x) = 0, \quad \forall x \in B_{r,s} \setminus N_{r,s}. \qquad (*)$$

Vu b), il existe un ensemble ν-négligeable $M_{r,s}$ tel que

$$\overline{\mathrm{D}}_\nu \chi_{B_{r,s}}.\nu(x) = 1, \quad \forall x \in B_{r,s} \setminus M_{r,s}. \qquad (**)$$

Comme on a bien sûr

$$r\chi_{B_{r,s}}.\nu + (F\chi_{\Omega \setminus B_{r,s}}).\nu \leq F.\nu \leq s\chi_{B_{r,s}}.\nu + (F\chi_{\Omega \setminus B_{r,s}}).\nu,$$

on déduit de suite de $(*)$ et de $(**)$ que

$$r \leq \underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) \leq \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) \leq s, \quad \forall x \in B_{r,s} \setminus (N_{r,s} \cup M_{r,s}).$$

Cela étant, soit $\mathcal{D}$ l'ensemble dénombrable des couples (r,s) de nombres rationnels tels que $0 < r < s$. Comme

$$E = \bigcup_{(r,s)\in\mathcal{D}} (N_{r,s} \cup M_{r,s})$$

est ν-négligeable et comme

$$\underline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = \overline{\mathrm{D}}_\nu F.\nu(x) = F(x), \quad \forall x \in \{\, y \in \Omega : F(y) > 0 \,\} \setminus (E \cup N),$$

on conclut aussitôt.

B. *Preuve du cas* $\nu \geq 0$.

C'est une conséquence directe de A appliqué aux mesures $(\Re\mu)_+$, $(\Re\mu)_-$, $(\Im\mu)_+$ et $(\Im\mu)_-$.

C. *Preuve du cas général.*

D'une part, comme $\nu \ll V\nu$, le théorème de Radon-Nikodym affirme l'existence d'une fonction J localement ν-intégrable telle que $\nu = J.V\nu$ donc telle que $|J| = \chi_\Omega$ ν-pp. Vu ce qui précède, on a donc $D_{V\nu}\nu = J$ ν-pp sur Ω et, comme $|J(x)| = 1$ pour ν-presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{V\nu(A(x,r))}{\nu(A(x,r))} = \frac{1}{J}(0 \text{ si } J = 0)(x), \quad \nu-\text{pp}.$$

D'autre part, vu ce qui précède,

$$\lim_{r\to 0^+} (\mu/V\nu)(A(x,r)) = D_{V\nu}(\mu(x)$$

existe et est fini pour ν-presque tout $x \in \Omega$, est localement ν-intégrable et est tel que $D_{V\nu}\mu.V\nu$ est la partie absolument continue de μ par rapport à $V\nu$ donc par rapport à ν.

La conclusion est alors immédiate: pour ν-presque tout $x \in \Omega$, il vient

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(A(x,r))}{\nu(A(x,r))} &= \lim_{r\to 0^*} \frac{\mu(A(x,r))}{V\nu(A(x,r))} \cdot \frac{V\nu(A(x,r))}{\nu(A(x,r))} \\ &= D_{V\nu}\mu(x).\frac{1}{J}(0 \text{ si } J = 0)(x) \end{aligned}$$

et

$$\left(D_{V\nu}\mu.\frac{1}{J}(0 \text{ si } J = 0\right).\nu = D_{V\nu}\mu.\left((\frac{1}{J}(0 \text{ si } J = 0)).\nu\right) = D_{V\nu}\mu.V\nu.\blacksquare$$

Notations. Dans le résultat qui suit,

a) $\mathcal{A}$ est l'ensemble des cubes non dégénérés ouverts ou fermés et des boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$, d'adhérence incluse dans Ω. Etant donné $A \in \mathcal{A}$, $c(A)$ est le centre de A et $r(A)$ est la moitié du côté de A si A est un cube et le rayon de A si A est une boule. Etant donné $x \in \Omega$ et $A \in \mathcal{A}$ tels que $x \in A$, il est clair que $A(x, 2r(A))$ contient A et a son adhérence incluse dans Ω si $r(A)$ est suffisamment petit. De plus, on a

$$\ell(A(x, 2r(A))) = 2^n \ell(A).$$

b) si μ est une mesure positive sur Ω absolument continue par rapport à ℓ, on introduit les applications

$$\underline{\mathrm{D}}\mu \colon \Omega \to [0, +\infty[\cup \{+\infty\} \quad x \mapsto \lim_{r\to 0^+} \inf_{x\in A\in\mathcal{A},\, r(A)\le r} (\mu/\ell)(A)$$

et

$$\overline{\mathrm{D}}\mu \colon \Omega \to [0, +\infty[\cup \{+\infty\} \quad x \mapsto \lim_{r\to 0^+} \sup_{x\in A\in\mathcal{A},\, r(A)\le r} (\mu/\ell)(A).$$

Il est alors clair que

$$0 \le \underline{\mathrm{D}}\mu(x) \le \overline{\mathrm{D}}\mu(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Voici à présent le *théorème de différentiation d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Théorème 6.3.3 *Si μ est une mesure sur l'ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, il existe une partie ℓ-négligeable N de Ω telle que, pour tout $x \in \Omega\setminus N$ et toute suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant $x \in A_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $r(A_m) \to 0$, la suite $(\mu/\ell)(A_m)$ converge.*

De plus, la fonction $\mathrm{D}\mu$ ainsi obtenue ℓ-pp sur Ω est égale ℓ-pp sur Ω à $\mathrm{D}_\ell\mu$; $\mu_a = \mathrm{D}\mu.\ell$ est donc égal à la partie de μ absolument continue par rapport à ℓ.

Preuve. Nous allons procéder en deux temps.

A. *Preuve du cas $\mu \ge 0$.*

a) Etablissons qu'en tout $x \in \Omega$ tel que $\mathrm{D}_\ell\mu(x) = 0$, $\mathrm{D}\mu$ est défini et égal à 0.

Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de $\mathcal{A}$ telle que $x \in A_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $r(A_m) \to 0$. Pour m suffisamment grand, $A_{(m)} = A(x, 2r(A_m))$ a son adhérence incluse dans Ω et contient A_m; il vient donc

$$\frac{\mu(A_m)}{\ell(A_m)} \le \frac{\mu(A_{(m)})}{\ell(A_m)} = \frac{\mu(A_{(m)})}{\ell(A_{(m)})} \cdot \frac{\ell(A_{(m)})}{\ell(A_m)} \le 2^n \frac{\mu(A_{(m)})}{\ell(A_{(m)})}.$$

La conclusion est alors immédiate.

Nous pouvons donc supposer la mesure μ absolument continue par rapport à ℓ.

b) Etablissons que, pour toute partie ℓ-mesurable E de Ω, $\mathrm{D}\chi_E.\ell$ est défini ℓ-pp sur Ω et égal à χ_E ℓ-pp sur Ω.
b.i) D'une part, on a $\mathrm{D}_\ell\chi_E.\ell(x) = 0$ pour ℓ-presque tout $x \in \Omega \setminus E$ donc, vu a), $\mathrm{D}\chi_E.\ell$ est défini et égal à 0 en ℓ-presque tout $x \in \Omega \setminus E$.
b.ii) D'autre part, en recourant à b.i) pour $\Omega \setminus E$, on obtient que $\mathrm{D}(\chi_\Omega - \chi_E).\ell$ est égal à 0 en ℓ-presque tout $x \in E$. Comme on a bien sûr $\mathrm{D}\chi_\Omega.\ell = \chi_\Omega$, on en déduit de suite que $\mathrm{D}\chi_E.\ell$ est défini et égal à 1 en ℓ-presque tout $x \in E$.

c) Passons au cas général. Soit F une fonction localement ℓ-intégrable et à valeurs positives ou nulles sur Ω telle que $\mu = F.\ell$. Posons $E_{r,s} = \{\, x \in \Omega : r < F(x) < s \,\}$ pour tous nombres réels r, s tels que $0 < r < s$. Vu a), il existe un ensemble ℓ-négligeable $N_{r,s}$ tel que

$$\overline{\mathrm{D}}F\chi_{\Omega\setminus E_{r,s}}.\ell(x) = 0, \quad \forall x \in E_{r,s} \setminus N_{r,s}.$$

Vu b), il existe un ensemble ℓ-négligeable $M_{r,s}$ tel que

$$\overline{\mathrm{D}}\chi_{E_{r,s}}.\ell(x) = 1, \quad \forall x \in E_{r,s} \setminus M_{r,s}.$$

Comme on a bien sûr

$$r\chi_{E_{r,s}}.\ell + F\chi_{\Omega\setminus E_{r,s}}.\ell \leq F.\ell \leq s\chi_{E_{r,s}}.\ell + F\chi_{\Omega\setminus E_{r,s}}.\ell,$$

on obtient de suite

$$r \leq \underline{\mathrm{D}}\mu(x) \leq \overline{\mathrm{D}}\mu(x) \leq s, \quad \forall x \in E_{r,s} \setminus (N_{r,s} \cup M_{r,s}).$$

On conclut alors comme d'habitude: soit $\mathcal{D}$ l'ensemble dénombrable des couples (r, s) de nombres réels rationnels tels que $0 < r < s$. Comme $N = \cup_{(r,s)\in\mathcal{D}}(N_{r,s} \cup M_{r,s})$ est ℓ-négligeable et comme

$$\underline{\mathrm{D}}\mu(x) = \overline{\mathrm{D}}\mu(x) = F(x), \quad \forall x \in \{\, y \in \Omega : F(y) > 0 \,\} \setminus N,$$

il vient $\mathrm{D}\mu = F$ ℓ-pp sur Ω car on a $\mathrm{D}_\ell\mu(x) = 0$ pour ℓ-presque tout point $x \in \{\, y \in \Omega : F(y) = 0 \,\}$.
B. *Preuve du cas général.*

C'est une conséquence directe de A appliqué aux mesures $(\Re\mu)_+$, $(\Re\mu)_-$, $(\Im\mu)_+$ et $(\Im\mu)_-$.∎

Ce dernier résultat permet de donner un complément fort intéressant relatif à la dérivabilité des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Notations. a) Si μ est une mesure sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, nous renvoyons au paragraphe 6.2 pour la définition et les propriétés des fonctions $f_{\mu,r}$.

b) De même, si f est une fonction sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, nous renvoyons au paragraphe 6.2 pour la définition et les propriétés de μ_f.

Lemme 6.3.4 *Si μ est une mesure sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout $r \in I$, la fonction $f_{\mu,r}$ est dérivable en tout $x \in I$ où $\mathrm{D}\mu$ est défini* (donc est dérivable ℓ-pp sur I) *et, en chacun de ces points, on a $\mathrm{D}f_{\mu,r}(x) = \mathrm{D}\mu(x)$.*

Preuve. Si $\mathrm{D}\mu$ est défini en $x_0 \in I$, il vient bien sûr $\mu(\{x_0\}) = 0$ et par conséquent, pour $F = f_{\mu,r}$, il vient

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\mu([x_0, x_0+h])}{\ell([x_0, x_0+h])} & \text{si } h > 0, \\ \dfrac{\mu(]x_0+h, x_0])}{\ell(]x_0+h, x_0])} & \text{si } h < 0, \end{cases}$$

si h est de module suffisamment petit. Pour conclure, il suffit alors de recourir à la définition de $\mathrm{D}\mu(x_0)$. (On remarquera que, pour $h < 0$, $\mu(]x_0+h, x_0])$ et $\ell(]x_0+h, x_0])$ sont respectivement la limite des suites

$$(\mu([x_0 + (1-1/m)h, x_0]))_{m\in\mathbb{N}_0} \text{ et } (\ell([x_0 + (1-1/m)h, x_0]))_{m\in\mathbb{N}_0}).\blacksquare$$

Théorème 6.3.5 (Lebesgue) *Toute fonction à variation finie sur tout intervalle compact inclus dans l'intervalle ouvert I de* $\mathbb{R}$ (en particulier, toute fonction réelle et monotone sur I) *est dérivable* ℓ-pp *sur I.*

Preuve. Vu le critère relatif aux fonctions à variation finie, il suffit de prouver que toute fonction f réelle et croissante sur I est dérivable ℓ-pp sur I.

La fonction

$$g\colon I \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \lim_{y\to x^+} f(y)$$

est croissante et continue à droite sur I. Dès lors μ_g est une mesure sur I. Vu le lemme, la fonction $f_{\mu_g,r}$ est dérivable ℓ-pp sur I; il s'ensuit que $g = f_{\mu_g,r} + g(r)$ est une fonction dérivable ℓ-pp sur I (on a même $\mathrm{D}g = \mathrm{D}\mu_g$ ℓ-pp sur I).

Nous savons qu'il existe une partie dénombrable (donc ℓ-négligeable) D de I telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I\setminus D$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer qu'en tout point $x \in I$ tel que $f(x) = g(x)$ et pour tout $h \in \mathbb{R}_0$ de module suffisamment petit, le nombre réel

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est compris entre

$$(1-1/m)\frac{g(x + (1-1/m)h) - g(x)}{(1-1/m)h} \quad \text{et} \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

(Remarquons qu'ainsi nous avons obtenu $\mathrm{D}f = \mathrm{D}\mu_g$ ℓ-pp sur I.)$\blacksquare$

Voici également un complément relatif aux fonctions absolument continues.

Théorème 6.3.6 (Lebesgue) *Pour toute fonction f ℓ-localement intégrable sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et tout $r \in I$, la fonction*

$$F\colon I \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \int_r^x f(t)\,dt$$

est absolument continue sur I et dérivable ℓ-pp sur I.

De plus, on a $\mathrm{D}F = f$ ℓ-pp sur I.

Preuve. Nous savons déjà que F est absolument continu sur I donc a une variation finie sur tout intervalle compact inclus dans I. Vu le théorème précédent, F est dérivable ℓ-pp sur I et on a $\mathrm{D}F = \mathrm{D}f.\ell$ donc $\mathrm{D}F = f$ ℓ-pp sur I.∎

Remarque. *Si $f \in \mathrm{C}_0([a,b])$ est dérivable ℓ-pp sur l'intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{D}f$ est ℓ-mesurable sur $[a,b]$.* De fait, en tout $x \in [a,b[$ où f est dérivable, on a

$$\mathrm{D}f(x) = \lim_m m(f(x+1/m) - f(x));$$

$\mathrm{D}f$ apparaît donc comme limite ℓ-pp sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions continues.□

Corollaire 6.3.7 *Une fonction F définie sur l'intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est absolument continue sur cet intervalle si et seulement si elle est dérivable ℓ-pp sur $[a,b]$, telle que $\mathrm{D}F$ soit ℓ-intégrable sur $[a,b]$ et vérifie*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \mathrm{D}F\,dt \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Preuve. La condition est nécessaire. Comme il existe $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ pour lequel $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a,b]$, le théorème de Lebesgue précédent permet de conclure aussitôt.

La suffisance de la condition est immédiate.∎

Corollaire 6.3.8 *Si F et G sont des fonctions absolument continues sur l'intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, il vient*

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (G.\mathrm{D}F + F.\mathrm{D}G)\,dx.$$

Preuve. Etablissons d'abord que FG est absolument continu sur $[a,b]$. De fait, si les semi-intervalles $]a_j,b_j]$ pour $j=1,\ldots,J$ sont inclus dans $[a,b]$ et sont deux à deux disjoints, il vient

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{J} |F(b_j)G(b_j) - F(a_j)G(a_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{J} |F(b_j)|\,|G(b_j) - G(a_j)| + \sum_{j=1}^{J} |F(b_j) - F(a_j)|\,|G(a_j)| \\
&\leq \|F\| \sum_{j=1}^{J} |G(b_j) - G(a_j)| + \|G\| \sum_{j=1}^{J} |F(b_j) - F(a_j)|\,.
\end{aligned}$$

On conclut alors aussitôt.

Cela étant, FG est dérivable ℓ-pp sur $[a,b]$ et

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_a^b \mathrm{D}(FG)\,dt$$

alors que $\mathrm{D}(FG)$ est bien sûr égal à $G.\mathrm{D}F + F.\mathrm{D}G$ ℓ-pp sur $[a,b]$.

D'où la conclusion.∎

6.4 Théorème du changement de variable

Rappel. Dans $\mathbb{R}^n$,

a) une *matrice de multiplication* est une matrice réelle et diagonale M de dimension $n \times n$ pour laquelle il existe $l \in \{1,\ldots,n\}$ et $r \in \mathbb{R}_0$ tels que

$$M = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1,r}_{l},1,\ldots,1),$$

b) une *matrice d'addition* est une matrice réelle A de dimension $n \times n$ pour laquelle il existe l, $m \in \{1,\ldots,n\}$ distincts et $r \in \mathbb{R}_0$ tels que $A = \mathrm{id} + B$ où B a tous ses éléments nuls sauf l'élément (l,m) égal à r.

Avec ces notations, si T est une matrice réelle de dimension $n \times n$, alors

a) MT s'obtient en multipliant les éléments de la l-ème ligne de T par r et en laissant les autres éléments inchangés,

b) TM s'obtient en multipliant les éléments de la l-ème colonne de T par r et en laissant les autres éléments inchangés,

c) AT s'obtient en ajoutant r-fois la m-ème ligne de T à la l-ème ligne et en laissant les autres éléments inchangés,

d) TA s'obtient en ajoutant r-fois la m-ème colonne de T à la l-ème colonne et en laissant les autres éléments inchangés.

De plus, avec ces notations,

a) la matrice M est inversible et M^{-1} est la matrice de multiplication

$$M^{-1} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1, \tfrac{1}{r}}_{l}, 1, \ldots, 1),$$

b) la matrice A est inversible et A^{-1} est la matrice d'addition $A^{-1} = \mathrm{id} - B$.

Rappelons que toute matrice de permutation peut s'écrire sous la forme d'un produit de $n-1$ matrices du type $MA_3A_2A_1$ ou $A_3'A_2'A_1'M'$, où M et M' sont des matrices de multiplication et $A_1, \ldots, A_3'$ sont des matrices d'addition.

Lemme 6.4.1 *Toute matrice inversible est un produit fini de matrices de multiplication ou d'addition.*

Preuve. Soit T une matrice inversible.

Si $T_{1,1} \neq 0$, alors il existe une matrice de multiplication B_1 pour laquelle $(B_1T)_{1,1} = 1$. Sinon comme T est inversible, il existe l tel que $T_{1,l} \neq 0$ et dès lors une matrice d'addition B_1 telle que $(B_1T)_{1,1} = 1$.

Il existe ensuite des matrices d'addition $A_2, \ldots, A_n$ telles que, pour tout entier $k \in \{2, \ldots, n\}$,

$$(A_k \ldots A_2B_1T)_{1,1} = 1 \quad \text{et} \quad (A_k \ldots A_2B_1T)_{l,1} = 0, \quad \forall l \in \{2, \ldots, k\}.$$

Cela étant, il existe des matrices d'addition $A_2', \ldots, A_n'$ telles que, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$,

$$\begin{array}{rcl} (A_n \ldots A_2B_1TA_2' \ldots A_k')_{1,1} & = & 1, \\ (A_n \ldots A_2B_1TA_2' \ldots A_k')_{l,1} & = & 0, \quad \forall l \in \{2, \ldots, n\}, \\ (A_n \ldots A_2B_1TA_2' \ldots A_k')_{1,l} & = & 0, \quad \forall l \in \{2, \ldots, k\}. \end{array}$$

Dès lors,

$$A_n \ldots A_2B_1TA_2' \ldots A_n' \text{ a la forme } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

On obtient alors aisément qu'en continuant de la sorte, on arrive à la matrice identité donc que T s'obtient par un produit fini d'inverses de matrices de multiplication ou d'addition, ce qui suffit pour conclure.∎

Proposition 6.4.2 *Soit T une matrice réelle de dimension $n \times n$.*

a) *Si T n'est pas inversible, $T\mathbb{R}^n$ est ℓ-négligeable.*

b) *Si T est inversible, l'image par T de tout borélien* (resp. *c-borélien*) *est borélien* (resp. *c-borélien*).

Dans les deux cas,

$$\ell(TB) = |\det(T)| \cdot \ell(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. a) De fait, $T\mathbb{R}^n$ est inclus dans un hyperplan et, vu le corollaire 4.5.5, tout hyperplan est ℓ-négligeable. Cela étant, la formule résulte aussitôt de ce que $\det(T) = 0$.

b) Comme l'image par T de tout borné est bornée, il suffit d'établir que l'image par T de tout borélien est borélien. Comme T est un produit fini de matrices de multiplication ou d'addition, il suffit de prouver que

$$\mathcal{B} = \{\, B \subset \mathbb{R}^n : TB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,\}$$

contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour toute matrice T de multiplication ou d'addition. Or $\mathcal{B}$ contient
i) $\mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$. De fait, $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une bijection continue alors que, pour tout $I \in \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$, il existe des compacts K_1 et K_2 tels que $I = K_1 \setminus K_2$; on a donc $TI = (TK_1) \setminus (TK_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
ii) les unions dénombrables disjointes de ses éléments,
iii) $B_1 \setminus B_2$ si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ sont tels que $B_1 \supset B_1$.

Pour conclure, il reste alors à établir la formule dans le cas où T est une matrice de multiplication ou d'addition. Cela résulte aussitôt de ce que, dans les deux cas,

$$\mathcal{B} = \{\, B \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n) : \ell(T(B \cap I)) = |\det(T)| \cdot \ell(B \cap I), \quad \forall I \in \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n) \,\}$$

contient
i) tout $I \in \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$. C'est trivial dans le cas où T est une matrice de multiplication. Si T est une matrice d'addition, T s'écrit $\mathrm{id} + C$ où C est une matrice réelle de dimension $n \times n$ dont tous les éléments sont nuls sauf le (l, m)-ème avec $l \neq m$ égal à $r \in \mathbb{R}_0$. Dans ce cas, pour tout $I \in \mathcal{SI}(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\ell(TI) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots [\int_{a_l+rx_k}^{b_l+rx_k} dx_l] \ldots \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{a_l+rx_k}^{b_l+rx_k} dx_l = \ell(I),$$

grâce au théorème de Fubini,
ii) toute union dénombrable disjointe de ses éléments,
iii) $B_1 \setminus B_2$ si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ vérifient $B_1 \supset B_2$.∎

Rappel. L'application

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[\quad x \mapsto \sup_{j \leq n} |x_j|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leq |\cdot| \leq \sqrt{n}\,\|\cdot\|_\infty$. De plus, si $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace linéaire des matrices réelles de dimension $n \times n$, l'application

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad A \mapsto \sup_{j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{j,k}|$$

est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \,.\, \|x\|_\infty\,, \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

(vérification directe).

Cela étant, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si l'application $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ est C_1, alors, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \neq x_0$ et que le segment $\{\, x_0 + t(y - x_0) : t \in [0,1] \,\}$ soit inclus dans Ω, il vient

$$\|\varphi(y) - \varphi(x_0)\|_\infty \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \left[\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x)} \right]_{x_0 + t(y - x_0)} \right\|_\infty . \, \|y - x_0\|_\infty$$

(pour tout $j \leq n$, φ_j appartient en effet à $\mathrm{C}_1(\Omega; \mathbb{R})$ et, vu le théorème de développement limité de Taylor, il existe $t_j \in]0,1[$ tel que

$$\varphi_j(y) - \varphi_j(x_0) = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{D}_k \varphi_j]_{x_0 + t_j(y - x_0)} \,.(y_k - x_{0,k})$$

donc tel que

$$|\varphi_j(y) - \varphi_j(x_0)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| [\mathrm{D}_k \varphi_j]_{x_0 + t_j(y - x_0)} \right| . \, \|y - x_0\|_\infty \,;$$

la conclusion s'ensuit aussitôt).∎

Remarque. Pour toute fonction étagée α dans $\mathbb{R}^n$, tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in \mathbb{R}_0$, les fonctions $\alpha(\cdot + h)$ et $\alpha(r \cdot)$ sont ℓ-intégrables et telles que

$$\int \alpha(\cdot + h)\, d\ell = \int \alpha\, d\ell \quad \text{et} \quad \int \alpha(r \cdot)\, d\ell = \frac{1}{|r|^n} \int \alpha\, d\ell.$$

Il s'ensuit directement que, pour toute fonction ℓ-intégrable f sur $\mathbb{R}^n$, les fonctions $f(\cdot + h)$ et $f(r \cdot)$ sont ℓ-intégrables et telles que

$$\int f(\cdot + h)\, d\ell = \int f\, d\ell \quad \text{et} \quad \int f(r \cdot)\, d\ell = \frac{1}{|r|^n} \int f\, d\ell. \square$$

Lemme 6.4.3 *Pour toute matrice réelle T de dimension $n \times n$, tout $r > 0$ et tout cube compact I de $\mathbb{R}^n$ dont la longueur des côtés est égale à c, il vient*

$$\mathrm{mes}((TI)_r) \leq \mathrm{mes}(I). \Big(|\det(T)| + 2n2^n (\sqrt{n}\, \|T\|_\infty + r)^{n-1} r \Big)$$

où

$$(TI)_r = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, TI) \leq r \,\}.$$

Preuve. En recourant à une translation puis à une homothétie, on vérifie directement qu'il suffit d'établir cette formule dans le cas $I = [0, 1]^n$.

a) Si on a $\det(T) = 0$, $T\mathbb{R}^n$ est inclus dans un hyperplan H. Comme I est inclus dans la boule $b(\sqrt{n})$, il vient $TI \subset H \cap b(\sqrt{n}\,\|T\|_\infty)$. Par une rotation (vu la proposition 6.4.2, cela ne modifie ni l'intégrabilité ni la mesure des ensembles), nous pouvons supposer avoir $H = \{\, x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \,\}$. Il vient alors

$$(TI)_r \subset \left(\prod_{j=1}^{n-1} \left[-\sqrt{n}\,\|T\|_\infty - r, \sqrt{n}\,\|T\|_\infty + r \right] \right) \times [-r, r]$$

donc

$$\operatorname{mes}((TI)_r) \leq 2^{n-1}(\sqrt{n}\,\|T\|_\infty + r)^{n-1}.2r,$$

ce qui suffit.

b) Si on a $\det(T) \neq 0$, T est une bijection linéaire continue et on procède comme suit. Comme

$$\operatorname{mes}((TI)_r) = \operatorname{mes}(TI) + \operatorname{mes}((TI)_r \setminus (TI))$$

avec $\operatorname{mes}(TI) = |\det(T)|$, il suffit de majorer adéquatement le second terme du second membre. Pour tout $x \in (TI)_r \setminus (TI)$, il existe un point y du compact TI qui réalise la distance de x à TI et, comme TI° est ouvert, y appartient à l'image par T d'une des $2n$ faces F_k de I; il vient donc

$$(TI)_r \setminus (TI) \subset \bigcup_{k=1}^{2n} (TF_k + b(r)).$$

Si z est le centre la face F_k, il vient $F_k \subset b(z_k, \sqrt{n})$ donc

$$TF_k \subset b(Tz_k, \sqrt{n}\,\|T\|), \quad \forall k \leq 2n.$$

Comme TF_k est aussi inclus dans un hyperplan, un raisonnement analogue à celui effectué en a) donne

$$\operatorname{mes}((TI)_r \setminus (TI)) \leq 2n.2^{n-1}(\sqrt{n}\,\|T\| + r)^{n-1}.2r,$$

ce qui suffit.∎

Théorème 6.4.4 (inégalité de Sard) *Pour tous ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, application $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ du type C_1 et compact $K \subset \Omega$, le compact $\varphi(K)$ donne lieu à l'inégalité de Sard*

$$\operatorname{mes}(\varphi(K)) \leq \int_K \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x)} \right) \right| dx.$$

Preuve. Il existe $r_0 > 0$ tel que $K_{r_0} \subset \Omega$. Vu la continuité uniforme des éléments de la matrice jacobienne $J(x) = (\partial(\varphi)/\partial(x))$ sur K_{r_0}, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $r \in]0, r_0[$ tel que

$$\left.\begin{array}{r} x, x_0 \in K_{r_0} \\ \|x - x_0\|_\infty \leq r \end{array}\right\} \Longrightarrow \|J(x) - J(x_0)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Posons $I = [0,1]^n$ et

$$M = \sup\left\{ 2n.2^n(\sqrt{n}\,\|J(x)\|_\infty + r_0)^{n-1} : x \in K_{r_0} \right\}.$$

a) Si C est un cube compact inclus dans K_{r_0}, dont la longueur commune des côtés est $\eta \leq r$ et si x_0 est son origine, il vient $C = x_0 + \eta I$ puis

$$\begin{aligned} &\|(\varphi(x) - J(x_0)x) - (\varphi(x_0) - J(x_0)x_0)\|_\infty \\ &\qquad \leq \sup_{t\in[0,1]} \|J(x_0 + t(x - x_0)) - J(x_0)\|_\infty \, . \, \|x - x_0\|_\infty \quad \leq \quad \varepsilon\eta \quad \leq \quad \eta, \end{aligned}$$

pour tout $x \in C$, donc

$$\varphi(C) \subset \varphi(x_0) - J(x_0)x_0 + (J(x_0)C)_{\sqrt{n}\eta}$$

puis

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}(\varphi(C)) &\leq \operatorname{mes}((J(x_0)C)_{\sqrt{n}\eta}) \\ &\leq \operatorname{mes}(C) \cdot (|\det(J(x_0))| + \sqrt{n}\eta M). \end{aligned}$$

b) Soit $\mathcal{R}_m$ le découpage de $\mathbb{R}^n$ d'équidistance 10^{-m}. Il existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $m \geq m_0$, si $C \in \mathcal{R}_m$ vérifie $C^- \cap K \neq \emptyset$, on a $C^- \subset K_{r_0}$. Pour tout $m \geq m_0$, soit $\{C_{m,1}, \ldots, C_{m,J(m)}\}$ l'ensemble des mailles de $\mathcal{R}_m$ dont l'adhérence rencontre K. Pour tout $m \geq m_0$, on a donc

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{J(m)} \overline{C_{m,j}} \subset K_{r_0}$$

puis

$$\varphi(K) \subset \bigcup_{j=1}^{J(m)} \varphi(\overline{C_{m,j}})$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}(\varphi(K)) &\leq \sum_{j=1}^{J(m)} \operatorname{mes}(\varphi(\overline{C_{m,j}})) \\
&\leq \sum_{j=1}^{J(m)} \operatorname{mes}(C_{m,j}) \cdot (|\det(J(x_{m,j}))| + 10^{-m}\sqrt{n}M) \\
&\leq \int_\Omega \sum_{j=1}^{J(m)} |\det(J(x_{m,j}))|\, \chi_{C_{m,j}}(x)\, dx + 10^{-m}\sqrt{n}M \operatorname{mes}(K_{r_0}).
\end{aligned}$$

D'où la conclusion au moyen du théorème de la convergence majorée.∎

Lemme 6.4.5 (Sard) *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et si* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une application* C_k*, alors l'ensemble des points critiques de* φ*, à savoir l'ensemble*

$$K_\varphi = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{rang}\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x)}\right) < m \right\},$$

est tel que

a) $\varphi(K_\varphi)$ *est* ℓ*-négligeable si* $m = n$ *et* $k = 1$*,*

b) $\varphi(K_\varphi) = \varphi(\Omega)$ *est* ℓ*-négligeable si* $n < m$ *et* $k = 1$*,*

$* \to$ c) $\varphi(K_\varphi)$ *est* ℓ*-négligeable si* $n > m$ *et* $k \geq n - m + 1$*.*$\leftarrow *$.

Preuve. a) Dans ce cas, K_φ coïncide avec le fermé dans Ω

$$\{ x \in \Omega : \det(\partial(\varphi)/\partial(x)) = 0 \}.$$

Il est donc réunion dénombrable de compacts dont, vu l'inégalité de Sard, l'image par φ est chaque fois ℓ-négligeable, ce qui suffit.

b) Si on pose $\omega = \Omega \times \mathbb{R}^{m-n}$ et si on introduit

$$\psi\colon \omega \to \mathbb{R}^m \quad (x, y) \mapsto \varphi(x),$$

alors a) appliqué à ψ assure que $\psi(K_\psi)$ est ℓ-négligeable or on a $K_\psi = \omega$ et $\psi(\omega) = \varphi(\Omega)$.

$* \to$ c) cf. S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, New York, 1964.$\leftarrow *$.∎

Théorème 6.4.6 (changement de variable) *Si* $x(x')$ *est un changement de variable régulier d'ordre* ≥ 1 *entre les ouverts* Ω *et* Ω' *de* $\mathbb{R}^n$*, alors*

$$f(x) \in \mathcal{L}^1(\Omega) \iff f(x(x')). \left|\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)\right| \in \mathcal{L}^1(\Omega'),$$

auquel cas il vient

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\Omega'} f(x(x')).\left|\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)\right|\,dx'.$$

Preuve. Posons

$$J(x) = \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right), \quad \forall x \in \Omega,$$

et

$$J'(x') = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right), \quad \forall x' \in \Omega'.$$

Vu l'inégalité de Sard, pour tout compact K' inclus dans Ω', il vient

$$\mathrm{mes}(K') \leq \int_{x(K')} |\det(J(x))|\,dx = \int_{\Omega} \chi_{K'}(x'(x)).\,|\det(J(x))|\,dx$$

car $x(K')$ est un compact inclus dans Ω tel que $x'(x(K')) = K'$. Comme tout semi-intervalle I' dans Ω' est réunion d'une suite croissante de compacts inclus dans Ω' et comme $\chi_{\overline{I'}}(x'(x)).\,|\det(J(x))|$ est une fonction ℓ-intégrable sur Ω, le théorème de la convergence monotone assure que cette majoration s'étend aux semi-intervalles dans Ω' donc aux fonctions étagées dans Ω' à valeurs dans $[0, +\infty[$. Cela étant, une nouvelle application du théorème de la convergence monotone établit que

$$\int_{\Omega'} f'(x')\,dx' \leq \int_{\Omega} f'(x'(x)).\,|\det(J(x))|\,dx \tag{*}$$

pour tout $f' \in \mathrm{D}_0(\Omega')$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. Comme $x(\cdot)\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$ est aussi une application de type C_1, il vient aussi

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \leq \int_{\Omega'} f(x(x')).\,|\det(J'(x'))|\,dx' \tag{**}$$

pour tout $f \in \mathrm{D}_0(\Omega)$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que ces inégalités (*) et (**) sont en fait des égalités qui alors sont bien sûr valables pour tout $f' \in \mathrm{D}_0(\Omega')$ et tout $f \in \mathrm{D}_0(\Omega)$ respectivement. Cela étant, pour toute fonction f ℓ-intégrable sur Ω, nous savons qu'il existe une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathrm{D}_0(\Omega)$ qui est de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ et converge ℓ-pp sur Ω vers f. Il s'ensuit que la suite $f_m(x(x')).\,|\det(J'(x'))|$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\Omega')$. Pour conclure, il suffit alors de prouver que cette dernière suite converge ℓ-pp sur Ω' vers $f(x(x')).\,|\det(J'(x'))|$. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que, si $N \subset \Omega$ est ℓ-négligeable et borélien, alors $x'(N) = x^{-1}(N)$ est l'image inverse de N par l'application $x(x')$ donc est borélien et que, pour tout compact $K' \subset x'(N)$, $x(K')$ est ℓ-négligeable car inclus dans N donc que K' est ℓ-négligeable, vu l'inégalité de Sard.∎

Mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, il est clair que

$$\ell(b(x;r)) = \ell(b(x;<r)) = \ell(b(r)) = \ell(b(<r)).$$

Il reste à calculer $\ell(b(r))$ pour tout $r > 0$. Posons

$$\omega_n(r) = \ell(\{\, x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r \,\})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $r > 0$. Cela étant, remarquons que le changement de variable linéaire $x = rx'$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même donne aussitôt

$$\omega_n(r) = r^n \omega_n(1).$$

De plus, par réduction, pour tout $n \geq 3$, il vient

$$\omega_n(1) = \int_{\{\,(x_1,x_2):|(x_1,x_2)|\leq 1\,\}} \omega_{n-2}\left(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right) dx_1\, dx_2$$

donc, en recourant à la formule $\omega_{n-2}(r) = r^{n-2}\omega_{n-2}(1)$,

$$\omega_n(1) = \omega_{n-2}(1).2\pi \left[-\frac{1}{n}(1-r^2)^{n/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}(1).$$

Au total, il vient donc

$$\begin{aligned}
\omega_1(r) &= 2r, \\
\omega_2(r) &= \pi r^2, \\
\omega_{2n+1}(r) &= \frac{2.(2\pi)^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} r^{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\
\omega_{2n}(r) &= \frac{\pi^n}{n!} r^{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}\, r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En particulier, il vient

$$\omega_n(1) \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_n(1)}{2^n} \downarrow 0$$

(on remarque que $2^n = \ell([-1,1]^n)$).□

Appendice A

Intégration à la Riemann, Darboux ou Lebesgue

Convention. Dans cet appendice, sauf mention explicite du contraire, $[a,b]$ désigne un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

A.1 Intégrale de Riemann

Rappel. Un *découpage* de $[a,b]$ est la donnée de nombres réels $a_0, \ldots, a_J$ en nombre fini et tels que $a = a_0 < \ldots < a_J = b$. Il est noté $[a_0, \ldots, a_J]$. Il est *subordonné à* $r > 0$ si on a $a_j - a_{j-1} \le r$ pour $j = 1, \ldots, J$. Il est *moins fin que* le découpage $[b_0, \ldots b_K]$ de $[a,b]$ si $\{a_0, \ldots, a_J\} \subset \{b_0, \ldots, b_K\}$.

Un *découpage à la Riemann* de $[a,b]$ est la donnée
a) d'un découpage $[a_0, \ldots, a_J]$ de $[a,b]$,
b) pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, d'un point r_j de $[a_{j-1}, a_J]$.
Il est noté $\{[a_0, \ldots, a_J], (r_j)_{j\le J}\}$.

Une *suite fondamentale de découpages à la Riemann* de $[a,b]$ est une suite de découpages à la Riemann

$$\left(\{[a_0^{(m)}, \ldots, a_J^{(m)}], (r_j^{(m)})_{j\le J(m)}\}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

de $[a,b]$ telle que

$$\sup_{j\le J(m)} \left| a_j^{(m)} - a_{j-1}^{(m)} \right| = \varepsilon_m \to 0 \text{ si } m \to \infty.$$

Définition. Une fonction f sur $[a,b]$ est *Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ (on dit aussi **R**-*intégrable sur* $[a,b]$) si, pour toute suite fondamentale de découpages à la

Riemann
$$\left(\{[a_0^{(m)}, \ldots, a_J^{(m)}], (r_j^{(m)})_{j \leq J(m)}\}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$
de $[a, b]$, la suite
$$\left(\sum_{j=1}^{J(m)} f(r_j^{(m)}) \cdot \left(a_j^{(m)} - a_{j-1}^{(m)}\right)\right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$
converge vers une limite finie. Il est alors clair que toutes ces limites coïncident; leur valeur commune est appelée *intégrale de Riemann de f sur* $[a, b]$ (on dit aussi $\mathbf{R}$-*intégrale de f sur* $[a, b]$) et est notée $\mathbf{R}_a^b(f)$.

L'ensemble des fonctions $\mathbf{R}$-intégrables sur $[a, b]$ est noté $\mathbf{R}([a, b])$.

Exemple. *Toute fonction f continue sur $[a, b]$ est $\mathbf{R}$-intégrable sur $[a, b]$ et on a $\mathbf{R}_a^b(f) = \int_a^b f\,dx$.* Comme f est ℓ-intégrable sur $[a, b]$, cela résulte aussitôt de l'interprétation de Riemann de l'intégrale.□

Théorème A.1.1 a) *L'ensemble $\mathbf{R}([a, b])$ est bien sûr un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{F}([a, b])$.

b) *On a $\mathbf{R}_a^b(f+g) = \mathbf{R}_a^b(f) + \mathbf{R}_a^b(g)$ et $\mathbf{R}_a^b(cf) = c\mathbf{R}_a^b(f)$ pour tous f, $g \in \mathbf{R}([a, b])$ et $c \in \mathbb{C}$.*

c) *Si f, $g \in \mathbf{R}([a, b])$ sont réels et tels que $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors il vient $\mathbf{R}_a^b(f) \leq \mathbf{R}_a^b(g)$.*∎

Théorème A.1.2 *Une fonction est $\mathbf{R}$-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ le sont, auquel cas $\mathbf{R}_a^b(f) = \mathbf{R}_a^b(\Re f) + i\mathbf{R}_a^b(\Im f)$.*∎

Théorème A.1.3 *Toute fonction $\mathbf{R}$-intégrable sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.*

Preuve. Procédons par contraposition.

Soit f une fonction non bornée sur $[a, b]$. A ce moment, $\Re f$ ou $\Im f$ sont non bornées sur $[a, b]$. Vu les deux théorèmes précédents, il suffit donc d'établir que, si f est une fonction réelle et non majorée sur $[a, b]$, alors f n'est pas $\mathbf{R}$-intégrable sur $[a, b]$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit $[a_0^{(m)}, \ldots, a_{J(m)}^{(m)}]$ un découpage de $[a, b]$ subordonné à $1/m$. Comme f est non majoré sur $[a, b]$, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $j(m) \in \{1, \ldots, J(m)\}$ tel que f ne soit pas borné sur $\left[a_{j(m)-1}^{(m)}, a_{j(m)}^{(m)}\right]$. Cela étant, pour tout $j \in \{1, \ldots, J(m)\} \setminus \{j(m)\}$, choisissons un point $r_j^{(m)}$ dans $\left[a_{j-1}^{(m)}, a_j^{(m)}\right]$ puis choisissons un point $r_{j(m)}^{(m)}$ dans $\left[a_{j(m)-1}^{(m)}, a_{j(m)}^{(m)}\right]$ tel que
$$f(r_{j(m)}^{(m)}) \cdot \left(a_{j(m)}^{(m)} - a_{j(m)-1}^{(m)}\right) \geq m - \sum_{1 \leq j \leq J(m),\, j \neq j(m)} f(r_j^{(m)}) \cdot \left(a_j^{(m)} - a_{j-1}^{(m)}\right).$$

Il est alors clair que

$$\left(\left\{\left[a_0^{(m)},\ldots,a_{J(m)}^{(m)}\right],\left(r_j^{(m)}\right)_{j\leq J(m}\right\}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

est une suite fondamentale de découpages à la Riemann de $[a,b]$ telle que la suite

$$\sum_{j=1}^{J(m)} f(r_j^{(m)})\cdot\left(a_j^{(m)}-a_{j-1}^{(m)}\right)$$

ne converge pas. D'où la conclusion.∎

Proposition A.1.4 *Si les fonctions f et g sont $\mathbf{R}$-intégrables sur $[a,b]$ et prennent la même valeur en tout point d'une partie dense de $[a,b]$, alors $\mathbf{R}_a^b(f)=\mathbf{R}_a^b(g)$.*∎

Proposition A.1.5 *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $\mathrm{D}f$ est égal sur $]a,b[$ à une fonction g $\mathbf{R}$-intégrable sur $[a,b]$, alors on a $f(b)=f(a)+\mathbf{R}_a^b(g)$.*

Preuve. On vérifie de suite qu'il suffit d'établir ce résultat pour une fonction f réelle, quitte à considérer séparément les fonctions $\Re f$ et $\Im f$.

Pour tout $m\in\mathbb{N}_0$, soit $[a_0^{(m)},\ldots,a_{J(m)}^{(m)}]$ un découpage de $[a,b]$ subordonné à $1/m$. Vu le théorème des accroissements finis, pour tout $m\in\mathbb{N}_0$ et tout $j\in\{1,\ldots,J(m)\}$, il existe $r_j^{(m)}\in\left]a_{j-1}^{(m)},a_j^{(m)}\right[$ tel que

$$f(a_j^{(m)})=f(a_{j-1}^{(m)})+\mathrm{D}f(r_j^{(m)})\cdot\left(a_j^{(m)}-a_{j-1}^{(m)}\right).$$

Au total,

$$\left(\{[a_0^{(m)},\ldots,a_J^{(m)}],(r_j^{(m)})_{j\leq J(m)}\}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

est une suite fondamentale de découpages à la Riemann de $[a,b]$ telle que

$$\sum_{j=1}^{J(m)} g(r_j^{(m)})\cdot\left(a_j^{(m)}-a_{j-1}^{(m)}\right)=f(b)-f(a),\quad\forall m\in\mathbb{N}_0.$$

D'où la conclusion.∎

Remarques. 1) La fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=0$ pour tout $x\in[-1,0]$ et $f(x)=1$ pour tout $x\in\,]0,1]$ n'est pas continue sur $[-1,1]$, est $\mathbf{R}$-intégrable sur $[-1,1]$ et n'a pas de primitive sur $]-1,1[$.

2) La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^{3/2}\sin(1/x)$ si $x>0$ et $f(0)=0$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ mais sa dérivée n'est $\mathbf{R}$-intégrable sur aucun intervalle du type $[0,r]$ avec $r>0$ car elle est non bornée sur un tel intervalle.□

A.2 Intégrale de Darboux

Notations. Soit f une fonction réelle et bornée sur $[a, b]$ et soit $[a_0, \ldots, a_J]$ un découpage de $[a, b]$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, posons

$$m_j = \inf \{ f(x) : a_{j-1} \leq x \leq a_j \} \quad \text{et} \quad M_j = \sup \{ f(x) : a_{j-1} \leq x \leq a_j \} .$$

Cela étant, introduisons aussi

$$s(f, [a_0, \ldots, a_J]) = \sum_{j=1}^{J} m_j \cdot (a_j - a_{j-1})$$

et

$$S(f, [a_0, \ldots, a_J]) = \sum_{j=1}^{J} M_j \cdot (a_j - a_{j-1})$$

Lemme A.2.1 *Si f est une fonction réelle et bornée sur $[a, b]$, et si $[a_0, \ldots, a_J]$ est un découpage de $[a, b]$,*

a) *on a*

$$s(f, [a_0, \ldots, a_J]) \leq S(f, [a_0, \ldots, a_J]).$$

b) *pour tout découpage $[b_0, \ldots, b_K]$ de $[a, b]$ plus fin que $[a_0, \ldots, a_J]$, on a*

$$\begin{aligned} s(f, [a_0, \ldots, a_J]) &\leq s(f, [b_0, \ldots, b_K]) \\ &\leq S(f, [b_0, \ldots, b_K]) \quad \leq \quad S(f, [a_0, \ldots, a_J]). \end{aligned}$$

c) *pour tout découpage $[b_0, \ldots, b_K]$ de $[a, b]$, on a*

$$s(f, [a_0, \ldots, a_J]) \leq S(f, [b_0, \ldots, b_K]).$$

Preuve. a) et b) sont immédiats.

c) Désignons par $[c_0, \ldots, c_L]$ le découpage de $[a, b]$ obtenu au moyen des points de l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_J, b_0, \ldots, b_K\}$. Vu b), il vient alors

$$s(f, [a_0, \ldots, a_J]) \leq s(f, [c_0, \ldots, c_L])$$

et

$$S(f, [c_0, \ldots, c_L]) \leq S(f, [b_0, \ldots, b_K]),$$

ce qui suffit, vu a).∎

Définitions. Dès lors, pour toute fonction réelle et bornée f sur $[a, b]$, nous pouvons introduire

a) *l'intégrale inférieure de Darboux de f sur $[a, b]$,* à savoir

$$\underline{\mathbf{D}}_a^b(f) = \sup \{ s(f, [a_0, \ldots, a_J]) : [a_0, \ldots, a_J] \in \mathcal{D} \},$$

b) *l'intégrale supérieure de Darboux de f sur $[a, b]$,* à savoir

$$\overline{\mathbf{D}}_a^b(f) = \inf \{ S(f, [a_0, \ldots, a_J]) : [a_0, \ldots, a_J] \in \mathcal{D} \}$$

où $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des découpages de $[a, b]$.

Bien sûr, $\underline{\mathbf{D}}_a^b(f)$ et $\overline{\mathbf{D}}_a^b(f)$ sont alors des nombres réels vérifiant $\underline{\mathbf{D}}_a^b(f) \leq \overline{\mathbf{D}}_a^b(f)$.

Cela étant, une fonction réelle et bornée f sur $[a, b]$ est *Darboux intégrable* (on dit aussi **D**-*intégrable*) si on a $\underline{\mathbf{D}}_a^b(f) = \overline{\mathbf{D}}_a^b(f)$, auquel cas ce nombre est appelé *intégrale de Darboux de f sur $[a, b]$* et est noté $\mathbf{D}_a^b(f)$.

Exemple. *Toute fonction réelle et continue f sur $[a, b]$ est* **D**-*intégrable sur $[a, b]$.* Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour tous $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$. Dès lors, pour tout découpage $[a_0, \ldots, a_J]$ de $[a, b]$ subordonné à η, on a $|M_j - m_j| \leq \varepsilon$ pour tout $j = 1, \ldots, J$, donc

$$|S(f, [a_0, \ldots, a_J]) - s(f, [a_0, \ldots, a_J])| \leq \varepsilon \cdot (b - a),$$

ce qui suffit pour conclure.□

Exemple. *Toute fonction réelle et monotone sur $[a, b]$ est* **D**-*intégrable sur $[a, b]$.* Soit $\varepsilon > 0$. Pour $m \in \mathbb{N}_0$, si $[a_0, \ldots, a_m]$ désigne le découpage de $[a, b]$ d'équidistance $(b - a)/m$, le nombre de valeurs de $j \in \{1, \ldots, J\}$ pour lesquelles on a $|M_j - m_j| \geq \varepsilon/(2b - 2a)$ est évidemment majoré par $2(b - a) \cdot |f(b) - f(a)| / \varepsilon$. Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} &|S(f, [a_0, \ldots, a_m]) - s(f, [a_0, \ldots, a_m])| \\ &\underset{(*)}{\leq} \ |f(b) - f(a)| \cdot \frac{2}{\varepsilon}(b - a)\, |f(b) - f(a)| \cdot \frac{b - a}{m} + \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \cdot m \cdot \frac{b - a}{m} \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, ce qui suffit pour conclure [en $(*)$, la majorante est obtenue comme suit: le premier terme majore la somme des modules des nombres $(M_j - m_j) \cdot (b - a)/m$ pour lesquels on a $|M_j - m_j| \geq \varepsilon/(2b - 2a)$ car on a bien sûr toujours $|M_j - m_j| \leq |f(b) - f(a)|$ et le second terme, quant à lui, majore la somme des modules des nombres $(M_j - m_j) \cdot (b - a)/m$ pour lesquels on a $|M_j - m_j| < \varepsilon/(2b - 2a)$ car il y en a m au plus].□

A.3 Comparaison de ces notions

Théorème A.3.1 *Une fonction réelle f sur $[a, b]$ est* **R**-*intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est bornée et* **D**-*intégrable sur $[a, b]$, auquel cas on a $\mathbf{R}_a^b(f) = \mathbf{D}_a^b(f)$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Nous savons déjà que toute fonction **R**-intégrable sur $[a, b]$ est bornée sur cet intervalle. De plus, on prouve aisément en procédant par l'absurde que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\mathbf{R}_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^{J} f(r_j) \cdot (a_j - a_{j-1}) < \mathbf{R}_a^b(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout découpage à la Riemann $\{[a_0, \ldots, a_J], (r_j)_{j \leq J}\}$ de $[a, b]$ subordonné à η. On en déduit aussitôt que, si $[a_0, \ldots, a_J]$ est un découpage subordonné à η, il vient

$$\mathbf{R}_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, [a_0, \ldots, a_J]) \leq S(f, [a_0, \ldots, a_J]) \leq \mathbf{R}_a^b(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La conclusion s'ensuit aussitôt.

La condition est suffisante. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est **D**-intégrable sur $[a, b]$, il existe un découpage $[a_0, \ldots, a_J]$ de $[a, b]$ tel que

$$S(f, [a_0, \ldots, a_J]) - s(f, [a_0, \ldots, a_J]) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cela étant, établissons que, pour tout découpage $[b_0, \ldots, b_K]$ de $[a, b]$ subordonné à $\varepsilon/(3J\Delta)$ avec

$$\Delta = \sup\{\, f(x) : x \in [a, b]\,\} - \inf\{\, f(x) : x \in [a, b]\,\} + 1,$$

on a

$$S(f, [b_0, \ldots, b_K]) - s(f, [b_0, \ldots, b_K]) \leq \varepsilon.$$

Soit $[c_0, \ldots, c_L]$ le découpage de $[a, b]$ obtenu au moyen des points de l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_J, b_0, \ldots, b_K\}$; comme il s'agit d'un découpage plus fin que $[a_0, \ldots, a_J]$, il vient

$$S(f, [c_0, \ldots, c_L]) - s(f, [c_0, \ldots, c_L]) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Estimons à présent

$$S(f, [b_0, \ldots, b_K]) - S(f, [c_0, \ldots, c_L]); \qquad (*)$$

parmi les intervalles $[b_0, b_1]$, ..., $[b_{K-1}, b_K]$, il y en a $J-1$ au plus qui ne se retrouvent pas tels quels parmi les intervalles $[c_0, c_1]$, ..., $[c_{L-1}, c_L]$; par conséquent, la différence

$(*)$ est majorée par $(J-1)\cdot\Delta\cdot\varepsilon/(3J\Delta) < \varepsilon/3$. En procédant de même, on obtient aussi l'estimation

$$s(f,[c_0,\ldots,c_L]) - s(f,[b_0,\ldots,b_K]) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'où la conclusion de cette partie.

Dès lors, pour tout découpage à la Riemann $\{[b_0,\ldots,b_K],(r_k)_{k\leq K}\}$ de $[a,b]$, subordonné à $\varepsilon/(3J\Delta)$, comme on a bien sûr

$$s(f,[b_0,\ldots,b_K]) \leq \sum_{k=1}^{K} f(r_k)\cdot(b_k-b_{k-1}) \leq S(f,[b_0,\ldots,b_K]),$$

il vient

$$\left|\mathbf{D}_a^b(f) - \sum_{k=1}^{K} f(r_k)\cdot(b_k-b_{k-1})\right| \leq \varepsilon.$$

La conclusion s'ensuit aisément. ▮

Critère A.3.2 (Lebesgue) *Une fonction f sur $[a,b]$ est $\mathbf{R}$-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si elle est bornée sur $[a,b]$ et telle que l'ensemble $\neg\mathrm{C}$ des points de $[a,b]$ où f n'est pas continu soit ℓ-négligeable, auquel cas f est ℓ-intégrable sur $[a,b]$ et tel que $\mathbf{R}_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Preuve. On se ramène de suite au cas où la fonction f est réelle.

La condition est nécessaire. Nous savons déjà que f doit être borné sur $[a,b]$. Etablissons à présent que $\neg\mathrm{C}$ est ℓ-négligeable. Bien sûr, $x\in[a,b]$ appartient à $\neg\mathrm{C}$ si et seulement si *l'oscillation de f en x*, à savoir

$$\omega_f(x) = \lim_{r\to 0^+} \sup\{\,|f(y)-f(z)| : y,z\in[a,b]\,, |x-y|\leq r, |x-z|\leq r\,\}\,,$$

est strictement positive. Dès lors, il vient

$$\neg\mathrm{C} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \neg\mathrm{C}_{1/m}$$

avec

$$\neg\mathrm{C}_{1/m} = \{\,x\in[a,b] : \omega_f(x)\geq 1/m\,\}\,, \quad \forall m\in\mathbb{N}_0,$$

et il suffit de prouver que chacun des ensembles $\neg\mathrm{C}_{1/m}$ est ℓ-négligeable. Fixons $m\in\mathbb{N}_0$. Si $\neg\mathrm{C}_{1/m}$ est vide, c'est trivial; sinon on procède comme suit. Etant donné $\varepsilon>0$, vu le théorème précédent, il existe un découpage $[a_0,\ldots,a_J]$ de $[a,b]$ tel que

$$S(f,[a_0,\ldots,a_J]) - s(f,[a_0,\ldots,a_J]) \leq \varepsilon/(2m).$$

Cela étant, soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des entiers $j \in \{1, \ldots, J\}$ pour lesquels $]a_{j-1}, a_j[\cap \neg\mathrm{C}_{1/m} \neq \emptyset$. Pour tout $j \in \mathcal{J}$, il est clair que

$$M_j - m_j = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [a_{j-1}, a_j] \} \geq 1/m$$

donc que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \ell([a_{j-1}, a_j]) \leq m \sum_{j \in \mathcal{J}} (M_j - m_j) \cdot \ell([a_{j-1}, a_j]) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $j \in \{0, \ldots, J\}$, choisissons en outre un semi-intervalle I_j contenant a_j et tel que $\ell(I_j) \leq \varepsilon/(2J + 2)$. Au total,

$$\{ I_j : j = 0, \ldots, J \} \cup \{]a_{j-1}, a_j] : j \in \mathcal{J} \}$$

est un recouvrement fini de $\neg\mathrm{C}_{1/m}$ au moyen de semi-intervalles dont la somme des ℓ-mesures est majorée par ε.

La condition est suffisante. Soit f une fonction réelle sur l'intervalle $I = [a, b]$ et $C > 0$ tels que f soit à valeurs dans $[-C, C]$ et que l'ensemble $\neg\mathrm{C}$ soit ℓ-négligeable. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\neg\mathrm{C}$ est ℓ-négligeable, il existe un recouvrement dénombrable $\{ I_m : m \in \mathbb{N}_0 \}$ de $\neg\mathrm{C}$ au moyen d'intervalles ouverts tels que $\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m) \leq \varepsilon/(4C)$. En tout $x \in [a, b] \setminus \neg\mathrm{C}$, f est continu; il existe donc un intervalle ouvert J_x contenant x et tel que

$$\sup \left\{ |f(y) - f(z)| : y, z \in [a, b] \cap J_x^- \right\} \leq \varepsilon/(2\ell(I)).$$

Cela étant,

$$\{ I_m : m \in \mathbb{N}_0 \} \cup \{ J_x : x \in [a, b] \setminus \neg\mathrm{C} \}$$

est un recouvrement ouvert du compact $[a, b]$ dont nous pouvons extraire un recouvrement fini, soit

$$\{ I_m : m \in M \} \cup \{ J_x : x \in X \}.$$

Cela étant, soit $[a_0, \ldots, a_K]$ un découpage de $[a, b]$ tel que, pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$, l'intervalle $[a_{k-1}, a_k]$ soit inclus dans un des intervalles I_m^- avec $m \in M$ ou J_x^- avec $x \in X$. Dans ces conditions,

$$S(f, [a_0, \ldots, a_K]) - s(f, [a_0, \ldots, a_K]) = \sum_{k=1}^{K} (M_k - m_k) \cdot \ell([a_{k-1}, a_k])$$

peut être évalué comme suit:
a) la somme des $(M_k - m_k) \cdot \ell([a_{k-1}, a_k])$ tels que $[a_{k-1}, a_k]$ soit inclus dans un des I_m^- avec $m \in M$ est certainement majorée par $2C \cdot \varepsilon/(4C) = \varepsilon/2$,
b) la somme des $(M_k - m_k) \cdot \ell([a_{k-1}, a_k])$ tels que $[a_{k-1}, a_k]$ soit inclus dans un des

J_x^- avec $x \in X$ est certainement majorée par $\varepsilon/(2\ell(I)) \cdot \ell(I) = \varepsilon/2$; on a donc

$$S(f, [a_0, \ldots, a_K]) - s(f, [a_0, \ldots, a_K]) \leq \varepsilon.$$

La conclusion s'ensuit aussitôt.

Déduisons-en que toute fonction **R**-intégrable sur $[a, b]$ est ℓ-intégrable sur $[a, b]$ et telle que $\mathbf{R}_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx$. De fait, pour toute suite fondamentale

$$\left\{[a_0^{(m)}, \ldots, a_{J(m)}^{(m)}], (r_j^{(m)})_{j \leq J(m)}\right\}$$

de découpages à la Riemann de $[a, b]$, les fonctions

$$f_m = \sum_{j=1}^{J(m)} f(r_j^{(m)}) \cdot \chi_{]a_{j-1}^{(m)}, a_j^{(m)}]}$$

sont ℓ-intégrables et de module majoré par un fonction intégrable fixe du type $C\chi_{[a,b]}$, et constituent une suite qui converge ponctuellement sur $[a, b] \setminus \neg\mathrm{C}$, donc ℓ-pp sur $[a, b]$, vers f. Le théorème de la convergence majorée permet alors de conclure aussitôt.∎

Remarque. Si f est une fonction ℓ-intégrable sur $[a, b]$, nous savons que $F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$ est une fonction continue sur $[a, b]$. Si, en outre, f est borné ℓ-pp sur $[a, b]$, F vérifie même la majoration $|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_\infty \cdot |x - y|$ pour tous x, $y \in [a, b]$. Ceci n'entraine pas que F soit dérivable. Cependant si $f \in \mathrm{L}^1([a, b])$ est continu en $x_0 \in [a, b]$, on a tôt fait de vérifier que F est dérivable en x_0 et que $\mathrm{D}F(x_0) = f(x_0)$. (Il suffit de reprendre la preuve du fait que toute fonction continue sur $]a, b[$ est primitivable sur cet intervalle).□

Bibliographie

[1] Berberian S. K., *Measure and integration*, Macmillan (1965). (réimprimé par Chelsea en 1970).

[2] Billingsley P., *Probability and measure*, Wiley (1979).

[3] Bourbaki N., *Intégration*, Hermann (Chap. 1–4: 1965; Chap. 5: 1967; Chap. 6: 1959; Chap. 7–8: 1963; Chap.9: 1969).

[4] Cohn D. L., *Measure theory*, Birkhäuser (1980).

[5] Dudley R. M., *Real analysis and probability*, Wadsworth & Brooks/Cole (1989).

[6] Dunford N.-Schwartz J. T., *Linear operators* **I**, Interscience (1958).

[7] De Guzman M., *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics **481**, Springer (1975).

[8] Floret K., *Maß- und Integrationstheorie*, Teubner (1981).

[9] Garnir H. G., *Fonctions de variables réelles,* **II**, Gauthier-Villars et Librairie Universitaire (1965).

[10] Garnir H. G., *Introduction à la théorie de la mesure dans l'espace euclidien*, Cours Univ. Liège (1981–1982).

[11] Garnir H. G., De Wilde M., Schmets J., *Analyse fonctionnelle,* **II:** *Mesure et intégration dans l'espace euclidien*, Birkhäuser (1972).

[12] Halmos P. R., *Measure theory*, Van Nostrand (1950). (réimprimé par Springer en 1974).

[13] Hewitt E., Stromberg K., *Real and abstract analysis*, Springer (1965).

[14] Kőlzow D., *Differentiation von Maßen*, Lecture Notes in Mathematics **65**, Springer (1968).

[15] Münster M. *Mesure et intégration dans les ensembles abstraits et dans les espaces topologiques*, Dissertation doctorale Univ. Liège, (1969–1970); cf. également *Théorie générale de la mesure et de l'intégration*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège (1974), 526–567.

[16] Parthasarathy K. R., *Probability measures on metric spaces*, Academic Press (1967).

[17] Rogers C. A., *Hausdorff measures*, Cambridge University Press (1970).

[18] Zaanen A. C., *Integration*, North Holland (1967).

Index

Table des matières